R. DE MONTESSUS

Un paradoxe du calcul des probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 21-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__21_1>

[J2f]

UN PARADOXE DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. R. DE MONTESSUS.

Dans son *Traité du Calcul des probabilités*, J. Bertrand se propose de rechercher la *probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit* et, à ce propos, le célèbre géomètre résout les trois problèmes *particuliers* que voici :

I. *D'un point quelconque* A, *pris à l'intérieur d'une circonférence* O *et sur un diamètre déterminé* xOy, *on mène une corde perpendiculaire à ce diamètre. Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence?*

Réponse : $\frac{1}{2}$.

II. *D'un point quelconque* B, *pris sur une circonférence, on mène une corde quelconque. Quelle est la* *probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{3}$.

III. *D'un point quelconque* C, *intérieur à une circonférence, on mène une corde perpendiculaire au rayon* OC. *Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{4}$.

De la divergence de ces réponses J. Bertrand conclut que le problème de la probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est une question « mal posée » ; M. H. Poincaré dirait plutôt que « le bon sens ne suffit pas ici pour nous apprendre quelle *convention* il faut faire ».

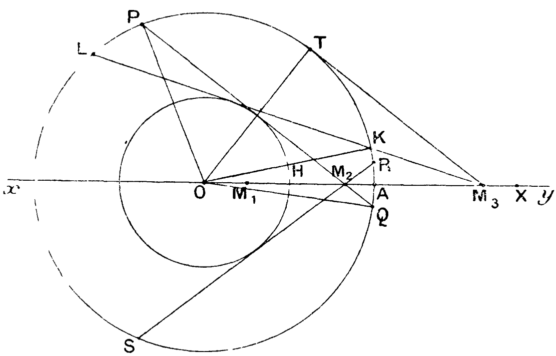
Nous faisons, en effet, une convention en disant que le problème de Bertrand est identique à l'un des trois problèmes résolus au début. Nous convenons que les cordes dont on compare les longueurs sont construites d'une façon *déterminée :* et il se trouve que la solution du problème dépend de ce mode de construction.

En quoi la solution du problème de Bertrand dépend-elle du mode de construction? En ce qu'il n'est pas de *comparaison* possible entre les évaluations des nombres de cordes résultant de procédés de construction *différents*. Cette impossibilité, évidente s'il s'agit d'un nombre de cordes limité, s'étend d'elle-même au cas d'un nombre de cordes illimité.

Tout au plus peut-on prendre des conventions plus larges que celles admises dans les trois problèmes traités au début : chercher, par exemple, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque d'un diamètre déterminé xOy d'une circonférence O soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ou, mieux encore, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque du plan de la circonférence vérifie la condition imposée.

Ces problèmes sont faciles à traiter. Nous y trouverons lieu de confirmer l'indétermination du problème de Bertrand.

Problème I. — *D'un point quelconque* M *situé sur un diamètre déterminé et indéfini* xOy *d'un cercle* O



de rayon 1, *on mène une corde quelconque; quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle?*

Le point M peut se trouver soit entre les points O et H, H milieu du rayon OA, soit entre les points H et A, soit au delà du point A.

Dans le deuxième cas, les cordes menées de M_2 sont plus grandes que le côté du triangle équilatéral si elles tombent dans l'un des angles PM_2O, RM_2A définis par les cordes PM_2Q, RM_2S égales au côté du triangle équilatéral. Au contraire, les cordes qu'il est possible de mener de O tombent dans l'un des angles PM_2x, RM_2P, yM_2R. Ici, le nombre des cas favorables est représenté par la somme d'angles

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2A} = \widehat{PM_2x} + \widehat{AM_2Q} = 2\widehat{PM_2x} = 2\pi - 2\widehat{OM_2Q},$$

et le nombre des cas possibles par

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2P} + yM_2R = \pi.$$

Soit $OM_2 = x$; le triangle OM_2Q donne

$$\frac{OQ}{\sin\widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin\widehat{M_2QO}}, \qquad \frac{1}{\sin\widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}\left(\text{ou } \frac{1}{2}\right)}$$

et

$$OM_2Q = \text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

On remarquera que l'angle OM_2Q est obtus; si donc on prend pour arc sin la détermination comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, on devra écrire

$$OM_2Q = \pi - \text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

Il en résulte que le nombre des cas favorables est représenté par

$$2\,\text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

Dans le premier cas, toutes les cordes vérifient la condition imposée; le nombre des cas possibles étant représenté par π, comme précédemment, le nombre des cas favorables sera également représenté par π.

Dans le troisième cas, où l'on prendra $OM_3 = y$, si M_3T, M_3KL sont respectivement la tangente et la corde égale au côté du triangle équilatéral menées de M_3, les nombres des cas favorables et possibles seront représentés par les angles $\widehat{OM_3K}$, $\widehat{TM_3O}$. Le triangle OKM_3 donne

$$\frac{\sin \widehat{OM_3K}}{OK} = \frac{\sin \widehat{OKM_3}}{OM_3},$$

d'où

$$\sin \widehat{OM_3K} = \frac{\sin \widehat{LKO} \left(\text{ou } \sin \frac{\pi}{6}\right)}{y},$$

donc

$$\widehat{OM_3K} = \arcsin \frac{1}{2y};$$

de plus,

$$OT = OM_3 \sin \widehat{TM_3O} \quad \text{et} \quad \widehat{TM_3O} = \arcsin \frac{1}{y}.$$

Ainsi, *pour un point* M_2, *situé à la distance* x *du centre,* $\frac{1}{2} < x < 1$, *la probabilité d'une corde plus grande que le côté du triangle équilatéral sera*

$$\frac{2 \arcsin \frac{1}{2x}}{\pi}, \quad \left(1 < \frac{\arcsin \frac{1}{2x}}{\pi} < \frac{1}{3}\right);$$

pour un point M_3, *situé à la distance* y *du centre, la probabilité sera*

$$\frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}}, \quad \left(\frac{1}{3} < \frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}} < \frac{1}{2}\right):$$

La probabilité est donc fonction de la distance du point M au centre.

Revenons au calcul de la probabilité pour un point M occupant une position quelconque sur un segment $OP = a$ de la droite xOy.

Partageons OH en n parties égales par les points H_1, H_2, ..., H_{n-1}, situés aux distances

$$x_1 = \frac{1}{2n}, \qquad x_2 = \frac{2}{2n}, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = \frac{n-1}{2n}$$

du point O et prolongeons cette division jusqu'au point A par les points H_{n+1}, H_{n+2}, ..., H_{2n-1} d'abscisses

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},\\
x_{n+2} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{2n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n},
\end{aligned}$$

et enfin jusqu'au point P par les points A_1, A_2, ..., A_p d'abscisses

$$\begin{aligned}
y_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2n},\\
y_{2n+2} &= 1 + \frac{2}{2n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
y_{2n+p} &= 1 + \frac{p}{2n}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des cas favorables sera pour les points x_1, ..., x_{n-1} :

$$(n-1)\pi;$$

pour les points x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1} :

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2 \arcsin \frac{1}{2x_i};$$

pour les points $y_{n2+1}, y_{2n+2}, \ldots, y_{2n+p}$:

$$\sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \text{arc sin} \frac{1}{2y_j};$$

tandis que les ensembles des cas possibles seront respectivement

$$(n-1)\pi, \quad (n-1)\pi, \quad \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \text{arc sin} \frac{1}{y_j}.$$

La probabilité pour l'ensemble des points considérés sera donc

$$\frac{(n-1)\pi + \sum\limits_{i=n+1}^{i=2n-1} 2\,\text{arc sin} \frac{1}{2x_i} + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \text{arc sin} \frac{1}{2y_j}}{2(n-1)\pi + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \text{arc sin} \frac{1}{y_j}}.$$

Or,

$$y_{j+1} - y_j = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2n};$$

écrivant l'expression précédente comme suit :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi + \sum\limits_{i=n+1}^{i=2n+1} 2\,\text{arc sin} \frac{1}{2x_i}(x_{i+1}-x_i) + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \frac{1}{2y_j}(y_{j+1}-y_j)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \text{arc sin} \frac{1}{y_j}(y_{j+1}-y_j)},$$

il résulte, en faisant croître n indéfiniment, que la formule

$$P = \frac{\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\,\text{arc sin} \frac{1}{2x}\,dx + \int_{1}^{a} \text{arc sin} \frac{1}{2y}\,dy}{\pi + \int_{1}^{a} \text{arc sin} \frac{1}{y}\,dy}$$

représente la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point pris au hasard sur le segment

$$OX = a > 1$$

soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit.

Si l'on observe que

$$\int \arc\sin\frac{\alpha}{x}\,dx = x \arc\sin\frac{\alpha}{x} + \alpha\log\left[\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 1}\right],$$

on pourra écrire

$$P = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}) + a \arc\sin\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\log(2a+\sqrt{4a^2-1})}{\frac{\pi}{2} + a \arc\sin\frac{1}{a} + \log(a+\sqrt{a^2-1})}.$$

Si a tend vers l'infini, $a \arc\sin\frac{1}{a}$ a une limite finie et P a par suite même limite que

$$\frac{\frac{1}{2}\log(2a+\sqrt{4a^2-1})}{\log(a+\sqrt{a^2-1})},$$

soit $\frac{1}{2}$:

Ainsi, $\frac{1}{2}$ *est la probabilité pour qu'une corde menée à un cercle d'un point quelconque d'une droite indéfinie, déterminée et homogène passant par son centre, soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.*

Problème II. — *D'un point quelconque du plan d'un cercle O de rayon* 1, *on mène une corde quelconque à ce cercle; quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle?*

Aux chances λ et μ trouvées tout à l'heure pour un point situé sur la droite xOy et à la distance d du centre de la circonférence, il faudra substituer les chances $\lambda . 2\pi d$, $\mu . 2\pi d$ de l'ensemble des points dont la distance au centre de cette même circonférence est précisément d.

On obtiendra ainsi les expressions

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2\pi x_i \arcsin\frac{1}{2x_i} + \sum_{i=2n+1}^{i=2n+p} \pi y_j \arcsin\frac{1}{2y_j}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} \pi x_i + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \pi y_i \arcsin\frac{1}{y_j}}$$

et

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} dx + x\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \arcsin\frac{1}{2x}\,dx + \int_1^a y \arcsin\frac{1}{2y}\,dy}{\displaystyle\int_0^1 x\,dx + \int_1^a y\arcsin\frac{1}{y}\,dy}.$$

Si l'on observe que

$$\int x \arcsin\frac{\alpha}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{x^2-\alpha^2},$$

on trouvera que *la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque intérieur à un cercle de rayon a* ($a > 1$), *concentrique au cercle* O, *soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est*

$$\frac{1+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+4a^2\arcsin\frac{1}{2a}+\sqrt{4a^2-1}}{4-2\pi+4a^2\arcsin\frac{1}{a}+4\sqrt{a^2-1}}:$$

LA PROBABILITÉ EST ENCORE UNE FONCTION DU NOMBRE a.

La limite de cette expression, quand a tend vers l'infini, est $\frac{1}{2}$: *La probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque du plan soit plus grande que le côté du triangle équilatéral est encore* $\frac{1}{2}$.

Quoi qu'il en soit, *le problème dépend d'une convention arbitraire et, pour cette raison, il admet une* INFINITÉ *de solutions.*

Au fait, considérons, par exemple, les deux opérations suivantes qui chacune *matérialisent* le problème de Bertrand :

a. On lance une bille dans un canal creusé le long d'une circonférence; on la fixe en son point d'arrêt; on lui adapte un index rectiligne qu'on lance autour de ce point comme pivot.

b. On lance une bille sur le plan d'un cercle limité à la circonférence du cercle par un rebord; on fixe la bille en son point d'arrêt et on lui adapte un index rectiligne; on fait tourner l'index autour de la bille.

Dans l'une et l'autre de ces opérations, l'index, une fois arrêté, détermine dans le cercle une corde tantôt plus grande, tantôt plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit. Cela posé, répétons l'opération a un très grand nombre de fois et soit α le rapport du nombre des cordes plus grandes que le côté du triangle équilatéral inscrit au nombre des cordes plus petites que ce même côté; puis reprenons l'opération b et calculons ici encore le rapport du nombre des cordes de la première catégorie au nombre des cordes de la seconde catégorie : *on trouvera que les nombres* α, β *tendent vers des limites* NON IDENTIQUES *quand le nombre des expériences s'accroît de plus en plus.*

Nous ne saurions nous en étonner, car, dans chacune de ces deux catégories d'expériences, le problème de Bertrand se trouve matérialisé au prix d'une CONVENTION spéciale, portant sur la manière de lancer la bille qui sert de pivot à l'index.

En dernière analyse, LA SOLUTION DU PROBLÈME DÉPEND D'UNE CONVENTION. J. Bertrand le savait, car, nous dit M. Darboux dans son bel éloge académique du maître vénéré : « Cette question l'a préoccupé; il en avait trouvé la solution, mais il la laisse à chercher à son lecteur ».