

## Correspondance

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 3  
(1903), p. 411-418

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1903\\_4\\_3\\_411\\_2](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3_411_2)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## CORRESPONDANCE.

---

**M. A.-H. Couvert.** — *Au sujet des questions 1628 et 1491.* — M. Barisien a énoncé et résolu la question 1628 dans *J. M. S.*, 1894, page 39, exercice III; une seconde solution se trouve également dans *J. M. S.*, 1894, page 140, question 351, § II. Les deux solutions sont d'ailleurs identiques.

La question 1491 est étudiée dans *J. M. S.*, 1886, page 39 (question d'examen 2\*).

J'ai cru devoir vous envoyer ces renseignements, parce que, dans le *Tableau de correspondance* publié en 1900, les questions 1491 et 1628 sont considérées comme non résolues et que depuis aucune solution n'en a été donnée dans les *N. A.*

**A un abonné, à la Bourboule.** — Prière de vouloir bien me faire connaître votre nom et votre adresse : il vous sera répondu par Lettre particulière.

R. B.

---

2° Si cette tangente touche une courbe C sur l'une des sphères, l'arc de cette courbe, compté depuis une origine convenable, est égal à la longueur de la tangente commune.

3° La tangente commune touche la seconde sphère en un point qui décrit une courbe  $C_1$  développante de C.

4° Le plan osculateur en un point de la courbe C est le plan tangent à la seconde sphère au point correspondant de  $C_1$ .

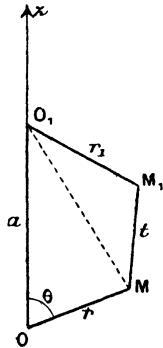
5° Calculer le rayon de courbure de C au moyen du théorème de Meusnier.

6° Calculer le rayon de torsion de C.

## SOLUTION.

$$1^\circ \quad t^2 + r_1^2 = \overline{OM}^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta,$$

$$t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar \cos \theta.$$



2°  $MM_1$  étant la tangente en M, l'angle avec  $Oz$  est

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Mais  $MM_1$  est aussi la projection de  $OO_1$  sous l'angle  $\gamma$ , donc aussi

$$\cos \gamma = \frac{MM_1}{OO_1} = \frac{t}{a}.$$

On a donc

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} \quad \text{ou} \quad ds = \frac{a dz}{t}.$$

Or on a

$$t dt = + ar \sin \theta d\theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

$$dz = - r \sin \theta d\theta;$$

donc

$$t dt = - a dz,$$

d'où

$$ds = - dt, \quad s_0 - s = t.$$

3° Il résulte de la seconde question que  $M_1$  décrit une courbe  $C_1$  développante de  $C$ .

4° La développante  $M_1$  est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface développable engendrée par  $MM_1$  tangente en  $M$  à la courbe  $C$ . Le plan osculateur à la courbe  $C$  est le plan tangent le long de la génératrice  $MM_1$ . On peut le déterminer comme plan tangent à la surface développable au point  $M_1$ . Il contient en ce point :

a. La génératrice  $M_1M$ ;

b. La tangente à la courbe  $M_1$ .

Les deux tangentes sont dans le plan tangent à la sphère en  $M_1$ . Donc le plan tangent à la sphère en  $M_1$  est le plan osculateur au point  $M$  à la courbe  $C$ .

5° Cherchons l'équation du plan tangent à la sphère en  $M_1$ . La sphère est

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2 - r_1^2 = 0.$$

Le plan tangent au point  $(x_1, y_1, z_1)$  est

$$Xx_1 + Yy_1 + (Z - a)(z_1 - a) - r_1^2 = 0,$$

où l'on a

$$x_1 = x + t \frac{dx}{ds},$$

$$y_1 = y + t \frac{dy}{ds},$$

$$z_1 = z + t \frac{dz}{ds}.$$

La distance de ce plan à l'origine est donnée par

$$d^2 = \frac{[-a(z_1 - a) - r_1^2]^2}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2} = \frac{\left(a(z - a) + at \frac{dz}{ds} + r_1^2\right)^2}{r_1^2};$$

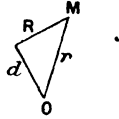
( 414 )

mais on a

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a},$$

donc

$$at \frac{dz}{ds} = t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar \cos \theta = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2a z.$$



Donc

$$d^2 = \frac{(a z - a^2 + r_1^2 + a^2 + r^2 - r_1^2 - 2a z)^2}{r_1^2} = \frac{(r^2 - a z)^2}{r_1^2}.$$

D'après le théorème de Meusnier

$$\begin{aligned} R^2 = r^2 - d^2 &= \frac{r^2 r_1^2 - (r^2 - a z)^2}{r_1^2} \\ &= \frac{(r r_1 + r^2 - a z)(r r_1 - r^2 + a z)}{r_1^2}; \end{aligned}$$

on peut remplacer si l'on veut  $z$  par  $r \cos \theta$ .

6° On a pour la torsion

$$d = T \frac{dR}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{d} \frac{dR}{dz} \frac{dz}{ds}.$$

Tout est connu. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= \frac{r_1}{r^2 - a z}; \\ R &= \frac{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - a z)^2}}{r_1}, \\ \frac{dR}{dz} &= \frac{a(r^2 - a z)}{r_1 \sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - a z)^2}}; \\ \frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} &= \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2a z}}{a}. \end{aligned}$$

( 415 )

Donc

$$\begin{aligned} \frac{I}{T} &= \frac{r_1}{r^2 - az} \frac{a}{r_1} \frac{r^2 - az}{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}}{a} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}}. \end{aligned}$$

On peut remplacer si l'on veut  $z$  par  $r \cos \theta$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer  $\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\cos \theta} d\theta$ .

SOLUTION.

On pose  $\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta$ , et l'on fait  $\sin \theta = x^2$ , il vient

$$\int_0^{x^2} \frac{2x^2 dx}{1 - x^4}.$$

On remarquera que

$$\frac{2x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{1 + x^2},$$

et l'on obtient rapidement

$$\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{\sin \theta}}{1 - \sqrt{\sin \theta}} - \text{arc tang } \sqrt{\sin \theta}.$$

(Juillet 1903.)

### Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$x^4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = (x + a)^2,$$

II. On considère la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et l'ellipsoïde

$$x^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + y^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} + z^2 = R^2,$$

où

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

*On demande de calculer la portion de volume comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde et de la sphère.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de trouver les surfaces S qui coupent orthogonalement toutes les surfaces représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$z = k \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}.$$

*Trouver celles des surfaces S qui contiennent la droite*

$$y = 0, \quad z = \alpha.$$

*Ces dernières surfaces, quand  $\alpha$  varie, forment une surface S; trouver les surfaces  $\Sigma$  qui coupent orthogonalement toutes les surfaces de la famille S.*

(Juillet 1903.)

#### Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnée l'équation*

$$9y(1-2y)^2y'^2 = 2-3y :$$

1° *Déterminer les lieux des points d'inflexion et des points de rebroussement des courbes intégrales ainsi que l'enveloppe de ces courbes.*

2° *Intégrer cette équation et vérifier, à l'aide de l'intégrale générale, les résultats précédemment déduits de l'équation différentielle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'intersection S du cône  $x^2+y^2=z^2$  et du cylindre parallèle à Oz qui a pour trace, sur le plan des xy, la courbe  $r = ke^{\theta}$ . On demande de déterminer, pour un point quelconque M de S' : la tangente, le plan osculateur et sa caractéristique, les rayons de courbure et de torsion, et enfin le rayon de la sphère osculatrice. On cherchera en outre le lieu S<sub>1</sub> de la trace M<sub>1</sub> de la tangente à la courbe S.*

(Juillet 1903.)

**Lyon.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui définit les fonctions homogènes, à  $n$  variables, du degré  $m$  d'homogénéité.

II. Intégrer  $p^2 + q^2 = x + y$ , où  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ .

SOLUTION.

On écrira

$$p^2 - x = -q^2 + y = \alpha = \text{const. arbitr.},$$

d'où

$$p = (x + \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad q = (y - \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

et l'intégrale complète

$$\frac{3}{2}(z + \beta) = (x + \alpha)^{\frac{3}{2}} + (y - \alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

III.  $z$  étant une fonction donnée de  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  et de  $\theta = \text{arc tang } \frac{y}{x}$ , calculer l'expression

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

SOLUTION.

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}.$$

IV. On a la surface

$$z r^2 = f(\theta).$$

Calculer  $f$  de façon qu'en projection sur le plan des  $xy$  les deux lignes asymptotiques, issues d'un point de la surface, se coupent à angle droit. Étudier ces lignes asymptotiques et montrer que la torsion en un point ne dépend que de  $r$ .



( 418 )

SOLUTION.

On a évidemment

$$\Delta z = 0,$$

c'est-à-dire, tenant compte de la solution du problème III et tout calcul fait :

$$0 = \Delta z = r^{-4}(f'' + 4f) \quad \text{et} \quad f'' = -4f,$$
$$f(\theta) = K \cos 2(\theta - \theta_0) \quad (K, \theta_0 = \text{const. arbitr.}).$$

Il suffira, pour l'étude géométrique, de faire  $K = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ ; alors

$$z = \frac{\cos 2\theta}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les lignes asymptotiques sont des cubiques gauches qui se projettent suivant les cercles

$$x^2 + y^2 - 2K(x \pm y) = 0 \quad (K = \text{const. arbitr.}),$$

etc.

(Juillet 1903.)

## CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — On considère la fonction  $pz$  de Weierstrass construite avec les périodes  $2\omega$ ,  $2\omega'$ ; on suppose  $\omega$ ,  $\frac{\omega'}{i}$  réelles.

1° Montrer qu'à deux valeurs imaginaires conjuguées de l'argument  $z$  correspondent deux valeurs imaginaires conjuguées de la fonction.

2° On pose  $Z = pz$ . Lorsque le point  $z$  décrit, dans son plan, une ligne  $c$ , le point  $Z$  décrit, dans son plan, une ligne correspondante  $C$ .

Démontrer que si  $c$  est une parallèle ou une perpendicu-