Nouvelles annales de mathématiques

Paul-J. Suchar

Sur le rayon de courbure d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 397-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__397_1>

[L[1]6b]

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

1. Soit

$$(1)\quad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique.

Nous allons d'abord montrer que le discriminant de la conique peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \Delta = A f_y'^2 - 2B f_x' f_y' + C f_x'^2,$$

où f_x', f_y' sont les demi-dérivées partielles de (1).

En effet, si h est le Hessien de la forme (1) rendue homogène, on aura

$$-\Delta = \frac{h}{2^3} = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f'_{z^2} \end{vmatrix}$$

ou encore, en ayant égard au théorème bien connu sur les fonctions homogènes,

$$-\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xf''_{x^2} & yf''_{xy} & zf''_{xz} \\ xf''_{yx} & yf''_{y^2} & zf''_{yx} \\ xf''_{zx} & yf''_{zy} & zf''_{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{z}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f'_y \end{vmatrix}$$

ou encore

$$-\Delta = \frac{1}{xyz^2}\begin{vmatrix} xf''_{x^2} & xf''_{xy} & xf'_x \\ yf''_{yx} & yf''_{y^2} & yf'_y \\ zf''_{zx} & zf''_{zy} & zf'_z \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}$$

en ayant égard à la relation

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$$

pour les points de la conique. Si donc nous développons ce dernier déterminant et nous faisons $z = 1$, on obtiendra l'expression (2), en remarquant que l'on a

$$f''_{x^2} = A, \qquad f''_{xy} = B, \qquad f''_{y^2} = C.$$

2. On sait que le rayon de courbure, en un point d'une courbe plane, est donné par la formule

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et, d'après (1) et (2), on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\Delta}{f'^3_y};$$

donc, le rayon de courbure en un point d'une conique, exprimé en fonction des coordonnées du point, est de la forme

$$\rho = \frac{1}{\Delta}(f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}}, \tag{3}$$

où f'_x, f'_y sont les demi-dérivées partielles de (1).

3. Cette dernière expression va nous permettre de déterminer un certain nombre d'expressions différentes pour le rayon de courbure, utiles à connaître.

Soit, en effet, α l'angle de la tangente à la conique avec une droite fixe, que l'on prendra pour axe des x. Nous aurons, en ayant égard à (2), la suite des rapports

$$\frac{f_y'^2}{\cos^2\alpha} = -\frac{f_x' f_y'}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{f_x'^2}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{\Delta}{A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha}.$$

Il résulte donc, d'après (3), pour le rayon de courbure à une conique en fonction de l'angle α, l'expression

$$(4) \qquad \rho = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression devra être modifiée s'il s'agit d'une parabole, car alors l'expression entre parenthèses est un carré parfait.

4. L'expression qu'on vient de trouver pour le rayon de courbure n'appartient qu'aux coniques. En d'autres termes, si en chaque point d'une courbe plane le rayon de courbure est de la forme

$$\rho = \frac{K}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

où K, A, B, C sont des constantes et α l'angle de la tangente à la courbe avec une droite fixe, les courbes correspondantes sont des coniques.

En effet, si p est la distance de l'origine des axes à la tangente en un point de la courbe cherchée, le rayon de courbure est donné d'après Euler par la formule

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2}+p=\rho;$$

on aura donc l'équation différentielle des courbes cherchées en coordonnées tangentielles

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2}+p=\frac{K}{(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons $B^2-AC\gtrless 0$, on remarque alors que la fonction

$$p=\frac{K}{AC-B^2}(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

est une solution particulière de l'équation précédente; par conséquent, l'intégrale générale sera

$$\begin{aligned}p&=a\cos\alpha+b\sin\alpha\\&\quad+\frac{K}{AC-B^2}(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

où a et b sont des constantes. Nous remarquons que cette fonction n'est autre chose que la condition qui exprime que la droite

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=p$$

est tangente à la courbe cherchée. Si, au lieu des coordonnées p et α, nous introduisons les coordonnées de droite, comme on a l'habitude en posant

$$\frac{\sin\alpha}{p}=u,\qquad -\frac{\cos\alpha}{p}=v,$$

on aura alors

$$(1+av-bu)^2=\frac{K}{(AC-B^2)^2}(Av^2-2Buv+Cu^2),$$

relation algébrique et du second ordre; donc les courbes cherchées sont des coniques. Si $B^2 - AC = 0$, on raisonnera de la même manière sur l'équation modifiée.

5. Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes sur les rayons de courbure d'une conique.

Théorème I. — *Si dans le plan d'une conique on prend un point et l'on considère la polaire de ce point par rapport à la conique, le rayon de courbure en chaque point est proportionnel au cube de la distance à la polaire et inversement proportionnel au cube de la distance du pôle à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, soient f'_x, f'_y, f'_z les demi-dérivées partielles de la conique (1) rendue homogène. Nous aurons la suite des rapports

$$\frac{f'_x}{\sin\alpha} = -\frac{f'_y}{\cos\alpha} = -\frac{f'_z}{p},$$

où p est supposé lié à α par la relation qui exprime que la droite

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p$$

est tangente à la conique (1); enfin a, b et c les coordonnées homogènes d'un point du plan. Nous aurons, d'après (3),

$$(5) \qquad \rho = \frac{1}{\Delta}\,\frac{(af'_x + bf'_y + cf'_z)^3}{(a\sin\alpha - b\cos\alpha - cp)^3}.$$

L'expression entre parenthèses du numérateur n'est autre chose que le produit de la constante $(f'^2_a + f'^2_b)^{\frac{1}{2}}$ par la distance d'un point de la conique à la polaire donnée, et celle du dénominateur est le produit de c par la distance du point donné des coordonnées a, b, c à la tangente à la conique au point considéré. Nous aurons donc, en désignant par D et d ces distances,

$$(6) \qquad \rho = \frac{(f_a'^2 + f_b'^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3 \Delta} \left(\frac{D}{d}\right)^3,$$

et le théorème est démontré.

Une première conséquence est le théorème suivant :

En chaque point d'un cercle, le rapport $\frac{D}{d}$ *est constant.*

Remarquons encore que si le point (a, b, c) est sur la conique, le coefficient $\frac{(f_a'^2 + f_b'^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta}$ de (6) est, d'après (3), le rayon de courbure en ce point. Il s'ensuit alors comme conséquence le théorème :

En deux points quelconques d'une conique, le rapport des rayons de courbure est égal au rapport des cubes des longueurs des tangentes en ces points.

6. Théorème II. — *En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est inversement proportionnel au cube de la distance de son centre à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, reprenons l'expression du rayon de courbure sous la forme (5) et supposons que le point donné (a, b, c) coïncide avec le centre de la conique, la polaire sera, comme on sait, rejetée à l'infini et le numérateur de cette expression se réduit à

$$(zf_c')^3$$

à cause de la condition $f_a' = 0$, $f_b' = 0$. Si donc nous faisons $z = 1$, nous aurons, en ayant égard à (1),

$$(Da + Eb + Fc)^3;$$

mais cette expression n'est autre chose que Δ^3. On aura donc finalement

$$(7) \qquad \rho = \frac{\Delta^2}{c^3 d^3}$$

et le théorème est démontré. On doit remarquer que la troisième coordonnée c dans ce cas a pour expression la caractéristique $AC - B^2$ de la conique.

7. Ce théorème nous conduit aisément à une construction géométrique du centre de courbure. Supposons la conique rapportée à son centre et à ses axes et soient a et b les demi-axes. On aura alors

$$\Delta = -c,$$

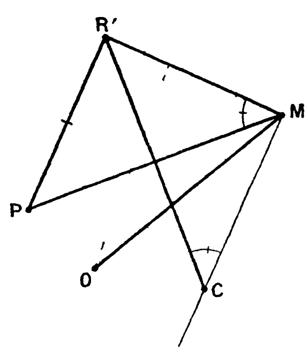
et, par conséquent,

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Nous avons posé p à la place de d.

Soient $OM = r$ (*fig.* 1) le rayon vecteur d'un point

Fig 1



de la conique et r' le demi-diamètre conjugué à la direction OM, enfin φ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur. Le théorème d'Apollonius nous donne

$$rr' \sin\varphi = ab$$

et, comme on a $p = r\sin\varphi$, on aura donc

$$\rho = \frac{r'^2}{p},$$

il résulte de là la construction suivante. Sur la tangente en M on porte $MR' = r'$, on mène la perpendiculaire $R'P = p$, on joint P à M et l'on mène la perpendiculaire R'C à PM, le point de rencontre C avec la normale MC est le centre de courbure. En effet, l'angle en C étant égal à R'MP, le triangle rectangle R'MC nous donne

$$r' = \mathrm{MC}\,\mathrm{tang}(\widehat{\mathrm{R'MP}}) = \mathrm{MC}\,\frac{p}{r'}.$$

8. Une autre conséquence du théorème I est le théorème connu qui s'énonce comme il suit :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur qui joint le point de contact au foyer de la conique.

Supposons, en effet, que le point de coordonnées a, b, c coïncide avec un foyer de la conique (1), la polaire coïncidera alors avec la directrice correspondante. La distance D qui figure dans la formule (6) est, d'après la définition même de la conique, proportionnelle à la distance du point de la conique au foyer correspondant, et la formule (6) nous conduit alors à ce dernier théorème.

9. Supposons que le point donné (a, b, c) est rejeté à l'infini dans la direction $\frac{b}{a}$, la polaire correspondante est alors un diamètre de la conique, et la formule (5) se réduit à

$$\rho = \frac{1}{\Delta} \frac{(af'_x + bf'_y)^3}{(a \sin\alpha - b \cos\alpha)^3}.$$

Il résulte de là le théorème suivant :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est proportionnel au cube de la distance du point à un diamètre donné et inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec la direction conjuguée au diamètre donné.

Ou encore, si le diamètre donné est un axe de la conique, on aura le théorème connu :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est proportionnel au cube de la portion de la normale à la conique, comprise entre son pied et l'axe donné.

Il résulte de ce dernier théorème, comme conséquence, le théorème connu, à savoir :

En chaque point d'une conique, le rapport des portions d'une normale comprises entre son pied et les axes est constant.

10. Il résulte enfin un dernier théorème du théorème I, qu'on peut énoncer comme il suit :

Si, par un point du plan d'une conique, on mène les deux tangentes, le rayon de courbure en chaque point de la conique est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du produit des distances de ce point aux deux tangentes *et inversement proportionnel au cube de la distance du point pris dans le plan à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, l'équation d'une conique bi-tangente à l'ensemble des deux droites,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (dx + ey + f)^2,$$

et la droite

$$dx + ey + f = 0$$

n'est autre chose que la polaire de l'origine par rapport à la conique. On aura donc, d'après le théorème I, en ayant égard aussi à l'équation de la conique

$$\rho = \mathrm{K}\frac{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

où p est la distance de l'origine des axes à la tangente à la conique, ce qui démontre le théorème. Il est à remarquer, ce qui d'ailleurs est évident, que, lors même que les deux tangentes sont imaginaires, le produit des distances à ces droites est réel.

Une conséquence de ce dernier théorème est :

Le rapport du produit des distances d'un point d'un cercle à deux tangentes menées par un point du plan au carré de la distance de ce point à la tangente au cercle au point considéré est constant.

11. Les réciproques de ces théorèmes sont aussi vraies. Nous allons nous borner à démontrer la réciproque des théorèmes I et II.

Nous nous proposons donc de démontrer la proposition suivante :

Si, dans un plan, on se donne un point et une droite et si, en chaque point d'une courbe située dans ce plan, le rayon de courbure est donné par une expression de la forme

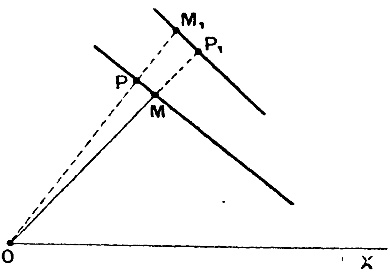
$$\rho = K \frac{D^3}{d^3},$$

où K *est une constante,* D *la distance d'un point de la courbe à la droite donnée et* d *la distance du point donné à la tangente à la courbe au point considéré, la courbe est une conique.*

Nous avons besoin, pour donner la solution, d'établir un théorème sur les polaires réciproques.

Supposons une courbe plane rapportée à un système d'axes polaires (*fig.* 2) et soient r et θ les coordonnées

Fig. 2.



d'un point M, MP la tangente à la courbe, $OP = p$ la distance du point O à la tangente, enfin M_1 le point correspondant de la polaire réciproque par rapport au cercle directeur de centre O et de rayon égal à 1, M_1P_1 perpendiculaire à OM est, comme on sait, la tangente en M_1 à la polaire réciproque; posons encore $OM_1 = r_1$ et $OP_1 = p_1$. La similitude des triangles OMP et OM_1P_1 et le théorème bien connu sur les pôles et polaires d'un cercle nous donnent

$$(8) \qquad pr_1 = p_1 r = 1$$

et

$$(9) \qquad p = r \sin\varphi, \qquad p_1 = r_1 \sin\varphi,$$

où φ est l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, angle qui, d'ailleurs, se conserve. Si ρ est le rayon de courbure au point M et ρ_1 au point M_1, on a le théorème suivant :

Le produit des rayons de courbure en deux points correspondants d'une courbe et de sa polaire réciproque par rapport à un cercle directeur de rayon égal à 1, est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente en un point d'une des courbes avec le rayon vecteur qui joint le point de contact au pôle de la transformation.

En effet, le rayon de courbure en un point d'une courbe plane est donné aussi par la formule

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp};$$

on aura par analogie, pour la polaire réciproque,

$$\rho_1 = \frac{r_1\,dr_1}{dp_1},$$

d'où, en ayant égard à (8) et (9), on trouve

$$(10) \qquad \rho.\rho_1 = \frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

12. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème du n° **11**. Prenons pour origine des axes le point donné et soit

$$ax + by = c$$

la droite donnée. Le rayon de courbure en un point de la courbe cherchée sera donné par

$$\rho = \frac{K}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} \frac{(ax+by-c)^3}{p^3}.$$

Considérons encore la polaire réciproque des courbes cherchées par rapport au cercle de rayon 1 et dont le centre est à l'origine des axes. Le rayon de courbure au point correspondant à x et y sera, d'après (10),

$$\rho_1 = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} \frac{p^3}{\sin^3\varphi(ax+by-c)^3},$$

ou encore, en passant en coordonnées polaires et en ayant égard à (8) et (9),

$$\rho_1 = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} \frac{1}{(a\cos\theta + b\sin\theta - c\rho_1)^3}.$$

Les polaires réciproques étant supposées rapportées aux mêmes axes que les courbes cherchées, si l'on désigne par θ_1 l'angle de la tangente M_1P_1, avec l'axe polaire, cet angle θ_1 est lié à θ par la relation

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta;$$

on aura donc finalement, en posant

$$\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} = K':$$

(11) $$\rho_1 = \frac{K'}{(a\sin\theta_1 - b\cos\theta_1 - c\rho_1)^3};$$

or l'expression entre parenthèses n'est autre chose, à un facteur constant près, que la distance du point dont les coordonnées homogènes sont a, b, c à la tangente en M_1 à la polaire réciproque, de sorte que, si la réciproque du théorème I est vraie, la réciproque du théorème II sera aussi vraie.

Remarquons enfin que l'équation différentielle des polaires réciproques est, d'après Euler,

$$\frac{d^2 p_1}{d\theta_1^2} + p_1 = \frac{K'}{(a \sin\theta_1 - b\cos\theta_1 - cp_1)^3}.$$

Si, dans cette équation, nous faisons le changement de la fonction, en posant

$$cp_1 = cu + a\sin\theta_1 - b\cos\theta_1,$$

l'équation précédente se transforme en la suivante :

$$\frac{d^2 u}{d\theta_1} + u = -\frac{K'}{c^3}\,\frac{1}{u^3},$$

qui est intégrable par des quadratures et nous donne

$$u^2 = A\cos^2\theta_1 + 2B\sin\theta_1\cos\theta_1 + C\sin^2\theta_1,$$

d'où

$$\begin{aligned}(cp_1 - a\sin\theta_1 + b\cos\theta_1)^2 \\ = c^2(A\cos^2\theta_1 + 2B\sin\theta_1\cos\theta_1 + \sin^2\theta_1);\end{aligned}$$

si, dans cette dernière relation, nous remplaçons θ_1 en fonction θ et p_1 par $\frac{1}{r}$, d'après (8), on obtiendra, pour les courbes cherchées, l'équation d'une conique exprimée en coordonnées polaires et, par conséquent, la réciproque du théorème I est vraie.

La polaire réciproque de cette conique étant aussi une conique, la formule (11) et le théorème II nous montrent que les coordonnées homogènes a, b et c qui figurent dans la droite donnée sont les coordonnées du centre de ces coniques, polaires réciproques. Il résulte de là la proposition géométrique suivante :

Les polaires réciproques de toutes les coniques qui ont un point et une droite donnés pour pôle et polaire par rapport à un cercle directeur de rayon 1, *et dont le centre est le point donné, sont des coniques qui ont un même point fixe pour centre.*