NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur la transformation des fonctions d'une variable

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 253-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__253_1>

[D]

SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE;

PAR M. E. IAGGI.

PREMIER MÉMOIRE.

Le problème de transformation qui fait l'objet de ce Mémoire est le suivant :

Étant données deux fonctions quelconques $F(x)$ *et* $\Phi(x)$, *existe-t-il des* SUBSTITUTIONS DE TRANSFORMATION $t(x)$ *et* $\tau(x)$ *telles que l'on ait identiquement*

$$F(t) = \Phi(x), \qquad \Phi(\tau) = F(x) \tag{1}$$

et, dans le cas où il en existe, quelles sont les propriétés des fonctions t et τ, et enfin comment peut-on déterminer F *et* Φ *lorsqu'on se donne les fonctions t et τ?*

On voit que ce problème général comprend comme cas particulier le problème de la périodicité générale des fonctions que nous avons étudié précédemment, puisqu'il suffit de supposer que F et Φ sont identiques pour que t et τ soient des substitutions laissant F invariable.

1. Supposons tout d'abord que F et Φ soient des fonctions complètes uniformes; alors les équations (1) déterminent des fonctions t et τ qui, décomposées en fonctions uniformes (partielles ou complètes), sont solutions simples de ces équations, sauf peut-être en des points x particuliers qui sont les points multiples des groupes de transformation composés l'un des fonctions t, l'autre des fonctions τ; on le démontre facilement de la même manière que nous avons démontré que toute fonction complète uniforme F admet des substitutions la laissant invariable, qui sont racines simples de l'équation $F(s) = F(x)$ sauf aux points multiples du groupe.

Au contraire, si F et Φ sont des fonctions complètes multiformes se décomposant respectivement en dehors de leurs multiplicités en fonctions partielles uniformes f_1, f_2, ..., φ_1, φ_2, ..., les équations (1) se décomposent, chacune, en une série d'équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} f_1(t) = \varphi_{\alpha_1}(x), & \varphi_1(\tau) = f_{\beta_1}(x), \\ f_2(t) = \varphi_{\alpha_2}(x), & \varphi_2(\tau) = f_{\beta_2}(x), \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... sont les indices 1, 2, ..., dans un certain ordre; et l'on voit que F et Φ devraient satisfaire à certaines conditions pour qu'existent simultanément toutes les équations $f_n(t) = \varphi_{\alpha_n}(x)$ ou toutes les équations $\varphi_n(\tau) = f_{\beta_n}(x)$. Ce n'est donc que dans des cas exceptionnels que deux fonctions multiformes F et Φ peuvent être transformées l'une en l'autre par des substitutions s ou τ; mais il en existe évidemment de telles, car si $F = \chi(f)$, et $\Phi = \chi(\varphi)$ où χ est une fonction complète multiforme et f et φ des fonctions complètes uniformes, les fonctions F et Φ admettent évidemment les substitutions de transformation de f et de φ; c'est le cas où, dans les équations (2),

$$\alpha_n = \beta_n = n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les fonctions partielles f_n et φ_n étant obtenues par une *même* fonction partielle, partie de χ.

Nous considérerons donc particulièrement le cas de deux fonctions complètes uniformes quelconques F et Φ qui, toujours, ont des substitutions les transformant l'une en l'autre.

Nous désignerons, dans tous les cas, par *groupe* (F Φ) *de transformation* l'ensemble de toutes les fonctions t, racines de la première équation (1), qui transforment F en Φ; par *groupe* (Φ F) *de transformation* l'ensemble de toutes les fonctions τ, racines de la seconde équation (1), qui transforment Φ en F.

Nous désignerons aussi par *groupe* (F) le groupe des substitutions s qui laissent F invariable et sont les racines de l'équation

$$F(s) = F(x); \tag{3}$$

et par *groupe* (Φ) le groupe de substitutions σ qui laissent Φ invariable et sont les racines de l'équation

$$\Phi(\sigma) = \Phi(x). \tag{4}$$

Les groupes de transformation (FΦ) et (ΦF) jouissent de propriétés générales simples que nous démontrerons dans ce qui suit.

2. De ce que les équations (1) sont symétriques l'une de l'autre on déduit que les *substitutions* τ *du groupe* (ΦF) *sont les inverses des substitutions* t *du groupe* (FΦ); on le vérifie facilement en substituant à x l'inverse t_{-n} de t_n dans l'équation

$$F\big(t_n(x)\big) = \Phi(x);$$

on a ainsi en supposant $t_n\big(t_{-n}(x)\big) = x$ (¹) :

$$F(x) = \Phi\big(t_{-n}(x)\big),$$

ce qui prouve que t_{-n} est l'une des fonctions τ du groupe (ΦF); il en résulte immédiatement que, sauf dans des cas particuliers que nous étudierons plus tard, le même groupe de transformation, (FΦ) par exemple, ne contient pas généralement l'inverse d'aucune de ses substitutions, c'est-à-dire n'a pas d'élément *commun* avec le deuxième groupe (ΦF).

Si dans la première équation (1) on fait une substitution τ quelconque de (ΦF), on obtient

$$F\Big(t\big(\tau(x)\big)\Big) = \Phi\big(\tau(x)\big) = F(x). \tag{5}$$

Donc, $t\big(\tau(x)\big)$ est, ou x, ou une substitution s du groupe (F); en faisant dans la seconde équation (1) une substitution t quelconque de (FΦ), on verrait de même

(¹) Nous rappelons que si t_{-n} est multiforme et t_n uniforme, on a nécessairement $t_n(t_{-n}) = x$ quelle que soit la fonction partielle t_n choisie, mais il n'en est pas de même pour $t_{-n}(t_n)$ qui n'est égal à x que pour une fonction partielle t_{-n} convenablement choisie, et, en général, a pour valeurs toutes les substitutions x, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... de la fonction uniforme $t_n(x)$.

que $\tau(t(x))$ est, ou x, ou une substitution σ du groupe Φ, c'est-à-dire que :

I. *Les substitutions t de* $(F\Phi)$ *transforment le groupe de transformation* (ΦF) *en le groupe* (F) *des substitutions d'invariabilité de* $F(x)$ *et les substitutions* τ *du groupe de transformation* (ΦF) *transforment le groupe de transformation* $(F\Phi)$ *en le groupe* (Φ) *de substitutions d'invariabilité de* $\Phi(x)$.

Si dans la première équation (1) on fait une substitution σ du groupe (Φ) de $\Phi(x)$, on a

$$F\Big(t\big(\sigma(x)\big)\Big) = \Phi\big(\sigma(x)\big) = \Phi(x). \tag{6}$$

Donc $t(\sigma(x))$ est encore une substitution t du groupe de transformation $(F\Phi)$; on voit de même, en faisant une substitution s du groupe (F) dans la seconde équation (1)

$$\Phi\Big(\tau\big(s(x)\big)\Big) = F\big(s(x)\big) = F(x), \tag{6'}$$

que $\tau(s(x))$ est encore une substitution τ du groupe (ΦF); c'est-à-dire que :

II. *Les substitutions s du groupe* (F) *de* $F(x)$ *ne font que permuter les éléments du groupe de transformation* (ΦF) *et les substitutions* σ *du groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *ne font que permuter les éléments du groupe de transformation* $(F\Phi)$.

Si dans l'équation (3) on fait une substitution t quelconque du groupe $(F\Phi)$, on a

$$F\Big(s\big(t(x)\big)\Big) = F\big(t(x)\big) = \Phi(x); \tag{7}$$

$s(t(x))$ est donc encore une substitution t du groupe de transformation $(F\Phi)$; et, de même, si dans l'équation (4) on fait une substitution τ quelconque du groupe (ΦF), l'équation

$$\Phi\Big(\sigma\big(\tau(x)\big)\Big) = \Phi\big(\tau(x)\big) = F(x) \tag{7'}$$

montre que $\sigma\big(\tau(x)\big)$ est encore une substitution τ de (ΦF); c'est-à-dire que :

III. *Le groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *est transformé en le groupe de transformation* (ΦF) *par les substitutions du groupe* (ΦF) *lui-même et le groupe* (F) *de* $F(x)$ *est transformé en le groupe de transformation* $(F\Phi)$ *par les substitutions du groupe* $(F\Phi)$ *lui-même.*

Les théorèmes I, II, III expriment les propriétés corrélatives les plus générales des quatre groupes (F), (Φ), $(F\Phi)$, (ΦF); à ces propriétés nous ajouterons les suivantes qui sont relatives aux points multiples des groupes $(F\Phi)$, (ΦF), c'est-à-dire aux points x où quelques substitutions t, ou τ, s'égalent.

3. Si l'on désigne par F_{-1}, Φ_{-1} les fonctions *inverses* des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, les quatre groupes considérés peuvent être représentés par les égalités

$$(8)\left\{\begin{array}{ll}(F) & F_{-1}\big(F(x)\big) = x, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \\ (\Phi) & \Phi_{-1}\big(\Phi(x)\big) = x, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots,\end{array}\right.$$

$$(9)\left\{\begin{array}{ll}(F\Phi) & F_{-1}\big(\Phi(x)\big) = t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \\ (\Phi F) & \Phi_{-1}\big(F(x)\big) = \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots.\end{array}\right.$$

Les points multiples de (F), où quelques-unes des s s'égalent, sont les points $a, a', a'', \ldots,$ pour lesquels $F(x)$ prend des valeurs $b, b', \ldots$ qui sont les points multiples de la fonction complète multiforme $F_{-1}(x)$, ou si l'on veut les points critiques des fonctions partielles uniformes en lesquelles $F_{-1}(x)$ se décompose; or, dire que deux au moins des substitutions t s'égalent, c'est dire que deux fonctions partielles composant la fonction complète multiforme $F_{-1}(\Phi(x))$ s'égalent : il est donc nécessaire et suffisant pour cela que $\Phi(x)$ soit égale à l'une des valeurs b indiquées plus haut, qui sont déterminées par les points multiples a du groupe (F) sous la forme

$$b = F(\alpha);$$

puisqu'on doit avoir

$$\Phi(x) = b = F(\alpha),$$

les points multiples du groupe de transformation $(F\Phi)$ (où deux substitutions t au moins s'égalent) *sont donc les transformés* $\tau(a)$ *par les substitutions* τ *du groupe* (ΦF) *des points multiples* a *du groupe* (F) *de* $F(x)$.

On verrait de même que les points multiples du groupe de transformation (ΦF) (où deux substitutions τ au moins s'égalent) *sont les transformés* $t(\alpha)$ *des points multiples* α *du groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *par les substitutions du groupe* $(F\Phi)$.

4. Les propriétés que nous avons démontrées appartiennent à tout couple de groupes de transformation $(F\Phi)$, (ΦF), c'est-à-dire aux groupes de transformation de deux fonctions complètes uniformes F et Φ *quelconques,* et aux groupes de transformation de deux fonctions complètes multiformes F et Φ, lorsque celles-ci possèdent des groupes de transformation. Il en est de même des propriétés suivantes de tout couple de fonctions F et Φ elles-mêmes qui ont des substitutions de transformation.

Considérons les groupes $(F\Phi)$ et (ΦF) de transformation de deux fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ et supposons qu'on puisse poser

$$F(x) = \Psi(f(x)), \qquad \Phi(x) = \Psi(\varphi(x)),$$

où f et φ sont des fonctions qui admettent des substitutions de transformation dont nous désignerons les groupes respectifs par $(f\varphi)$ et (φf) (ce qui a lieu nécessairement si f et φ sont des fonctions complètes uniformes) et où Ψ est une fonction *périodique* (ce qui a lieu nécessairement si Ψ est complète uniforme). Il est évident que les substitutions qui changent f en φ, changent F en Φ, et par conséquent le groupe $(f\varphi)$ est un sous-groupe du groupe de transformation $(F\Phi)$; de même, (φf) est un sous-groupe du groupe de transformation (ΦF). Pour que $(f\varphi)$ coïncide avec $(F\Phi)$, il est nécessaire qu'il n'existe aucune substitution $t(x)$ changeant $f(x)$ en une fonction $S(\varphi(x))$ pour laquelle on aurait

$$\Psi(S(z)) = \Psi(z)$$

et, par suite,

$$F(t) = \Psi(f(t)) = \Psi\big(S(\varphi(x))\big) = \Psi(\varphi(x)) = \Phi(x).$$

C'est ce qui arrive si Ψ_z est une fonction *non-périodique, c'est-à-dire* n'admettant aucune substitution $S(z)$ (ce qui se produit, par exemple, si Ψ est rationnelle linéaire, ou est multiforme non-périodique, par exemple est l'inverse d'une fonction uniforme).

Au contraire, si Ψ_z est une fonction périodique ayant des substitutions S_z, l'équation

$$F(t) = \Phi(x) \qquad \text{ou} \qquad \psi(f(t)) = \Psi(\varphi(x))$$

donne pour le groupe $(F\Phi)$

$$f_{-1}\Big(\Psi_{-1}\big(\Psi(\varphi(x))\big)\Big) = t_1, \quad t_2, \quad \dots$$

ou, puisque $\Psi_{-1}(\Psi(z)) = S(z)$,

$$f_{-1}\big(S(\varphi(x))\big) = t_1, \quad t_2, \quad \ldots,$$

et l'on voit que le groupe $(F\Phi)$ ne se réduit au groupe $(f\varphi)$, qui est déterminé par $f_{-1}\big(\varphi(x)\big)$, que si S_z se réduit à z, ou enfin, si Ψ est non-périodique (rationnelle linéaire ou multiforme non-périodique).

On conclut de là :

1° Que toutes les fonctions uniformes qui ont mêmes groupes de transformation que deux fonctions uniformes données F et Φ sont comprises dans les formules

$$\frac{\lambda F + \mu}{\nu F + \rho}, \quad \frac{\lambda \Phi + \mu}{\nu \Phi + \rho}; \tag{10}$$

2° Que tout couple de fonctions de la forme

$$\Psi(F), \quad \Psi(\Phi),$$

où Ψ, F, Φ sont complètes uniformes et Ψ non linéaire admet les substitutions de transformation de F et de Φ, mais *en admet aussi d'autres,* en sorte que $(F\Phi)$ et (ΦF) ne sont que des sous-groupes des groupes de transformation des deux fonctions considérées.

3° Que, d'une manière générale, les groupes de transformation des fonctions $\Psi(F)$ et $\Psi(\Phi)$ ne sont identiques aux groupes des fonctions F et Φ (uniformes ou multiformes) qu'autant que Ψ est une fonction non-périodique, c'est-à-dire une fonction linéaire ou une fonction multiforme non-périodique. Dans tous les cas, nous pourrons dire que les fonctions (10) ont mêmes groupes de transformation que F et Φ.

On voit que les propriétés des fonctions relativement à leurs groupes de transformation sont analogues à celles qui sont relatives aux groupes de substitutions d'invariabilité.

Cette analogie peut se remarquer encore à l'égard de la discontinuité ou de la continuité des groupes : on voit facilement qu'un groupe de transformation $(F\Phi)$ ou (ΦF) ne peut être continu qu'autant que les fonctions F et Φ sont toutes deux linéales ou aréales, c'est-à-dire qu'il y ait des fonctions partielles f_1, f_2, ..., φ_1, φ_2, ... infiniment voisines quel que soit x [équations (2)] :

Deux fonctions ponctales F *et* Φ (*uniformes ou multiformes*) *ont donc des groupes de transformation* $(F\Phi)$, (ΦF) DISCONTINUS. *Au contraire, les groupes relatifs à deux fonctions* F *et* Φ *sont simplement continus si* F *et* Φ *sont linéales, doublement continus si* F *et* Φ *sont aréales.*

De ce que les fonctions ayant des groupes de transformation donnée sont de la forme (10), où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires, et F et Φ un couple de ces fonctions, on conclut que F et Φ sont les quotients des intégrales respectives de deux équations linéaires homogènes du deuxième ordre dont les coefficients ne dépendent que des substitutions de transformation données. Avant de former ces équations, nous donnerons encore quelques propriétés des substitutions de transformation.

5. Posons

$$\Phi(x) = \Psi_1(F(x)).$$

$\Psi(z)$ n'est jamais une fonction composée; elle n'est une fonction complète uniforme que dans des cas très particuliers, même lorsque F et Φ sont complètes uniformes. Soient donc d'une manière générale ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, ... les fonctions partielles uniformes en lesquelles la fonction complète multiforme Ψ se décompose en dehors de ses multiplicités.

Soient

$$t'_1, \quad t''_1, \quad t'''_1, \quad \ldots, \quad t_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad = \mathrm{F}_{-1}(\Phi(x))$$

les substitutions du groupe de transformation $(\mathrm{F}\Phi)$ et soient $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)}, \ldots$, les itérées de $t_1^{(n)}$; soient, d'autre part, $\psi_1^{(p)}, \psi_2^{(p)}, \ldots$, les itérées de $\psi_1^{(p)}$. En faisant la substitution $t_1^{(n)}$ dans $\mathrm{F}(x)$, on a

$$\mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x) = \psi_1^{(p)}(\mathrm{F}(x)), \tag{11}$$

où $\psi_1^{(p)}$ est l'une des fonctions partielles uniformes en lesquelles Ψ_1 se décompose. Faisant plusieurs fois de suite la substitution $t_1^{(n)}$, on a

$$(12) \quad \begin{cases} \mathrm{F}(t_2^{(n)}) = \psi_1^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) = \psi_2^{(p)}(\mathrm{F}(x)), \\ \mathrm{F}(t_3^{(n)}) = \psi_2^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) = \psi_3^{(p)}(\mathrm{F}(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{F}(t_\mu^{(n)}) = \psi_{\mu-1}^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) = \psi_\mu^{(p)}(\mathrm{F}(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons qu'il existe un nombre entier fini μ tel que $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$ (ce qui exige que Ψ soit algébrique); on a alors

$$\mathrm{F}(t_\mu^{(n)}) = \mathrm{F}(x), \tag{13}$$

ce qui signifie que $t_\mu^{(n)}$ est une des substitutions s qui laissent $\mathrm{F}(x)$ invariable. Faisant encore la substitution $t_1^{(n)}$, on a

$$\mathrm{F}(t_{\mu+1}^{(n)}) = \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x), \tag{14}$$

et, par conséquent, l'itérée $t_{\mu+1}^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fait partie, comme $t_1^{(n)}$, du groupe de transformation $(\mathrm{F}\Phi)$, et l'on verrait de la même manière que $(\mathrm{F}\Phi)$ contient toutes les itérées de $t_1^{(n)}$ de la forme

$$t_{m\mu+1}^{(n)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les réciproques sont évidentes :

1° Si $t_\mu^{(n)}$ est identique à une substitution s du groupe (F), l'équation (13) et la dernière équation (12) montrent que $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$.

2° Si $t_{\mu+1}^{(n)}$ fait partie du groupe de transformation (FΦ), comme $t_1^{(n)}$, l'équation (14) où l'on substitue à x l'inverse $\tau_1^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ donne l'équation (13) et, par conséquent, $t_\mu^{(n)}$ est l'une des substitutions s du groupe (F) et $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$.

Des équations

$$F(t_{\mu-1}^{(p)}) = \psi_{\mu-1}^{(p)}(F(x)), \qquad \psi_\mu^{(p)}(z) = z,$$

on déduit encore

$$\psi_1^{(p)}\big(F(t_{\mu-1}^{(n)})\big) = \psi_\mu^{(p)}(F(x)) = F(x),$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad \Phi(t_{\mu-1}^{(n)}) = F(x),$$

et, par conséquent, que $t_{\mu-1}^{(n)}$ est l'une des substitutions τ du groupe (ΦF); la réciproque est évidente, c'est-à-dire que, si l'une des itérées $t_{\mu-1}^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fait partie du groupe (ΦF), $t_\mu^{(n)}$ appartient au groupe (F); mais on voit de plus, en faisant la substitution $t_1^{(n)}$ dans l'équation précédente,

$$(16) \qquad \Phi(t_\mu^{(n)}) = F(t_1^{(n)}) = \Phi(x),$$

que $t_\mu^{(n)}$ est une des substitutions σ du groupe Φ, c'est-à-dire que l'hypothèse faite, $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$, n'est réalisée que lorsque $F(x)$ et $\Phi(x)$ ont des substitutions communes les laissant invariables. Les théorèmes généraux I, II, III conduisent à la même conclusion lorsqu'on suppose, ce qui a lieu ici, que les groupes de transformation (FΦ) et (ΦF) ont des substitutions communes, *inverses les unes des autres*. Ces mêmes théorèmes permettent de démontrer la réciproque de la proposition précédente : si (F) et (Φ) ont des substitutions communes, il en est de même de (FΦ) et (ΦF), nous n'y insistons pas.

D'après ce qui précède, on voit qu'il est impossible que l'itérée $t_2^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fasse partie du même groupe (FΦ), à moins que, μ étant égal à 1,

$$\Phi(x) = \mathrm{F}(t_2^{(n)}) = \Phi(t_1^{(n)}), \qquad \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x) = \mathrm{F}(x),$$

et, par suite, que les deux fonctions F_x, Φ_x étant identiques, il n'y ait plus à proprement parler de transformations.

Mais le cas où $\mu = 2$, $\psi_2(z) = z$, est particulièrement intéressant : ψ_1 est alors *inverse d'elle-même*, c'est-à-dire que l'équation qui lie F et Φ est *symétrique* par rapport à F et Φ. Les itérées *impaires*

$$t_1^{(p)}, \quad t_3^{(p)}, \quad t_5^{(p)}, \quad \ldots,$$

transforment $\mathrm{F}(x)$ en $\Phi(x)$ et réciproquement. Les itérées paires

$$t_2^{(p)}, \quad t_4^{(p)}, \quad \ldots$$

laissent invariables à la fois $\mathrm{F}(x)$ et $\Phi(x)$. Le cas particulier où $t_1^{(p)}$ est inverse d'elle-même est compris dans le cas précédent. Si Ψ est une fonction complète uniforme, l'hypothèse $\Psi_2(z) = z$ exige que cette fonction soit linéaire et inverse d'elle-même, c'est-à-dire que Φ soit de l'une des deux formes

$$(17) \qquad \mathrm{A} - \mathrm{F}(x), \quad \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{B}}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{A}}.$$

La première forme, dans laquelle on suppose A nul, donne le cas particulier des substitutions t changeant $F(x)$ de signe.

Les substitutions

$$t = (4m + 2)K + 2m'iK' + x,$$

qui changent de signe $\operatorname{sn}(x \mid 2K, iK')$ et qui, itérées, laissent invariable cette fonction, en sont un exemple.

Les substitutions

$$t = 4mK + (2m' + 1)iK' + x$$

qui changent $\operatorname{sn} x$ en $\frac{1}{k \operatorname{sn} x}$ et qui, itérées, laissent invariable cette fonction, sont un exemple du second cas $\left(A = O,\ B = \frac{1}{k}\right)$.

Dans le cas plus général où μ est quelconque, mais fini, l'hypothèse que Ψ soit fonction complète uniforme entraîne également la condition que cette fonction et, par suite, ses itérées, soient linéaires (du genre elliptique). Au contraire, lorsque Ψ est une fonction complète uniforme non linéaire, il n'y a pas de valeur finie de μ pour laquelle l'itérée $\Psi_\mu(z)$ se réduit à z. Dans quelques cas, il pourra arriver que $\Psi_\mu(z)$ tende vers z, μ croissant indéfiniment (et l'on peut aussi considérer ce cas s'il s'agit d'une fonction partielle ψ, Ψ étant multiforme); alors $t_\mu^{(n)}$ tend vers une substitution s du groupe (F) et, par suite, aussi de (Φ); mais cette limite est aussi une substitution du groupe (ΦF). Il s'ensuit que cette limite $t(x)$ devrait être une substitution laissant invariables $F(x)$ et $\Phi(x)$ et, d'autre part, transformant Φ en F :

$$F(t) = F(x), \qquad \Phi(t) = \Phi(x), \qquad \Phi(t) = F(x).$$

Ces équations sont incompatibles, à moins que la limite $t(x)$ ne se réduise à une constante et que cette constante ne soit un point singulier essentiel commun aux deux fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ [nous avons vu déjà que les points essentiels d'une fonction périodique $F(x)$ se présentent comme limites, pour n infini des substitutions $s_n(x)$ de $F(x)$].

Il est évident que, dans tous les cas où Ψ est une fonction complète uniforme, les équations

$$F(t_\mu^{(p)}) = \Psi_\mu(F(x)) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

sont vérifiées à la fois par toutes les substitutions $t^{(p)}$ du groupe $(F\Phi)$; et qu'en particulier, si μ étant fini,

$$\Psi_\mu(z) = z,$$

toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $t_\mu^{(p)}$ (p quelconque) sont des substitutions communes à (F) et (Φ), c'est-à-dire que toutes les propriétés démontrées sur $t_1^{(p)}$ sont vraies pour toutes les substitutions $t_1, t'_1, t''_1, \ldots$ de $(F\Phi)$. On peut démontrer que ceci est vrai, non seulement lorsque Ψ est complète uniforme et, par suite, linéaire lorsque $\Psi_\mu = z$, mais même lorsque Ψ_1 est multiforme et se décompose, en dehors de ses multiplicités, en fonctions partielles ψ_1, $\psi'_1, \psi''_1, \ldots, \psi_1^{(p)}, \ldots$. En effet, les fonctions ψ_1 subissent entre elles certaines permutations lorsque z décrit un contour fermé autour d'un de leurs points critiques; de plus, on peut choisir un contour fermé, passant par un point z quelconque, de manière que $\psi_1^{(p)}$ soit remplacée par l'une quelconque des autres fonctions choisie à l'avance $\psi_1^{(q)}$ par exemple ([1]). Si donc on suppose que

---

([1]) Si cela n'était pas, la fonction Ψ_1, ensemble des ψ_1, ne serait pas une fonction *complète unique*, mais une fonction *composée*, ce qui ne peut être.

la $\mu^{\text{ième}}$ itérée de $\psi_1^{(p)}(z)$ se réduit à z :

$$\psi_\mu^{(p)}(z) = z,$$

il en sera de même pour les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées de ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, ..., car $\psi_1^{(p)}$ peut être remplacée successivement dans cette égalité par ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, ..., en faisant décrire à z des contours fermés convenablement choisis. D'autre part, toutes les substitutions t donnent des égalités de la forme

$$F(t_1^{(n)}) = \psi_1^{(p)}(F(x)),$$

et en prenant les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées,

$$F(t_\mu^{(n)}) = \psi_\mu^{(p)}(F(x)).$$

Toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $\psi_\mu(z)$ se réduisant à z, il s'ensuit que toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $t_\mu^{(n)}$ des substitutions t de $(F\Phi)$ sont des substitutions de (F) et de (Φ), et, par suite, *toutes les substitutions de* $(F\Phi)$ *jouissent des propriétés démontrées précédemment sur l'une d'elles dans l'hypothèse* $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$; les substitutions τ de (ΦF) inverses des t, jouissent évidemment de propriétés corrélatives qu'on énoncerait en permutant les lettres F et Φ dans les énoncés relatifs aux substitutions t.

6. Supposons écrites toutes les égalités

$$F(t_q^{(n)}(x)) = \psi_q^{(p)}(F(x)),$$

dont le nombre est infini si F est transcendante; le nombre des $\psi_q^{(p)}$ distinctes n'est pas nécessairement infini et est égal à μ fois l'ordre de la fonction multiforme Ψ_1, ordre qui peut être fini; il s'ensuit que, dans les égalités précédentes, des substitutions $t^{(n)}$ distinctes produisent la même transformation de $F(x)$.

Supposons que

$$F\left(t_{q'}^{(n')}(x)\right) = \psi_{q'}^{(p')}\left(F(x)\right).$$

On aura alors

$$F\left(t_q^{(n)}\left(t_{q'}^{(n')}(x)\right)\right) = \psi_q^{(p)}\left(\psi_{q'}^{(p')}\left(F(x)\right)\right),$$

et l'on voit que, d'une manière générale, la substitution à x de

$$(18) \qquad t_q^{(n)}\left(t_{q'}^{(n')}\left(t_{q''}^{(n'')}(\ldots(x)\ldots)\right)\right),$$

où les $n, n', n'', \ldots$ sont tous distincts, transforme $F(x)$ en la fonction

$$(19) \qquad \psi_q^{(p)}\left(\psi_{q'}^{(p')}\left(\psi_{q''}^{(p'')}(\ldots F(x)\ldots)\right)\right),$$

où les $p, p', p'', \ldots$ ne sont pas tous distincts en vertu de la remarque faite plus haut.

D'ailleurs $q, q', q'', \ldots$ prennent toutes les valeurs possibles; mais dans les fonctions précédentes que nous désignerons par $S^{(m)}(F(x))$ ou $S^{(m)}(z)$, $(z = F(x))$, il suffit que $q, q', q'', \ldots$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, \mu - 1$, en vertu de l'égalité

$$\psi_{\mu+q}^{(p)}(z) = \psi_q^{(p)}(z),$$

pour qu'on obtienne toutes les fonctions $S^{(m)}$ distinctes; au contraire, si l'on pose

$$t_\mu^{(n)}(x) = s_1^{(n)}(x),$$

$s_1^{(n)}$ et toutes ses itérées étant des substitutions de (F), et s'il existe un nombre ν_n tel que

$$s_{\nu_n}^{(n)}(x) = x$$

toutes les itérées $t_q^{(n)}$ (distinctes) de $t_1^{(n)}$ se réduisent aux $\mu\nu_n - 1$ qu'on obtient par les valeurs suivantes de q :

$$q = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mu\nu_n - 1.$$

Ce raisonnement s'applique à tous les nombres q, q', q'', ...; les nombres ν, ν', ν'', ... correspondants ne sont pas nécessairement égaux et peuvent d'ailleurs être infinis. Dans tous les cas, l'ensemble de toutes les substitutions possibles de la forme (18) (qui comprennent comme on l'a vu celles formées avec les inverses τ des t) est *un groupe de substitutions d'invariabilité de certaines fonctions périodiques de x : soit* (E) *ce groupe.*

D'autre part l'ensemble de toutes les fonctions $S^{(m)}(z)$ forme *un groupe de substitutions d'invariabilité de certaines fonctions périodiques de $z = F(x)$: soit* (G) *ce groupe.*

Si le nombre des $S^{(m)}(z)$ est fini, on peut former une fonction $G(z)$ de groupe (G), au moyen d'une fonction symétrique du premier ordre de l'une des formes

$$z\prod_m S^{(m)}(z), \quad z + \sum_m S^{(m)}(z), \quad \frac{1}{z} + \sum_m \frac{1}{S^{(m)}(z)}$$

qui d'ailleurs sont fonctions linéaires l'une de l'autre (*voir* la Note précédente); si ces trois fonctions se réduisaient à des constantes, on prendrait une fonction du second ordre se réduisant alors au premier, par exemple

$$z^2 + \sum_m [S^{(m)}(z)]^2;$$

enfin si le nombre des $S^{(m)}(z)$ est infini, on prendra la troisième forme écrite plus haut si celle-ci n'est pas constante et est convergente. On sait que si les sommes analogues à la précédente formées au moyen des puissances 1, 2, 3, ..., $\omega - 1$ sont constantes ou divergentes, et s'il n'en est pas de même pour la $\omega^{\text{ième}}$, on peut prendre celle-ci pour fonction G :

$$(20) \qquad G(z) = \frac{1}{z^\omega} + \sum_m \frac{1}{[S^{(m)}(z)]^\omega};$$

s'il n'existait pas de nombre ω fini tel que cette série soit convergente et non constante, on sait qu'il faudrait introduire des fonctions $h^{(m)}(z)$ qui rendent convergente la première série, mais dont la détermination est restée jusqu'ici ambiguë, en sorte que nous nous en tiendrons au cas précédent.

La fonction $G(z)$, (20), où ω est le plus petit possible, ainsi que toutes ses transformées linéaires, sont, comme on sait, *toutes les fonctions périodiques de groupe* (G).

On pourrait de la même manière, au moyen des substitutions (18) du groupe (E), former toutes les fonctions périodiques $E(x)$ de ce groupe; mais, les fonctions de z de groupe (G) étant formées, on peut procéder autrement; il est évident d'après la manière dont nous les avons formées ainsi que leurs substitutions $S^{(m)}(z)$ que les fonctions de groupe (E) ne sont autres que celles de groupe (G) dans lesquelles on remplace z par $F(x)$, en sorte qu'on peut écrire, ω étant déterminé comme il est dit plus haut :

$$(21) \quad E(x) = G(F(x)) = \frac{1}{[F(x)]^\omega} + \sum_m \frac{1}{[S^{(m)}(F(x))]^\omega}.$$

Cette fonction et toutes ses transformées linéaires *sont toutes les fonctions de groupe* (E). Selon ce que nous avons vu du nombre des fonctions $S^{(m)}(z)$ distinctes, il est évident que la formation du groupe (G) et de la fonction $G(z)$ est beaucoup plus simple que la formation *directe* du groupe (E) et de la fonction $E(x)$: il arrivera par exemple, dans de nombreux cas, que (E) ait un nombre infini de substitutions (18) et que cependant (G) n'ait qu'un nombre fini de substitutions $S^{(m)}(z)$ (19). C'est à ce sujet que se montre surtout l'utilité des considérations précédentes.

Nous avons supposé qu'il existait un nombre fini μ tel que $\psi_\mu(z) = z$; dans le cas où μ est infini, on peut de la même manière constituer des groupes (E) et (G) et nous n'insistons pas.

7. Les considérations précédentes supposent simplement l'existence des groupes (F), (Φ), (FΦ), (ΦF) et s'appliquent donc non seulement aux fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, complètes uniformes, mais à toute couple de fonctions complètes multiformes $F(x)$, $\Phi(x)$ (ponctales, linéales ou aréales) qui satisfont à cette double condition d'être périodiques et d'être transformables l'une en l'autre. Le cas particulier où $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont complètes uniformes (cas déjà très étendu, puisqu'il s'agit alors de deux fonctions complètes uniformes *quelconques*) est surtout intéressant.

Le cas où μ est fini doit être considéré spécialement et fournit le théorème suivant, évident d'après ce qui précède :

Soit $F(x)$ *une fonction complète uniforme et soit* (F) *son groupe de substitutions. Si l'on peut changer les constantes du groupe, de manière à laisser aux substitutions* $s_n(x)$ *la même forme et de manière qu'elles satisfassent aux conditions (notamment de discontinuité) nécessaires et suffisantes pour qu'existent des fonctions uniformes du groupe, on aura ainsi constitué un groupe* (E) *tel qu'il existe des fonctions uniformes* $E(x)$ *de ce groupe, qui sont de même nature* *que* $F(x)$. *Si, de plus, on peut choisir les nouvelles constantes, de manière que la* $\mu^{\text{ième}}$ *itérée d'une substitution* t *de* (E) *soit identique à une substitution* s *de* (F), *il en sera de même pour toutes les autres substitutions* t, *et :*

1° $F(t)$ *sera une fonction algébrique, généralement multiforme, d'ordre inférieur à* μ, *de* $F(x)$;

2° *Toute fonction uniforme* $E(x)$ *du nouveau groupe* (E) *sera une fonction algébrique rationnelle de degré au moins* μ *de toute fonction uniforme* $F(x)$ *du groupe donné.*

Les transformations rationnelles de degré impair μ de la fonction $F(x) = \operatorname{sn} x$ en donnent immédiatement un exemple : les substitutions s de (F) sont ici de l'une et l'autre forme

$$a + x, \quad a' - x;$$

les substitutions t sont de la forme

$$t = \frac{a}{\mu} + x;$$

et $F(t)$ est une fonction d'ordre $2 < \mu$. La fonction $E(x)$ est une nouvelle fonction de même nature que $\operatorname{sn} x$ et est fonction rationnelle *de degré* μ de la première.

Les transformations paires de $\operatorname{sn} x$ en sont aussi un exemple simple.

La fonction p de Weierstrass est une transformée de degré $\mu = 2$, dans le cas où $F(t)$ a la première forme (17) :

$$F(t) = -F(x), \qquad (A = 0),$$

La transformation de Gauss est relative au cas où $F(t)$ a la seconde forme (17) :

$$F(t) = \frac{1}{k\,F(x)} \qquad \left(A = 0,\ B = \frac{1}{k}\right),$$

et la nouvelle fonction est une fonction linéaire de

$$F(x)+S(F(x)) = \operatorname{sn} x + \frac{1}{k \operatorname{sn} x} = \frac{1+k \operatorname{sn}^2 x}{k \operatorname{sn} x}.$$

On voit que les transformations algébriques des fonctions elliptiques, qui ont pour but de former, avec une fonction donnée, d'autres de même nature, ne sont pas particulières aux fonctions elliptiques, mais, au contraire, constituent une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions uniformes et peuvent même s'étendre en certains cas aux fonctions multiformes. L'importance des transformations dans la théorie particulière des fonctions elliptiques montre l'importance des considérations générales qui précèdent. Nous verrons plus tard d'autres exemples simples de ces transformations, concernant la fonction modulaire et les fonctions fuchsiennes ou automorphes.

Remarquons encore que nous avons déjà considéré (1) le cas d'une fonction complète uniforme $E(x)$, fonction complète uniforme d'une deuxième $F(x)$

$$E(x) = G(F(x)),$$

le groupe (F) étant alors un sous-groupe du groupe (E), et que de l'égalité précédente nous avons conclu que les substitutions t de (E) qui n'appartiennent pas à (F), transforment $F(x) = z$ en les substitutions $S^{(m)}(z)$ qui laissent invariable la fonction complète uniforme $G(z)$, ce qui constitue une réciproque des propositions démontrées précédemment.

---

(1) *Propriétés générales des substitutions, etc.* (*Nouv. Ann.*, 1901, p. 544).