Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 284-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__284_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1829.

(1899, p. 335.)

On donne une conique (S) *et un triangle* ABC *conjugué par rapport à cette conique.*

Soient m *un point de la courbe et* (ε) *une conique tangente à* (S) *au point* m *et circonscrite à* ABC; *on demande le lieu du point d'intersection de la tangente commune au point* m *avec la seconde corde commune aux courbes* (S) *et* (ε).

Résoudre la même question en supposant que la conique (S) *est inscrite dans le triangle* ABC.

(E. Genty.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

1° Prenons ABC pour triangle de référence; l'équation de (S) est

$$l^2x^2 + m^2y^2 = n^2z^2.$$

Un point m de cette courbe peut être défini par le paramètre φ et les relations

$$lx = ny\cos\varphi, \qquad my = nz\sin\varphi;$$

la tangente en m est

$$lx\cos\varphi - my\sin\varphi = xz. \tag{1}$$

Une conique (ε) aura pour équation

$$l^2x^2 + m^2y^2 - n^2z^2$$
$$+ (lx\cos\varphi + my\sin\varphi - xz)(Ax + By + Cz) = 0.$$

Exprimant que cette courbe est circonscrite à ABC, on trouve

$$A = -\frac{l}{\cos\varphi}, \qquad B = -\frac{m}{\sin\varphi}, \qquad C = -n,$$

en sorte que la seconde sécante commune à (S) et (ε) est

$$(2)\qquad \frac{lx}{\cos\varphi}+\frac{my}{\sin\varphi}+nz=0.$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donnera le lieu cherché. De (1) et (2) on tire

$$\begin{aligned}\frac{lx}{-\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)}&=\frac{my}{\sin\varphi(1+\cos^2\varphi)}\\&=\frac{nz}{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}\\&=\frac{-lx+my}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi)}\\&=\frac{lx+my}{\sin\varphi-\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$(3)\qquad \sin\varphi+\cos\varphi=\mathrm{M}(1-\sin\varphi\cos\varphi),$$

$$(4)\qquad \sin\varphi-\cos\varphi=\mathrm{N}(1+\sin\varphi\cos\varphi),$$

en posant

$$\mathrm{M}=\frac{nz}{lx+my},\qquad \mathrm{N}=\frac{nz}{-lx+my}.$$

En élevant (3) et (4) au carré et posant, pour abréger, $\sin 2\varphi=u$, on a

$$\frac{\mathrm{M}^2u^2}{4}-(\mathrm{M}^2+1)u+\mathrm{M}^2-1=0,$$

$$\frac{\mathrm{N}^2u^2}{4}+(\mathrm{N}^2+1)u+\mathrm{N}^2-1=0.$$

L'élimination de u entre ces deux équations donne, après simplifications,

$$8(1-\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2)(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+2\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2)-(\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)^2=0$$

ou

$$\begin{aligned}-16\mathrm{M}^4\mathrm{N}^4-8\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)&\\-\mathrm{M}^4-\mathrm{N}^4+18\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2+8(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)&=0.\end{aligned}$$

En remplaçant M et N par leurs valeurs, on trouve une équation qui se met aisément sous la forme symétrique suivante :

$$(l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2)(-l^2x^2+m^2y^2-n^2z^2)$$
$$\times(-l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2)-l^2m^2n^2x^2y^2z^2=0.$$

Courbe du sixième degré.

2° Soit

$$p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2-2qryz-2rpzx-2pqxy=0$$

la conique (S) inscrite dans ABC. Un point de cette courbe peut être défini à l'aide du paramètre θ et des deux équations

$$px=rz\cos^4\theta, \qquad qy=rz\sin^4\theta;$$

la tangente est

$$(5) \qquad px\sin^2\theta+qy\cos^2\theta-rz\sin^2\theta\cos^2\theta=0,$$

en sorte que la conique (ε) est

$$p^2x^2+q^2y^2+\ldots-2pqxy$$
$$+(px\sin^2\theta+qy\cos^2\theta-rz\sin^2\theta\cos^2\theta)(Ax+By+Cz)=0.$$

Écrivant que les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2 sont nuls, on trouve les valeurs de A, B, C, et la corde commune a pour équation

$$(6) \qquad -\frac{px}{\sin^2\theta}-\frac{qy}{\cos^2\theta}+\frac{rz}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=0.$$

L'élimination de θ entre (5) et (6) donnera le lieu dont les coordonnées sont d'ailleurs exprimables, comme celles du lieu précédent, en fonctions rationnelles d'un paramètre. De (5) et (6) on tire

$$\frac{-px}{\cos^4\theta(1+\sin^2\theta)}$$
$$=\frac{qy}{\sin^4\theta(1+\cos^2\theta)}$$
$$=\frac{rz}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{qy+px}{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)}=\frac{qp-pz}{1-\sin^2\theta\cos^2\theta};$$

d'où

$$1 + \sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{qy + px}{rz},$$

$$\sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{px + qy - rz}{rz}$$

et

$$(7) \qquad \sin^2 2\theta = \frac{4(px + qy - rz)}{rz}.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\frac{rz}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{-px + qy}{1 - \sin^2\theta \cos^2\theta} = \frac{rz(-px + qy)}{2rz - px - qy};$$

d'où

$$(8) \qquad \cos^2 2\theta = \frac{(-px - qy + 2rz)^2}{(px - qy)^2}.$$

De (7) et (8) on tire

$$\frac{(px + qy - 2rz)^2}{(px - qy)^2} + \frac{4(px + qy - rz)}{rz} = 1.$$

C'est l'équation du lieu; on voit que c'est une cubique; son équation se met aisément sous la forme

$$(px - qy + rz)(px + qy - rz) \times (px - qy - rz) + pqrxyz = 0.$$

La courbe est tangente aux côtés du triangle.

1964.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe déterminée par l'intersection de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \textit{et de} \qquad \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

(G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. C. Alasia.

Pour abréger nous poserons

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=p, \qquad \frac{b^2}{a^2+b^2}=q, \qquad \frac{r^2}{b^2+r^2}=u.$$

On a, alors

$$x=[(r^2-a^2)q\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}},$$
$$y=[(r^2-a^2)\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}},$$
$$z=a\left[\left(q+\frac{r^2}{a^2+b^2}\right)\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\frac{dx^2}{d\varphi^2}=(r^2-a^2)q\cos^2\varphi,$$
$$\frac{dy^2}{d\varphi^2}=(r^2-a^2)\sin^2\varphi,$$
$$\frac{dz^2}{d\varphi^2}=p\frac{(r^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2+b^2)\cos^2\varphi+(b^2+r^2)\sin^2\varphi}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\frac{b^2+r^2\sin^2\varphi}{(a^2+b^2)+(r^2-a^2)\sin^2\varphi}}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{b^2}{b^2+r^2}\operatorname{tang}^2\omega,$$

et l'intégration nous donnera

$$(1)\qquad s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{r^2-a^2}{b^2+r^2}}\int\frac{d\omega}{1-u\sin^2\omega}(1-p\sin^2\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

En posant $u=e^2$ et $p=\sin^2\eta$, cette intégrale se réduit à la forme la plus simple de l'intégrale elliptique à paramètre circulaire.