Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__237_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1941.

(1902, p. 480.)

Soient abc, $a'b'c'$ et $a''b''c''$ trois triangles inscrits à une hyperbole équilatère et d'orthocentres d, d', d''. Si α, β, γ et δ sont les orthocentres des triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ et $dd'd''$, δ est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$.

(Duporcq.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

Considérons neuf points sur une hyperbole équilatère, groupons-les par trois, les orthocentres des triangles ainsi formés sont trois points de la courbe, sommets d'un triangle dont l'orthocentre est indépendant de la façon dont on a groupé les points. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si l'on échange deux sommets a, a' des triangles abc, $a'b'c'$ la droite des orthocentres de ces triangles reste parallèle à elle-même. Car l'orthocentre final sera à l'intersection de l'hyperbole avec la perpendiculaire à cette direction menée par l'orthocentre de $a''b''c''$.

Soient donc h, h', k, k' les centres des hauteurs des quatre triangles abc, $ab'c'$, $a'bc$ et $a'b'c'$. Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés de l'hexagone $h'ahk'a'kh'$ pris dans cet ordre. L'hexagone est inscrit à l'hyperbole; or les côtés 1 et 4 sont parallèles; de même 2 et 5. Donc aussi 3 et 6. C. Q. F. D.

1963.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe représentée par

$$x^4\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)-y^4\left(\frac{b^2+2x^2}{y^2}+1\right)=0.$$

(G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. C. ALASIA.

Faisons

$$x = \rho \sin\varphi, \qquad y = \rho\cos\varphi,$$

et après quelques transformations l'équation donnée s'écrira

$$a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = \rho^2.$$

Posons $a^2 \operatorname{tang}^2\varphi = b^2 \operatorname{s\acute{e}c}^2\omega$, et nous aurons

$$\frac{ds}{d\omega} = ab\,\frac{\sqrt{a^2+b^2\cos^2\omega}}{b^2+a^2\cos^2\omega},$$

ou bien, après avoir fait

$$1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\omega = p, \qquad 1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\omega = q;$$

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{q}{p\sqrt{q}} = \frac{b}{a\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a^2-b^2}{p\sqrt{q}} + \frac{b^2}{\sqrt{q}}\right).$$

L'intégration donne

$$s = \frac{b}{a}\,\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\omega}{p\sqrt{q}} + \frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{q}}.$$

Si l'on avait $a = b$ on aurait évidemment

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\omega}},$$

car alors la courbe est une lemniscate.

1968.

(1903, p. 144.)

Sur toute normale à une conique, le pied de cette normale, le centre de courbure, le point de Frégier et le milieu du segment limité à la conique forment une division harmonique. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. CANON.

Appelons ι le point de Frégier sur la normale en a à la conique, γ le centre de courbure de la conique relatif au point a, et j le point où cette normale coupe la conique.

On a la relation connue

$$\frac{1}{2a\gamma}+\frac{1}{aj}=\frac{1}{ai}.$$

Le point m étant le milieu du segment aj, on peut l'écrire

$$\frac{1}{2a\gamma}+\frac{1}{2am}=\frac{1}{ai}$$

ou

$$\frac{1}{a\gamma}+\frac{1}{am}=\frac{2}{ai}.$$

Donc, etc.

Autrement : Prolongeons le segment ai de sa propre longueur jusqu'en i', prolongeons de même $a\gamma$ de sa longueur jusqu'en γ'; il s'agit maintenant de démontrer que les points a, i', j, γ' forment une division harmonique.

Par le point a menons les cordes rectangulaires ab, ac; la droite bc passe alors par le point i. Parallèlement à ac menons la droite bg qui coupe la normale aj au point g; les triangles semblables iac, igb donnent

$$\frac{ia}{ig}=\frac{ic}{ib}.$$

Si le point b vient se confondre avec a, le point i ne change pas de position, le point g vient en γ' et l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{ia}{i\gamma'}=\frac{ij}{ia},$$

d'où

$$\overline{ia}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{ii'}^2=ij\times i\gamma'.$$

Donc, etc.