Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 281-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__281_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un plan mobile* P *passe par un axe vertical fixe* Ox *et tourne autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante* ω. *Une barre pesante* AB *de longueur* $2a$ *et de masse* M *est assujettie à rester dans le plan* P, *sur lequel elle peut glisser sans frottement; en outre le centre* C *de la barre est rattaché à un point fixe* O *de l'axe par un fil inextensible et sans masse, de longueur* l.

Trouver le mouvement relatif de la barre par rapport au plan P.

On prendra comme axes, dans le plan P, *l'axe fixe* Ox *suivant la verticale descendante et un axe perpendiculaire* Oy.

On appellera θ *l'angle du fil* OC *avec* Ox *et* φ *l'angle de la barre* AB *avec* Ox.

On supposera qu'à l'instant initial $t = 0$, θ *et* φ *partent de valeurs données* θ_0 *et* φ_0, *et que le système parte du repos relatif.*

On cherchera en particulier les positions d'équilibre relatif du système.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La Terre est regardée comme une sphère homogène fixe, dont une circonférence de grand cercle a une longueur de* $40\,000\,000^{\text{m}}$ *et dont l'attraction sur un point de masse* m *et situé sur sa surface est* mg, g *étant exprimé par le nombre* 9,8, *quand on prend comme* *unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde.*

Calculer, d'après la loi de l'attraction universelle, la vitesse avec laquelle arriverait à la surface de la Terre un point matériel pesant abandonné sans vitesse :

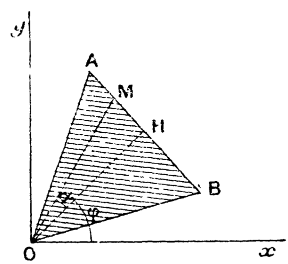
1° *A une distance du centre de la Terre égale à deux rayons terrestres;*

2° *A une distance du centre de la Terre égale à soixante rayons terrestres.*

Que deviendrait la vitesse d'arrivée, si la distance de la position initiale au centre augmentait indéfiniment?

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un triangle équilatéral matériel* OAB *pouvant glisser sur un plan horizontal fixe* xOy *est assu-*

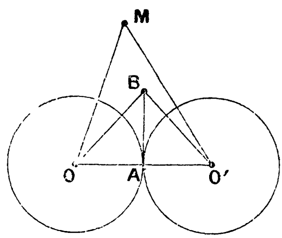


jetti à tourner autour de son sommet O *qui est fixe. Un point matériel* M *de masse* 1 *est assujetti à glisser sur le côté* AB *et est attaché au sommet* O *par un fil élastique et sans masse* OM *dont la longueur à l'état naturel (quand il n'est pas allongé) est égale à la hauteur* $OH = a$ *du triangle. On admet que la tension de ce fil est proportionnelle à son allongement à partir de l'état naturel* a, *de telle sorte que, quand le fil a une longueur* $OM = r$, *sa tension a pour expression* $2k(r-a)$, k *désignant une constante positive.*

Trouver le mouvement du système, en supposant les liaisons réalisées sans frottements.

NOTATIONS ET CONDITIONS INITIALES. — *On appellera* r *la distance* OM, α *l'angle* HOM; φ *l'angle* xOH, I *le moment* *d'inertie du triangle par rapport au point* O, *et l'on remarquera que* $\cos\alpha = \frac{a}{r}$. *On prendra comme paramètres indépendants r et φ et l'on admettra qu'à l'instant initial le système part du repos, le mobile* M *étant en* A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En employant le système d'unités C. G. S., on considère deux sphères matérielles, homogènes identiques, tangentes entre elles au point* A, *ayant*



pour rayon commun 1^{cm} *et possédant une densité* ρ *telle que l'attraction newtonienne de chacune d'elles sur un point de masse* 1 *placé sur sa surface soit égale à une dyne.*

1° *Calculer l'attraction newtonienne de l'ensemble des deux sphères, d'abord sur un point de masse* 1 *placé en* B *à égale distance des centres* O *et* O′ *des deux sphères,*

$$OB = O'B = \frac{4}{3};$$

puis sur un point de masse 1 *placé au centre* O *d'une des sphères;*

2° *En appelant r et r′ les distances d'un point quelconque* M *aux centres* O *et* O′ *des deux sphères, former l'équation des surfaces de niveau d'abord à l'extérieur des deux sphères, puis dans l'intérieur de l'une d'elles.*

Étudier en particulier celle des surfaces de niveau qui passe par le point B. (Octobre 1902.)