NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les surfaces du troisième ordre à quatre points doubles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 438-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__438_0>

[$M^2 3 h \beta$]

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE A QUATRE POINTS DOUBLES;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que le lieu des points, tels que leurs projections sur les côtés d'un triangle soient en ligne droite, est le cercle circonscrit à ce triangle. Le lieu des points de l'espace tels que leurs projections sur les faces d'un tétraèdre soient dans un plan, est une surface du troisième ordre ayant pour points doubles les sommets de ce tétraèdre; cette surface n'est pas la surface la plus générale du troisième ordre à quatre points doubles, on peut la caractériser par une propriété simple que je vais indiquer après avoir fait sur les coniques circonscrites à un triangle et les surfaces du troisième ordre à quatre points doubles quelques remarques qui peuvent donner lieu à des exercices intéressants.

1. L'équation générale des coniques circonscrites à un triangle peut s'écrire, si l'on prend ce triangle comme triangle de référence,

$$(\Gamma) \qquad \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{Y} + \frac{\gamma}{Z} = 0.$$

Les tangentes aux sommets coupent les côtés opposés en des points situés sur la droite

$$(\Delta) \qquad \frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} + \frac{Z}{\gamma} = 0.$$

La connaissance de la droite Δ entraîne celle de la conique Γ. Si X, Y, Z représentent les distances d'un point aux côtés BC, CA, AB du triangle de référence, si a, b, c sont les côtés de ce triangle, la droite Δ coupe le côté AB en un point M tel que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

En particulier, la conique Γ est le cercle circonscrit au triangle si

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

c'est-à-dire, si Δ divise chaque côté du triangle dans le rapport des carrés des côtés qui aboutissent à ses extrémités.

2. L'équation générale des surfaces du troisième ordre à quatre points doubles peut s'écrire, si l'on prend pour tétraèdre de référence le tétraèdre formé par les points doubles,

$$(\Sigma) \qquad \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{Y} + \frac{\gamma}{Z} + \frac{\delta}{T} = 0.$$

Le plan tangent en un point pris sur une arête du tétraèdre, les sommets exceptés, est fixe quelle que soit la portion du point sur l'arête; par exemple, le long de l'arête $X = Y = 0$, le plan tangent est

$$\frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} = 0.$$

Les plans tangents correspondant à deux arêtes opposées se coupent suivant une droite située sur la surface; on obtient ainsi les trois droites qui, avec le système des arêtes du tétraèdre, constituent l'ensemble des droites de la surface Σ. Ces trois droites sont situées dans le plan

$$(\Pi) \qquad \frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} + \frac{Z}{\gamma} + \frac{T}{\delta} = 0;$$

ce sont les diagonales du quadrilatère complet que le tétraèdre détermine sur ce plan.

La connaissance du plan (Π) entraîne celle de la surface Σ. Si X, Y, Z, T représentent les distances d'un point aux faces BCD, ACD, ADC du tétraèdre; si a, b, c, d sont les aires de ces faces, le plan Π coupe l'arête AB en un point M tel que

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

3. Cela posé, on peut démontrer que la surface lieu des points tels que leurs projections sur les côtés du tétraèdre de référence soient dans un plan correspond au cas où

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d},$$

c'est-à-dire si Π divise chaque arête du tétraèdre dans le rapport des carrés des faces qui aboutissent à ses extrémités. Il suffit de former l'équation de la surface Σ lieu des points considérés et de reconnaître la signification géométrique des coefficients de cette équation.

Il serait facile de faire quelques autres rapprochements entre les propriétés du cercle circonscrit à un triangle et de la surface de troisième ordre, lieu des points dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont dans un même plan. Par exemple, si dans un triangle on considère le point tel que la somme des carrés de ses distances aux côtés est minima (point de Lemoine), les droites qui joignent ce point aux sommets coupent les côtés aux conjugués des points situés sur Δ. Si dans un tétraèdre on prend le point tel que la somme des carrés de ses distances aux faces soit minima, les plans passant par les arêtes et ce point coupent les arêtes opposées aux conjugués des points situés dans Π.