Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Note sur l'inversion

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 16-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__16_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[P3b]

NOTE SUR L'INVERSION;

Par M. R. BRICARD.

L'inversion appliquée à une surface fait correspondre aux lignes de courbure de cette surface les lignes de courbure de la surface inverse.

Ce théorème fondamental peut être établi de diverses manières, par l'Analyse et la Géométrie. Je ne sais si l'on en donne la démonstration bien simple que voici :

Soient (S) et (S') deux surfaces inverses par rapport au point O, m et m' deux points correspondants, appartenant respectivement à ces surfaces. On sait que la normale à (S) en m et la normale à (S') en m' se rencontrent et font le même angle, avec mm'. Soit μ le point d'intersection de ces deux normales. On a

$$\mu m = \mu m'.$$

Si donc le point m se déplace sur (S), le point μ décrira la surface (Σ), lieu des points équidistants de (S) et de (S'). Comme il est bien connu, le plan (M), tangent à (Σ) en μ, passe par la droite D, commune au plan (P), tangent à (S) en m, et au plan (P'), tangent à (S') en m'.

Cela posé, faisons décrire à m une ligne de courbure C de (S). Les points m' et μ décriront en même temps des courbes C' et Γ, situées respectivement sur (S') et (Σ). Soient mt, $m't'$, $\mu\tau$, les tangentes à C, C', Γ, respectivement aux points m, m', μ. mm' engendre un cône. mt et $m't'$ se rencontrent donc, et leur point d'intersection α appartient à D.

$m\mu$ engendre une développable [puisque C est ligne de courbure de (S), par hypothèse]. mt et $\mu\tau$ se rencontrent donc, et leur point d'intersection, situé sur D, se confond nécessairement avec α.

Il en résulte que $m't'$ et $\mu\tau$ se rencontrent. La normale $m'\mu$ engendre donc une développable, et C′ est bien une ligne de courbure de (S′). C. Q. F. D.

Soit ω le centre de courbure principal de (S) en m, relativement à la direction principale mt. Soit, de même ω', ...

On reconnaît aisément que les *points* O, ω, ω', *sont en ligne droite.*

En effet, lorsque m décrit C, la droite $m\mu$ est tangente en ω à l'arête de rebroussement de la développable qu'elle engendre. De même, lorsque m' décrit C′, ... Le plan ($Omm'\mu$) reste donc tangent à ces deux arêtes de rebroussement, respectivement aux points ω et ω'. Il en résulte que sa caractéristique contient les points ω et ω'. Or elle contient aussi le point O. Donc, etc.