Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1903)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 375-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__375_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1903).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites fixes D et D′ non situées dans un même plan, un point fixe A sur D et un point fixe A′ sur D′. Soient (S) une sphère dont le centre est situé sur D et qui passe par A, (S′) une sphère dont le centre est situé sur D′ et qui passe par A′.

1° Montrer qu'il existe deux sphères (S) tangentes à une sphère (S′) supposée donnée.

2° Trouver les lieux géométriques des points de contact des sphères (S) et (S′), lorsqu'elles varient tout en restant tangentes.

3° Soit M le point de contact d'une sphère (S) avec une sphère (S′). Sur la ligne des centres de ces deux sphères on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM' = a$. Trouver le lieu du point M′ lorsque les deux sphères varient.

4° Sur les droites D et D′ on porte, à partir de A et A′, respectivement, deux longueurs égales AP et A′P′. Trouver le lieu du centre de la sphère Σ tangente à D en P et à D′ en P′, lorsque P et P′ décrivent respectivement D et D′.

Mathématiques spéciales.

On considère une droite fixe A et deux droites fixes B et B′ qui rencontrent A mais qui ne sont pas situées dans un même plan.

On sait que si l'on considère une surface du second ordre S qui passe par les trois droites A, B et B′, son centre C est situé dans le plan P parallèle aux deux droites B et B′ et équidistant de ces deux droites.

1° Lorsque le centre C décrit une droite dans le plan P, la surface S passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur B et B′.

2° Lorsque le point C décrit, dans le plan P, une courbe (Γ) de classe m, la surface S enveloppe une surface réglée Σ d'ordre $2m$ et, par chacune des trois droites A, B et B′, il passe m nappes de cette surface Σ.

Montrer que la surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B′ et en restant tangente à un cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.

Tout plan passant par A coupe alors cette surface en dehors de A, suivant une conique; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B′, soit à ces deux plans à la fois?

Nota. — Les candidats devront traiter le problème par la *Géométrie analytique :* il leur sera tenu compte des remarques géométriques.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère, avec les notations de Weierstrass, la fonction

$$x = \frac{C\,\sigma^3 u}{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u+a+b)},$$

où C est une constante et où a et b sont les affixes de deux points situés dans le parallélogramme des périodes

$$O, \quad 2\omega, \quad 2\omega', \quad 2\omega + 2\omega'$$

ou sur les côtés de ce parallélogramme issus du point d'affixe O.

1° Décomposer cette fonction en éléments simples et examiner les différents cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs de a et b, en laissant de côté les déterminations de a et b pour lesquelles le dénominateur de x s'annulerait en même temps que u.

2° Exprimer, dans chacun de ces cas, la fonction x en fonction rationnelle de pu et de $p'u$.

3° On suppose que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont des quantités réelles et positives, et l'on considère en particulier la fonction

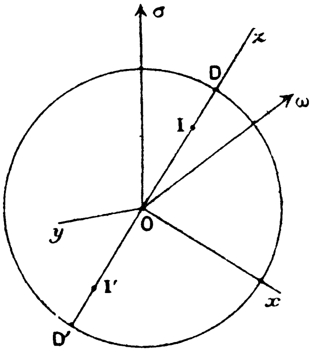
$$x = \frac{\sigma\omega.\sigma\omega'.\sigma(\omega + \omega')\sigma^3 u}{\sigma(u - \omega)\sigma(u - \omega')\sigma(u + \omega + \omega')};$$

on désigne de plus par y la dérivée de cette fonction par rapport à u. Trouver la relation algébrique qui existe entre x et y, construire la courbe représentée par cette équation, et indiquer dans quels intervalles varie u lorsque le point (x, y) décrit les différentes branches de cette courbe. Quels sont les points multiples de cette courbe?

Mécanique rationnelle.

Une sphère solide homogène de masse m et de rayon a est mobile autour de son centre O supposé fixe. Dans la sphère est creusé un canal rectiligne, de section infiniment petite, suivant un diamètre DD'; deux insectes ayant chacun la même masse m que la sphère se trouvent dans ce canal en deux points I et I' symétriques par rapport au centre O. A l'instant initial $t = 0$, la sphère est animée d'une rotation ω_0 autour d'un axe instantané donné et, à partir de cet instant, les insectes marchent dans le canal, suivant une loi donnée, en prenant appui sur ses parois et restant toujours symétriques par rapport au centre O. Trouver le mouvement du système, en réduisant les insectes à des points matériels.

On prendra, comme axes liés à la sphère, un axe Oz dirigé suivant le diamètre DD′ et deux autres diamètres Ox et Oy formant avec Oz un trièdre trirectangle; on appellera p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω de la sphère suivant les axes $Oxyz$; enfin, on désignera par z et $-z$ les



cotes des deux insectes, en supposant que z est une fonction donnée du temps $z = f(t)$.

On traitera, en particulier, les questions suivantes :

1° Soit $O\sigma$ le moment résultant des quantités de mouvement de tous les points du système par rapport au point O; étudier le mouvement du point σ dans l'espace absolu et par rapport aux axes $Oxyz$.

2° Montrer que p, q, r peuvent être exprimés en fonction de t par des quadratures.

3° Exprimer ensuite en fonction de t les angles d'Euler θ, φ, ψ, en choisissant convenablement les axes fixes.

4° Étudier, en particulier, le cas où l'axe de la rotation instantanée initiale de la sphère est dans le plan xOy.

5° Achever les calculs en supposant la rotation initiale quelconque, mais en imaginant que la loi du mouvement des insectes soit

$$z = ae^{-kt},$$

où k est une constante positive.

Quel est, dans cette hypothèse, le mouvement limite vers lequel tend le mouvement du système?