Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 42-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__42_2>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1903.

(1901, p. 47.)

Si l'on considère les courbes tracées sur une même quadrique, le rapport anharmonique de quatre courbes quelconques, tangentes à une même biquadratique, est constant lorsque ces courbes appartiennent à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables.

(H. Léauté.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Ce théorème résulte de la proposition suivante :

Soit $f(u)$ une fonction elliptique du second ordre, construite sur les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. Si l'on désigne par $2k$ la somme des deux pôles de $f(u)$, le rapport anharmo-

nique des quatre quantités

$$f(k),\quad f(k+\omega_1),\quad f(k+\omega_2),\quad f(k+\omega_3),$$

où

$$\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$$

est indépendant de la fonction f et a pour valeur

$$\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2},$$

en posant, suivant l'usage,

$$p\omega_1 = e_1,\qquad p\omega_2 = e_2,\qquad p\omega_3 = e_3.$$

Autrement dit, ce rapport anharmonique est un *invariant absolu* pour les fonctions elliptiques du second ordre, admettant des périodes données.

Considérons, en effet, les deux fonctions elliptiques

$$f(u),\quad p(u-k).$$

Elles admettent les mêmes périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Il existe donc entre elles une relation algébrique, qui est nécessairement linéaire par rapport à chacune d'elles. Donnons-nous, en effet, une valeur quelconque α; $f(u)$ prendra cette valeur pour deux arguments u_1 et u_2 liés par les relations

$$u_1 + u_2 = 2k,$$

d'où il résulte

$$p(u_1 - k) = p(u_2 - k).$$

Ainsi à une valeur de $f(u)$ ne correspond qu'une valeur de $p(u-k)$. De même.... Donc, etc.

Il résulte de là que u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre arguments quelconques, le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de $f(u)$ est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de $p(u-k)$. Faisons, en particulier,

$$\begin{aligned} u_1 &= k,\\ u_2 &= k+\omega_1,\\ u_3 &= k+\omega_2,\\ u_4 &= k+\omega_3. \end{aligned}$$

On aura

$$\frac{f(k)-f(k+\omega_2)}{f(k+\omega_1)-f(k+\omega_2)} : \frac{f(k)-f(k+\omega_3)}{f(k+\omega_1)-f(k+\omega_3)}$$
$$= \frac{p(o)-p\omega_2}{p\omega_1-p\omega_2} : \frac{p(o)-p\omega_3}{p\omega_1-p\omega_3} = \frac{e_1-e_3}{e_1-e_2},$$

C. Q. F. D.

Cela posé, soient C la biquadratique considérée, $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes des fonctions elliptiques qui peuvent servir à la représentation paramétrique de cette courbe, (F) un faisceau de courbes algébriques tracées sur les quadriques, et dont chacune ne rencontre C qu'en deux points. Chaque courbe de (F) est déterminée par un paramètre λ qui est connu lui-même rationnellement si l'on donne l'un des points de rencontre de cette courbe avec C. Soit u le paramètre elliptique de ce point. On aura

$$\lambda = f(u),$$

f étant une certaine fonction elliptique. En vertu de l'hypothèse faite, $f(u)$ ne peut prendre la même valeur que pour deux valeurs de u; c'est donc une fonction elliptique du second ordre.

Soit $2k$ la somme des pôles de cette fonction. Les arguments de deux points de C situés sur une même courbe (F) satisfont à la relation

$$u_1 + u_2 = 2k + \text{période}.$$

Pour trouver les courbes (F) tangentes à C, on fera dans cette égalité $u_1 = u_2$. On voit ainsi qu'il existe quatre telles courbes (F), et que les arguments des points de contact sont

$$k, \quad k+\omega_1, \quad k+\omega_2, \quad k+\omega_3.$$

Le théorème à démontrer est maintenant une conséquence immédiate du lemme établi au début.

1918.

(1901, p. 336.)

Construire le point où une normale à une parabole coupe la développée de cette courbe, en dehors du point où elle est tangente à la développée. (M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

On sait que les pieds de trois normales concourantes à une parabole forment un triangle dont le centre de gravité est sur l'axe. Soient donc M le pied d'une normale, A le point où elle coupe la développée en dehors du centre de courbure en M, enfin N le pied de la normale qui touche la développée en A. Le point A peut être considéré comme l'intersection de trois normales, dont deux sont confondues et normales en N, la troisième étant la normale en M. Par suite, le point N est de l'autre côté que M par rapport à l'axe, et à une distance deux fois moins grande. Il est donc facile à construire : on en déduit la normale NA et le point A.

La construction inverse donnerait le centre de courbure A relatif au point N.

Autres solutions de MM. BARISIEN, BROCARD, LEZ et VALDÈS.

1921.

(1902, p 96)

Démontrer que pour tout nombre entier n on a l'inégalité

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 > n\pi$$

et que, lorsque n augmente indéfiniment, la différence des deux termes de l'inégalité tend vers zéro.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. G. MONNET.

La proposition énoncée se rattache directement aux propriétés de l'intégrale classique

$$\psi(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx.$$

Rappelons, en effet, les formules

$$\psi(2n) \quad = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\psi(2n+1) = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

et l'inégalité évidente

$$\psi(2n-1) > \psi(2n) > \psi(2n+1).$$

Il viendra

$$\frac{2.4.6\ldots 2n-2}{1.3.5\ldots 2n-1} > \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1}.$$

Multiplions les trois membres par

$$2n\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1};$$

nous obtiendrons les inégalités

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 > n\pi > \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2$$

qui démontrent la proposition.