Nouvelles annales de mathématiques

A. Mannheim

Démonstrations du théorème de Villarceau

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 250-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__250_0>

[M²4iδ]

DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE VILLARCEAU;

PAR M. A. MANNHEIM.

Ma Note sur le théorème de Schœlcher ([1]), dans laquelle il est question du théorème de Villarceau sur la nature de la section d'un tore par un plan bitangent à cette surface, m'a rappelé des démonstrations de ce théorème que j'ai trouvées, il y a déjà longtemps, et que je n'ai pas eu l'occasion de faire connaître.

Considérons un tore comme l'enveloppe d'une sphère de grandeur invariable. Par le centre O du tore menons le plan (P) bitangent à cette surface. La section du tore par ce plan est l'enveloppe des petits cercles, intersections de la sphère mobile et de (P). Ces cercles ont leurs centres sur l'ellipse (E), projection sur (P) du cercle décrit par le centre de la sphère mobile; ils coupent orthogonalement le cercle qui, sur (P), a pour diamètre le petit axe de (E); ceci résulte de ce que ce cercle est la trace de la sphère de centre O qui coupe orthogonalement les sphères dont le tore est l'enveloppe ([2]).

Il reste maintenant à démontrer cette propriété :

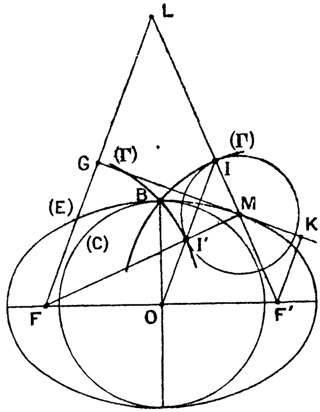
L'enveloppe des cercles dont les centres sont sur une ellipse (E) *et qui coupent orthogonalement le*

([1]) *Voir* page 105 de ce Volume.

([2]) De la même manière on voit que la *section d'un tore par un plan, qui coupe l'axe de cette surface, est l'enveloppe des cercles dont les centres sont sur une ellipse et qui coupent orthogonalement un cercle.* On a ainsi la génération des anallagmatiques du quatrieme degré donnée par Moutard.

cercle (C) *qui a pour diamètre le petit axe de cette courbe, se compose de deux cercles* (Γ).

Le grand axe de longueur $2a$, de l'ellipse (E), est égal au diamètre du cercle décrit par le centre de la sphère mobile, son petit axe, de longueur $2b$, est le



segment compris entre les points de contact de (P), par suite sa demi-distance focale c est égale au rayon de la sphère mobile.

Appelons r le rayon d'un cercle ayant pour centre le point M de l'ellipse (E) et qui coupe à angle droit le cercle (C). On a

$$r^2 = \overline{MO}^2 - b^2.$$

Appelons F, F' les foyers de (E),

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\,\overline{MO}^2 - 2c^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

d'où

$$r^2 = \frac{\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 2a^2}{2} = \left(\frac{MF - MF'}{2}\right)^2;$$

ainsi

$$r = \frac{\text{MF} - \text{MF}'}{2},$$

et comme

$$a = \frac{\text{MF} + \text{MF}'}{2},$$

on a donc

$$\text{MF} = r + a,$$
$$\text{MF}' = a - r.$$

On peut alors conclure que le *cercle de centre arbitraire* M *sur* (E), *et qui coupe orthogonalement* (C), *est toujours tangent aux cercles fixes* (Γ) *de centres* F *et* F′, *et de rayon de longueur* a, *lesquels constituent l'enveloppe cherchée.*

Autrement : Menons la tangente MG à (E) et abaissons sur cette droite la perpendiculaire FG qui coupe F′M au point L.

Par le centre O menons la parallèle OI à FL.

Elle coupe F′L au point I, le segment OI est égal à FG.

On voit de même que OI′ est égal à la perpendiculaire F′K abaissée sur la tangente en M à (E).

On a

$$\text{FG} \times \text{F}'\text{K} = b^2.$$

On a donc aussi

$$\text{OI} \times \text{OI}' = b^2.$$

Le cercle de centre M, qui passe par I, I′, coupe alors orthogonalement le cercle (C), et comme ce cercle de centre M est tangent en I, I′ aux cercles fixes (Γ), *ces cercles constituent l'enveloppe cherchée.*

Autrement : En rédigeant ces anciennes démonstrations j'ai remarqué qu'on a encore la suivante :

Des points F, F′ comme centres décrivons les cercles (Γ) qui passent par les extrémités du petit axe de (E). Le lieu des centres M des cercles qui leur sont tangents est une ellipse, qui a pour foyers les centres F, F', de ces cercles et qui passe par B. Cette courbe n'est autre alors que (E). Le point O étant un centre de similitude des cercles (Γ), la droite de contact II' passe par ce point et l'on a

$$\mathrm{OI} \times \mathrm{OI}' = \overline{\mathrm{OB}}^2.$$

Le cercle, dont le centre M est sur l'ellipse, est donc en outre orthogonal au cercle (C), et comme ce cercle, lorsque M varie de position sur (E), est toujours tangent aux cercles (Γ), *ceux-ci constituent l'enveloppe cherchée.*

Remarque. — Les cercles (Γ) sont égaux au cercle décrit par le centre de la sphère mobile dont le tore est l'enveloppe.

Leurs projections sur le plan de ce dernier cercle sont des ellipses égales à (E).