Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 223-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__223_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on demande de déterminer les surfaces* S *telles que le plan tangent en un point quelconque* M *de l'une de ces surfaces fasse un angle constant* ω *avec le plan mené par ce point* M *et par l'axe* Oz.

Démontrer que les caractéristiques de ces surfaces forment une famille de lignes de courbure, et trouver ces caractéristiques.

N. B. — *On pourra prendre pour variables indépendantes, soit les coordonnées rectangulaires* (x, y) *de la projection* m *du point* M *sur le plan des* xy, *soit les coordonnées polaires* (r, θ) *du même point* m.

II. *Soit*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy \qquad (1)$$

une équation différentielle linéaire où les coefficients p *et* q *sont fonctions de la variable indépendante* x. *On demande de trouver la relation qui doit exister entre ces coefficients* p *et* q *pour que l'équation* (1) *admette deux* *intégrales linéairement distinctes* y_1 *et* y_2, *liées par la relation*

$$y_1 y_2 = 1.$$

Examiner en particulier le cas où l'on a $p = \frac{1}{x}$. *Trouver le coefficient* q *et l'intégrale générale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^3}\, dx,$$

$\log x$ *désignant le logarithme népérien.*

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer le système :*

$$\frac{dx}{dt} + x - y = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 4z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + 4z - x = 0.$$

En déduire l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - 4z)\frac{\partial z}{\partial y} = 4z - x.$$

II. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre*

$$dy - f(x, y)\, dx = 0.$$

Comment peut-on reconnaître si elle admet un facteur intégrant de la forme XY (X *étant une fonction de* x, *et* Y *une fonction de* y), *et déterminer ce facteur intégrant quand il existe?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x + 1}.$$

(Octobre 1902.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *on considère les courbes* C *qui vérifient l'équation différentielle :*

$$2yy'^2 - y^2y'' - 2y'^3y'' = 0.$$

1° *Exprimer les coordonnées* x, y *d'un point* M *d'une courbe* C *en fonction du coefficient angulaire* $t = y'$ *de la tangente à cette courbe.*

2° *Construire les courbes* C.

II. *Intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont on connaît une intégrale complète.*

Cas de l'équation

$$z - px - qy = p^3,$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; *signification géométrique de ses intégrales.*

Épreuve pratique. — *En désignant par* a *un nombre positif inférieur à l'unité, et prenant pour* x^{a-1} *sa détermination réelle et positive, on considère l'intégrale*

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

1° *Trouver l'expression de* $f(a)$;

2° *Calculer avec quatre décimales la valeur de* a *pour laquelle on a*

$$f(a) = \frac{2}{a}.$$

(Juillet 1902.)

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Définition et expressions diverses de la courbure d'une figure plane ou gauche. Cas particulier où la courbe est plane : expression de la courbure en coordonnées polaires; cas où la courbe, en coordonnées* *cartésiennes, est définie comme enveloppe d'une droite mobile.*

II. *Trouver une ligne plane telle que, si on la transforme par rayons vecteurs réciproques, les courbures de la ligne et de sa transformée, en deux points correspondants, soient dans un rapport constant.*

SOLUTION.

r étant le rayon polaire, p la distance du pôle à la tangente et C la courbure, on a

$$C = \frac{dp}{r\,dr}.$$

Affectons de l'indice 1 les éléments de la courbe transformée; a^2 étant le module, on a

$$rr_1 = a^2, \qquad \frac{r}{p} = \frac{r_1}{p_1},$$

et par suite

$$C_1 = \frac{1}{a^2}\left(2p - r\frac{dp}{dr}\right).$$

En exprimant que $C_1 = mC$, on obtient une équation différentielle immédiatement intégrable qui donne

$$p = k(r^2 + a^2 m).$$

Mais alors

$$C = 2k = \text{const.},$$

et la courbe demandée est un cercle quelconque du plan.

Pour obtenir ce résultat par l'emploi des coordonnées polaires ρ et ω, on fera, dans l'équation différentielle du second ordre du problème, le changement de fonction :

$$u = \rho + \frac{A}{\rho},$$

A étant une constante convenable, et l'on sera ramené à l'intégration de

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} = u.$$

(Juillet 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Conditions que doivent remplir la constante* a *et la fonction rationnelle* R *pour que l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{R}(e^{x})\,dx$$

ait un sens. Expression de cette intégrale au moyen des affixes des pôles de la fonction $\mathrm{R}(e^{z})$ *compris dans la bande formée par l'axe réel et la parallèle à cet axe menée à la distance* 2π.

Application au calcul de la somme $\sum e^{-\frac{2\xi}{3}}$ *étendue à toutes les racines* ξ *de l'équation*

$$e^{4z} + e^{2z} + 1 = 0,$$

qui sont comprises dans la bande précédente.

(*Voir* HERMITE, *Cours d'Analyse*, 4e éd., p. 118 et suiv.)

II. *Trouver, en coordonnées polaires, l'équation finie des courbes planes dont le rayon de courbure* R *en un point est dans un rapport donné* a *avec le rayon vecteur de ce point. Signification géométrique des deux constantes d'intégration.*

Construire l'une des courbes cherchées pour $a = \frac{1}{2}$ *et* $a = -2$.

(*Voir* TISSERAND et PAINLEVÉ, *Exercices d'Analyse*, p. 313 et suiv.) (Juillet 1902.)

QUESTION DE COURS. — *Montrer que l'intégrale*

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où x *désigne une variable complexe est susceptible d'une infinité de valeurs.*

Quelles sont toutes ces valeurs? Quelle est la nature de la fonction x *envisagée comme dépendant de la variable complexe* z?

Problème. — I. *On donne l'équation différentielle linéaire*

$$f(u) = au + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_3 \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

où a, a_1, a_2, a_3 sont des fonctions quelconques de la variable x. Trouver toutes les fonctions v de x telles que le produit $vf(u)$ soit, quel que soit u, la dérivée d'une fonction linéaire de u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$.

II. *Soit $g(v) = 0$ l'équation différentielle qui détermine v; montrer que l'équation avec second membre*

$$f(u) = \mathrm{R}(x)$$

s'intègre par des quadratures si l'on connaît la solution générale de l'équation

$$g(v) = 0.$$

III. *Sous quelles conditions les équations*

$$f(u) = 0, \qquad g(v) = 0$$

ont-elles les mêmes intégrales?

Traiter en particulier le cas où $a_3 = 0$.

L'équation $g(v) = 0$ n'est autre que l'adjointe de Lagrange de $f(u) = 0$,

$$g(v) = av - \frac{d(a_1 v)}{dx} + \frac{d^2(a_2 v)}{dx^2} - \frac{d^3(a_3 v)}{dx^3} = 0.$$

Les diverses parties du problème sont résolues dans les *Leçons* de M. Darboux (t. II. Chap. V, p. 99 et suiv.).

Épreuve pratique. — *Calculer, avec quatre décimales exactes, par approximations successives, ou par toute autre méthode la valeur maximum de la fonction*

$$\frac{\operatorname{arc\,tang} u}{u} + 3\,\frac{\operatorname{arc\,tang} u - u}{u^3},$$

quand u varie de 0 à $+\infty$. (Novembre 1902.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation*

$$2xy\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Mode de génération des surfaces représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'intégrale générale. Déterminer celle de ces surfaces, S, *qui passe par la parabole*

$$y=0, \qquad z^2=2ax.$$

Transformer l'équation de S *en remplaçant x et y par* $r\cos\theta$ *et* $r\sin\theta$ *et, en partant de l'équation transformée, trouver les lignes asymptotiques de* S.

SOLUTION.

L'intégrale générale est

$$x^2+y^2=x\,\varphi(z).$$

L'équation de S

$$x^2+y^2=\frac{z^2x}{2a} \qquad \text{ou} \qquad z^2=\frac{2ar}{\cos\theta}.$$

On a, pour la projection des asymptotiques sur le plan des xy,

$$\frac{dr^2}{d\theta^2}+2r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{dr}{d\theta}-\frac{4\cos^2\theta+3\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

$$r^2=\theta, \qquad r=C\cos\theta\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\theta}{2}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver l'intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=u^3$$

qui se réduit à $\frac{1}{y}$ *pour* $x=1$.

SOLUTION.

C'est

$$u=\frac{1}{xy}.$$

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnée l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (A_0 + A_1 y + A_2 y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_0 + B_1 y)\frac{\partial u}{\partial y} + C_0 u$$
$$+ H_0 + H_1 y + H_2 y^2 + H_3 y^3,$$

où A_0, A_1, ..., H_3 *sont des fonctions connues de* x, *dévelop pables suivant la série de Maclaurin, démontrer que l'équation admet comme intégrale un polynome en* y, *dont les coefficients sont des fonctions de* x *et qui s'annule identiquement pour* $x = 0$.

SOLUTION.

En substituant pour u le polynome cherché et identifiant les coefficients des puissances de y, on trouve un polynome du troisième degré en y, dont les coefficients sont déterminés séparément par des équations différentielles ordinaires.

II. *Courbe plane telle que le rayon de courbure en un point quelconque* M *soit double du rayon du cercle passant par l'origine et touchant la courbe en* M.

SOLUTION.

L'équation différentielle est

$$\frac{x^2 + y^2}{x\,dy - y\,dx} = \pm \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

transformant en coordonnées polaires, on trouve des spirales logarithmiques et des hyperboles équilatères ayant leur centre à l'origine. (Novembre 1902.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *De l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface déduire l'équation differentielle des lignes asymptotiques :* 1° x, y *étant variables indépendantes;* 2° z, x, y *étant fonctions des variables indépendantes* r *et* θ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

Trouver les projections sur le plan xOy des lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation

$$z = x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + y \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$:

1° *En passant par l'intégrale indéfinie;*

2° *En considérant d'abord* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+ax^2}}$ (*où a désigne un paramètre*);

3° *En développant en série.* (Juillet 1902.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6x^2 - 2 = 0$$

qui admet la solution particulière $y_1 = x^2$, calculer celle des intégrales qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = -1$.

En considérant x comme une variable imaginaire, déterminer dans le plan des x les points singuliers de la fonction que l'on vient de calculer. Indiquer la manière de former, avec les valeurs initiales $x = -1$, $y = 0$, toutes les déterminations de cette fonction en un même point du plan des x.

Solution.

L'équation linéaire proposée est rendue facilement homogène et admet l'intégrale demandée

$$y = x^2 + 4 \operatorname{arc\,tang} x + \pi - 1.$$

II. *On considère dans une surface les sections faites par deux plans rectangulaires se coupant suivant une tangente à la surface.*

Démontrer que la somme des carrés des rayons de cour-

bure de ces deux sections ne change pas quand les deux plans tournent autour de leur intersection supposée fixe.

SOLUTION.

Les axes des deux plans faisant avec la normale à la surface des angles θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$, on a, d'après le théorème de Meusnier,

$$\text{const.} = \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\sin\theta}{R'} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les intégrales définies à coefficients réels*

$$\int \frac{dx}{K^2 - \operatorname{tang}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{(K^2 - \operatorname{tang}^2 x)^2}, \quad \int \frac{A + B \operatorname{tang}^2 x}{(K^2 - \operatorname{tang}^2 x)^2}\,dx.$$

SOLUTION.

On pose

$$K^2 = \operatorname{tang}^2 a,$$

et l'on prend les dérivées logarithmiques par rapport à a des deux membres de la formule

$$\operatorname{tang}^2 a - \operatorname{tang}^2 x = \frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos^2 a \cos^2 x};$$

en intégrant ensuite par rapport à x on obtient la première des intégrales demandées. La deuxième intégrale se tire de la première par une dérivation sous le signe d'intégration. La troisième intégrale est une combinaison simple des deux premières. (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Démontrer que, dans les trois cercles suivant lesquels la sphère osculatrice en un point d'une courbe est coupée par les trois faces du trièdre mobile lié au point de la courbe, l'un est la somme des deux autres.*

II. *Lignes de courbure de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^4+1},$$

où z a des valeurs RÉELLES. (Novembre 1902.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.*

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(m-1)x\frac{dy}{dx} + m(m-1)y = 0.$$

1° *En changeant les deux variables au moyen des relations*

$$x = \cot\omega, \qquad y = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} z,$$

et prenant z comme nouvelle fonction;

2° *En changeant de fonction au moyen de la relation*

$$y = (1+x^2)^m \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}.$$

Comparer les valeurs de y obtenues par ces deux méthodes et en déduire les expressions en ω de

$$\frac{d^m}{dx^m}(\text{arc tang}\,x) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^m}{dx^m}\log(1+x^2).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface qui a pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$z^4 = 4(x^2+y^2).$$

(Juillet 1902.)

Besançon.

QUESTION DE COURS. — *Exposer la théorie de la différentiation et de l'intégration sous le signe somme.*

Problème. — *Soient, sur une courbe* C, A *un point fixe,* M *un point variable, s l'arc* AM *de la courbe* C, R *le rayon de courbure de la courbe relatif au point* M. *Déterminer la courbe* C *de telle sorte qu'on ait la relation*

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2 = 9\,\frac{\left(\mathrm{R}^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}} - \mathrm{R}^{\frac{2}{3}}\right)}{m^{\frac{2}{3}}\,p^{\frac{2}{3}}},$$

m et p étant deux quantités données.

On utilisera les formules connues

$$d\alpha = \frac{ds}{\mathrm{R}}, \qquad dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha,$$

x et y étant les coordonnées rectangulaires du point M, *α l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x.*

Solution.

On obtient d'abord α en fonction de R par une quadrature qui s'effectue facilement en prenant $\mathrm{R}^{\frac{2}{3}}$ comme variable auxiliaire. On a ensuite x et y par des quadratures. Les courbes demandées sont des ellipses.

Épreuve pratique. — *On envisage l'équation*

$$x = y + e\sin x,$$

développer $\cos x$ *suivant les puissances de e par la formule de Lagrange jusqu'au terme en e^4 inclusivement.*

Solution.

$$\begin{aligned}\cos x = \cos y &+ \frac{e}{2}(\cos 2y - 1)\\ &+ \frac{e^2}{8}(3\cos 3y - 3\cos y)\\ &+ \frac{e^2}{48}(16\cos 4y - 16\cos 2y)\\ &+ \frac{e^4}{384}(125\cos 5y - 135\cos 3y + 10\cos y) + \ldots.\end{aligned}$$

(Juillet 1902.)

QUESTION DE COURS. — *Courbure et torsion des courbes gauches.*

PROBLÈME. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère un hélicoïde représenté par l'équation*

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

et dans le plan des xy *une lemniscate dont l'équation est*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

1° *Calculer la longueur d'un arc quelconque de la courbe* C *suivant laquelle l'hélicoïde est coupé par une surface cylindrique ayant ses génératrices parallèles à* Oz *et la lemniscate pour directrice;*

2° *Calculer le volume situé dans l'angle des coordonnées positives limité par le plan des* xy, *la surface cylindrique et la surface hélicoïdale;*

3° *Calculer le rayon de courbure de la courbe* C *en l'un quelconque de ses points et en étudier les variations.*

(*On fera usage des coordonnées cylindriques* $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, z.)

SOLUTION.

L'arc s de la courbe C est donné par la formule

$$s = a \arcsin(\sqrt{2}\sin\theta) + \text{const.}$$

Le volume demandé est

$$a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\, d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr = \frac{a^3}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Enfin R étant le rayon de courbure de C, on a

$$R^2 = \frac{4a^2\cos^4\theta}{1 + 8\cos 2\theta},$$

θ variant de zéro à $\frac{\pi}{4}$, R décroît d'abord de la valeur $\frac{2a}{3}$ jusqu'à un certain minimum égal à $\frac{a\sqrt{7}}{4}$, et croît ensuite de ce minimum jusqu'à la valeur a.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_2^3 \frac{(x^3+1)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

SOLUTION.

La valeur de cette intégrale est

$$\frac{11\sqrt{2}+15\log(1+\sqrt{2})}{4}.$$

(Novembre 1902.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane telle que la portion de la tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe ait une longueur donnée. Former l'équation de cette courbe, et étudier sa forme. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure en un point de la courbe. Former l'équation de sa développée.* (Novembre 1902.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'équation*

$$p^2+q^2-2px-2qy+1=0$$

étant donnée, on demande :

1° *D'intégrer complètement cette équation et de déterminer la nature des surfaces intégrales;*

2° *De transformer cette équation en supposant que les axes de coordonnées tournent d'un angle α autour de Oz;*

3° *De rechercher s'il existe des surfaces intégrales qui soient de révolution autour de Oz.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Par les points d'une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit on mène des parallèles à* *une droite fixe : on demande d'étudier le lieu des traces de ces parallèles sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.* (Novembre 1902.)