NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1902). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 31-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__31_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1902). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

Étant donnée la surface du second ordre S *qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

on considère les deux coniques C *et* C′ *d'intersection de cette surface par les plans* xOy *et* xOz, *et une droite* D *située dans le plan* yOz *et passant par l'origine des coordonnées.*

1° *Trouver l'équation de tout plan* P *tel que, si* M *est l'un de ses points d'intersection avec la conique* C, M′ *l'un de ses points d'intersection avec la conique* C′, *et* N *son point d'intersection avec la droite* D, *les trois points* M, M′, N *soient en ligne droite.*

2° *Trouver l'enveloppe des plans* P.

3° *Trouver le lieu* Σ *des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe* A *de l'espace sur les plans* P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, *passant par* A, *qui coupent cette surface* Σ *suivant deux cercles.*

Trouver l'enveloppe de ces plans Q *et le lieu de la corde commune aux deux cercles.*

4° *Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre* S *est un paraboloïde?*

I. Les équations de la droite D étant

$$x = 0, \qquad y - mz = 0,$$

considérons le plan défini par la droite D et la droite MM'N ou Δ ; l'équation de ce plan est de la forme

$$y - mz - \alpha x = 0.$$

Les équations de la conique C sont

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2x = 0.$$

Le plan (D, Δ) coupe cette conique C au point O et au point M dont les coordonnées x_1, y_1 se déduisent des équations précédentes

$$x_1 = \frac{2ab}{b + a\alpha^2}, \qquad y_1 = \frac{2ab\alpha}{b + a\alpha^2}.$$

Les équations de la conique C' étant

$$x = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

les coordonnées x_2, z_2 du point M' seront

$$x_2 = \frac{2acm^2}{cm^2 + a\alpha^2}, \qquad z_2 = \frac{-2acm\alpha}{cm^2 + a\alpha^2}.$$

Si

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P, en exprimant que les points M et M' sont dans ce plan, on a les deux conditions

$$(1) \qquad 2abu \quad + 2ab\alpha v \quad + b \quad + a\alpha^2 = 0,$$

$$(2) \qquad 2acm^2 u - 3acm\alpha w + cm^2 + a\alpha^2 = 0.$$

En tirant de ces équations v et w, l'équation d'un plan P s'écrit

$$ux - \frac{2abu + b + a\alpha^2}{2ab\alpha} y + \frac{2acm^2 u + cm^2 + a\alpha^2}{2acm\alpha} z + 1 = 0$$

ou

$$2abcm\alpha ux - cm(2abu + b + a\alpha^2)y$$
$$+ b(2acm^2 u + cm^2 + a\alpha^2)z + 2abcm\alpha = 0$$

ou encore

$$(3) \quad \begin{cases} 2abcmu(\alpha x - y + mz) \\ \quad - cm(b + a\alpha^2)y + b(cm^2 + a\alpha^2)z + 2abcm\alpha = 0. \end{cases}$$

Elle renferme deux paramètres u et α.

II. Cherchons d'abord l'enveloppe des plans P en coordonnées ponctuelles. Il suffit d'éliminer u et α entre l'équation (3) et ses dérivées par rapport à u et α, savoir

$$(3)' \qquad \alpha x - y + mz = 0.$$

$$(3)'' \qquad 2abcmux - 2acm\alpha y - 2ab\alpha z + 2abcm = 0,$$

En tenant compte de $(3)'$ l'équation (3) ne renfermera plus le paramètre u; elle devient

$$a\alpha^2(bz - cmy) + 2abcm\alpha + bcm(mz - y) = 0.$$

Remplaçant dans cette équation α par sa valeur tirée de l'équation $(3)'$, on obtient l'enveloppe demandée

$$\frac{a}{x^2}(y-mz)^2(bz-cmy)$$
$$+2abcm\frac{(y-mz)}{x}+bcm(mz-y)=0,$$

qui se décompose dans le plan

$$y-mz=0,$$

c'est-à-dire le plan xOD qui contient l'infinité des droites Δ qui passent par le deuxième point commun O' aux coniques C et C', et l'hyperboloïde H

$$a(y-mz)(bz-cmy)+2abcmx-bcmx^2=0$$

ou

$$(4)\qquad a(y-mz)(cmy-bz)+bcmx(x-2a)=0.$$

On voit les deux systèmes de génératrices de cet hyperboloïde; il passe par les coniques C, C' et la droite D; c'est donc l'hyperboloïde engendré par les droites Δ s'appuyant sur les coniques C, C' et la droite D. D'ailleurs on pouvait remarquer tout d'abord que les droites $MM'N$ ou Δ engendraient un hyperboloïde H, et que tout plan P passant par Δ était tangent à H; de là un autre procédé de calcul pour résoudre les deux premières parties de la question : on considère le faisceau des quadriques passant par les coniques C et C'; il a pour équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-2x+\lambda yz=0,$$

et l'on prend λ de façon que cette équation représente une quadrique passant par la droite D; on obtient ainsi l'hyperboloïde (4). Le système des génératrices Δ est représenté par les équations

$$y - mz = \alpha x$$
$$a\alpha(cmy - bz) = bcm(2a - x)$$

et tout plan P, passant par Δ, a une équation de la forme

$$\beta(\alpha x - y + mz) + a\alpha(cmy - bz) - bcm(2a - x) = 0$$

renfermant deux paramètres α et β.

Pour trouver l'équation de l'enveloppe du plan P en coordonnées tangentielles, il suffit d'éliminer α entre les équations (1) et (2); pour cela, éliminons successivement $a\alpha^2$ et u entre ces équations; on obtient

$$(1)' \qquad (b - cm^2)(2au + 1) + 2a\alpha(bv + cmw) = 0$$

et

$$-2abcm^2\alpha v - 2abcm\alpha w + a\alpha^2(b - cm^2) = 0$$

ou

$$(2)' \qquad -2bcm(mv + w) + \alpha(b - cm^2) = 0.$$

L'élimination de α entre (1)' et (2)' donne l'équation cherchée

$$(4)' \quad 4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - mc^2)^2(2au + 1) = 0.$$

III. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan P dont les coordonnées homogènes sont u, v, w, h. On trouvera l'équation ponctuelle du lieu Σ des pieds E des perpendiculaires issues de A aux plans P en éliminant u, v, w, h entre les équations

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$$
$$= \frac{z - z_0}{w} = \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)}{-h},$$

$$4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - cm^2)^2(2auh + h^2) = 0.$$

Pour cela on remplace dans la dernière équation u, v, w, h par des quantités proportionnelles $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)$ et l'on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &4abcm\,[m(y-y_0)+z-z_0]\,[b(y-y_0)+cm(z-z_0)]\\ &\quad+(b-cm^2)^2\,[x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]\\ &\quad\times[2a(x-x_0)+x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette surface Σ est du quatrième ordre, bicirculaire; elle admet A pour point double : c'est aussi une surface anallagmatique. Ces résultats sont connus, car la surface Σ étant la podaire de l'hyperboloïde H est aussi l'inverse de la quadrique polaire réciproque de H par rapport à une sphère de centre A. Le cône des tangentes au point double A est le cône supplémentaire du cône circonscrit à H de sommet A.

Il existe une infinité de plans Q, passant par A, et coupant la surface Σ suivant deux cercles. Pour le voir, considérons les plans P passant par une droite Δ; pour ces plans, le lieu de E est un cercle de centre ω, de diamètre AB, en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ. En considérant la génératrice Δ' de l'hyperboloïde H parallèle à Δ, on a, dans le même plan Q, un cercle de centre ω' de diamètre AB', le point B' étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ'. Donc tout plan Q qui passe par A et qui est perpendiculaire à une génératrice Δ ou Δ' de H coupe Σ suivant deux cercles.

Une génératrice Δ de H étant parallèle à une génératrice du cône asymptote Γ de H, les plans Q perpendiculaires aux génératrices du cône Γ envelopperont le cône Γ' supplémentaire de Γ et de sommet A.

La corde commune AA' aux deux cercles ω et ω' situés dans un plan Q est perpendiculaire à la ligne des centres $\omega\omega'$ et par suite à la droite BB' parallèle à $\omega\omega'$; mais les deux plans BAB' ou Q et (Δ, Δ') étant perpendiculaires, comme AA' est perpendiculaire à leur intersection BB', AA' est aussi perpendiculaire au plan (Δ, Δ') qui est tangent au cône asymptote Γ de H; donc le lieu de AA' est le cône Γ' supplémentaire de Γ, de sommet A, enveloppé par les plans Q; de plus, un plan Q touche le cône Γ' le long de la corde AA' située dans ce plan Q.

IV. Dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde S_1 représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

il suffit de supposer $\frac{1}{a} = 0$, ou $a = \infty$, et de voir ce que deviennent les équations trouvées dans le cas précédent. L'équation (3) du plan P devient

$$(P) \quad 2bcmu(\alpha x - y + mz) - cm\alpha^2 y + b\alpha^2 z + 2bcm\alpha = 0.$$

L'enveloppe de ce plan est le paraboloïde hyperbolique η ayant pour équation en coordonnées ponctuelles

$$(\eta) \qquad (y - mz)(cmy - bz) - 2bcmx = 0,$$

et en coordonnées tangentielles

$$(\eta)' \quad 2bcm(mv + w)(bv + cmv) + (b - cm^2)^2 uh = 0.$$

La surface podaire Σ_1 de ce paraboloïde relative au point A est du troisième ordre; c'est un cyclide cubique ayant pour équation

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2bcm[m(y - y_0) + z - z_0][b(y - y_0) + cm(z - z_0)] \\ \quad + (b - cm^2)^2(x - x_0)[x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] = 0. \end{cases}$$

Le cône asymptote de l'hyperboloïde H est remplacé par l'ensemble des plans directeurs ϖ_1 et ϖ_2 du paraboloïde η. Les plans Q deviennent des plans passant par A et perpendiculaires à l'un ou l'autre des plans directeurs de η. Un plan Q, perpendiculaire à un plan directeur, coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite, issue de A, perpendiculaire à ce plan directeur.

En effet, une droite MM'N ou Δ reste parallèle au plan directeur ϖ_1 ayant pour équation

$$cmy - bz = 0.$$

Considérons, comme précédemment, les plans P passant par Δ; le lieu des pieds E des perpendiculaires issues de A à ces plans P est le cercle de centre ω, de diamètre AB, en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ; le plan Q est perpendiculaire au plan ϖ_1 parallèle à Δ et il contient la perpendiculaire AA' à ϖ_1; cette perpendiculaire AA' appartient à Σ_1 comme on le voit en supposant que la droite Δ s'éloigne à l'infini; le diamètre AB du cercle ω devient infini et ce cercle devient la droite AA'.

Si l'on considère ensuite les génératrices Δ' du paraboloïde η parallèles au plan directeur ϖ_2 ($y - mz = 0$), on voit, de la même manière, qu'un plan Q perpendiculaire à ϖ_2 coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite AA'', issue de A et perpendiculaire à ϖ_2.

Enfin l'enveloppe des plans Q qui passent par les droites AA' ou AA'' se compose de ces deux droites; on peut dire aussi que ces droites remplacent les cordes communes aux cercles ω et ω' du cas précédent.

On peut ajouter que l'existence de ces plans Q et leurs propriétés se voient sur l'équation (Σ_1).