NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur les fonctions admettant les substitutions d'un groupe donné et seulement ces substitutions-là

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 145-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__145_0>

[D]

SUR LES FONCTIONS ADMETTANT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE DONNÉ ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ [1];

PAR M. E. IAGGI.

Soit G un groupe de substitutions à une variable. Supposons qu'il existe des fonctions complètes uniformes de groupe G; si $y = f(x)$ est l'une d'elles, toutes les autres fonctions uniformes du groupe sont

$$\frac{\lambda y + \mu}{\nu y + \rho} \tag{1}$$

et les substitutions $s_n(x)$, dont le groupe G est alors discontinu, sont les racines de l'équation

$$f(x) = f(s) \tag{2}$$

et en sont racines simples. Soit

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}, \tag{3}$$

où a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois, et où les deux termes de la fraction du second membre sont des fonctions *entières* mises sous forme de séries convergentes.

L'équation aux substitutions peut s'écrire

$$y = f(x) = f(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots}{b_0 + b_1 s + \ldots} \tag{4}$$

ou

$$a_0 - b_0 y + (a_1 - b_1 y)s + (a_2 - b_2 y)s^2 + \ldots = 0, \tag{5}$$

---

[1] *Voir* les Notes précédentes de l'auteur sur ce même sujet (*Nouv. Ann.*, 1901, 1902).

équation dont *le premier membre est une fonction entière de s.*

Réciproquement si $y = f(x)$ est une fonction complète uniforme quelconque, cette fonction admet des substitutions, en groupe discontinu, qui sont toutes les racines de l'équation (2) ou (5) et en sont racines simples.

Or, le premier membre de l'équation (5) étant une fonction entière de s, et les racines de cette équation étant les substitutions s_n du groupe G, on a [1]

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1 - b_1 y}{a_0 - b_0 y} = \varphi_1, \\[2mm] \dfrac{a_2 - b_2 y}{a_0 - b_0 y} = \dfrac{1}{2}\varphi_2 + \dfrac{1}{2}\varphi_1^2, \\[2mm] \dfrac{a_3 - b_3 y}{a_0 - b_0 y} = \dfrac{1}{3}\varphi_3 + \dfrac{1}{2}\varphi_2\varphi_1 + \dfrac{1}{6}\varphi_1^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où

$$\varphi_1 = \sum_n \left(h_n - \frac{1}{s_n}\right),$$

$$\varphi_2 = \sum_n \left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right),$$

$$\varphi_3 = \sum_n \left(l_n - \frac{1}{s_n^3}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

les quantités h_n, k_n, l_m, ... ne dépendant que des coefficients de l'équation en s (5), c'est-à-dire de x et des constantes a, b, et ayant pour principale propriété de rendre convergentes les séries φ_1, φ_2, φ_3, ...

Désignons par ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... les seconds membres

---

[1] *Voir* les Notes de l'auteur : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1901, 1902).

des équations (6)

$$
(7)\quad \begin{cases}
\psi_1 = \varphi_1, \\
\psi_2 = \dfrac{1}{2}\varphi_2 + \dfrac{1}{2}\varphi_1^2, \\
\psi_1 = \dfrac{1}{3}\varphi_3 + \dfrac{1}{2}\varphi_2\varphi_1 + \dfrac{1}{6}\varphi_1^3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Lorsque les séries $\sum \frac{1}{s_n}$, $\sum \frac{1}{s_n^2}$, ..., sont convergentes, les h_n, k_n, ... sont nulles identiquement; et les fonctions ψ_1, ψ_2, ... se réduisent alors aux fonctions symétriques

$$
(8)\quad \begin{cases}
-\sum \dfrac{1}{s_n}, \quad \sum \dfrac{1}{s_m s_n}, \quad -\sum \dfrac{1}{s_m s_n s_p}, \quad \cdots \\
\qquad (m \neq n \neq p \neq \ldots).
\end{cases}
$$

Nous appellerons *fonctions symétriques normales du premier ordre* ces fonctions-là et, dans le cas où ces séries ne sont pas convergentes, nous étendrons cette dénomination aux fonctions ψ qui les remplacent; on voit, sur les équations (6), qu'il peut arriver qu'une fonction ψ_m se réduise à une constante : il faut et il suffit pour cela que b_m et b_0 soient tous deux nuls, ou que a_m et a_0 soient tous deux nuls.

Mais toutes les fonctions ψ ne peuvent se réduire à des constantes, car alors a_0, ou b_0, devrait être nul et avec ce coefficient tous les a, ou tous les b, devraient être nuls aussi, ce qui ne peut être.

Les fonctions ψ non constantes donnent lieu aux théorèmes suivants :

1. *Les premiers membres des équations* (6) *étant tous linéaires en y, deux fonctions ψ non constantes sont fonctions linéaires l'une de l'autre.*

II. *Toute fonction symétrique du premier ordre est une fonction périodique de groupe* G.

III. *Inversement, toute fonction uniforme du groupe* G *est une fonction linéaire d'une fonction symétrique du premier ordre* ψ, *d'ailleurs choisie d'une manière quelconque pourvu qu'elle ne soit pas constante.*

IV. *Les dénominateurs des premiers membres des équations* (6) *étant tous égaux, si* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *désignent des constantes quelconques et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *des entiers quelconques, on a*

$$(9)\qquad \lambda_0+\lambda_1\psi_{\alpha_1}+\lambda_2\psi_{\alpha_2}+\ldots+\lambda_m\psi_{\alpha_m}=\frac{\mu y+\rho}{a_0-b_0 y},$$

ce qui montre qu'une fonction linéaire entière de m *fonctions symétriques du premier ordre* ψ *est une fonction du groupe.*

Les dénominateurs $a_0-b_0 y$ de deux telles fonctions étant les mêmes, *leur quotient sera encore une fonction linéaire de* y, c'est-à-dire une *fonction du groupe,* en sorte que toute fonction du groupe pourra se mettre sous la forme

$$(10)\qquad \frac{\lambda_0+\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2+\ldots}{\mu_0+\mu_1\psi_1+\mu_0\psi_2+\ldots};$$

il suffit pour le voir de vérifier que cette fonction est une fonction linéaire de ψ, par exemple, dans laquelle les coefficients sont *arbitraires.*

Les considérations précédentes donnent un moyen de former les fonctions uniformes de groupe G, au moins lorsque les séries $\sum \frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n^2}, \ldots$ sont convergentes : les fonctions du groupe sont toutes les fonctions linéaires de ψ_1, ou de ψ_2, ou de ψ_3, ... Lorsque les séries précédentes ne sont pas convergentes il faut introduire des quantités h_n, k_n, ... dont la propriété principale est de rendre φ_1, φ_2, ... convergentes, mais qui ne sont pas entièrement déterminées par cette condition, en sorte qu'ayant choisi, par exemple, certaines fonctions h_i qui rendent convergente φ_1, on ne peut être assuré que la fonction φ_1 ainsi formée admet les substitutions du groupe. Il ne paraît guère possible, dans l'état actuel de cette théorie, de lever cette ambiguïté; et nous nous bornons à ce premier résultat que toute fonction du groupe est déterminée comme fonction linéaire de l'une quelconque des fonctions (7)

$$\sum \frac{1}{s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n s_p}, \quad \ldots,$$

lorsque ces séries sont convergentes; et, à ce sujet, on peut ajouter qu'il n'est pas nécessaire que celle des séries qu'on emploie soit absolument convergente; il est évidemment suffisant qu'elle soit convergente lorsque ses termes sont rangés dans un certain ordre.

On peut penser que, au lieu de l'une des fonctions précédentes, on peut employer l'une des fonctions

$$\sum \frac{1}{s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_m^2 s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_n^3}, \quad \ldots.$$

Nous allons voir que, *généralement*, on ne le peut pas.

Appelons fonctions symétriques normales de l'ordre ω des fonctions telles que les fonctions (7) où les s_n sont remplacées par leurs puissances de degré ω, s_n^ω, lorsque les séries sont convergentes; ou, dans le cas général, des fonctions analogues aux fonctions ψ où le même changement a lieu, en même temps qu'un changement correspondant dans les h_n, k_n, ..., ce qui revient, ainsi qu'il est facile de voir, à remplacer dans les ψ_m, φ_1, φ_2, φ_3, ... par φ_ω, $\varphi_{2\omega}$, $\varphi_{3\omega}$, ...

Les fonctions normales d'ordre ω ainsi formées se réduisent aux suivantes lorsque celles-ci sont convergentes :

$$\sum \frac{1}{s_n^\omega}, \quad \sum \frac{1}{s_m^\omega s_n^\omega}, \quad \sum \frac{1}{s_m^\omega s_n^\omega s_p^\omega}, \quad \ldots.$$

Les fonctions φ_2, φ_3, ..., φ_ω sont alors les analogues de $\psi_1 = \varphi_1$ et sont d'ordres respectifs $2, 3, \ldots, \omega$; les fonctions analogues à ψ_2 sont

$$\frac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_2^2), \quad \frac{1}{2}(\varphi_6 + \varphi_3^2), \quad \frac{1}{2}(\varphi_8 + \varphi_4^2), \quad \ldots,$$

et sont d'ordres respectifs $2, 3, 4, \ldots$; elles se réduisent respectivement à

$$\sum \frac{1}{s_m^2 s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_m^3 s_n^3}, \quad \ldots$$

lorsque ces dernières dérivées sont convergentes. Les fonctions d'ordre ω, $\chi_{\omega,1}$, $\chi_{\omega,2}$, $\chi_{\omega,3}$, ... ($\chi_{\omega,m}$ étant celle qui est tirée de ψ_m), sont des fonctions rationnelles des φ et, par suite, de y; elles admettent donc toutes les substitutions du groupe G, mais elles en admettent généralement d'autres. En effet, sauf exception, la fonction φ_2 qu'on tire de la deuxième équation (6) est une fonction du second degré de y; φ_3, qu'on tire de la troisième, est du degré 3 en y; en général, φ_m est du degré m en y; il y a exception, par exemple, si φ_1 se réduit à une constante, car alors φ_2 et φ_3 sont du premier degré en y, φ_k est du second degré, ...; si φ_1 et φ_2 sont constants, φ_3 et φ_4 sont du premier degré, etc.; d'une manière générale, φ_m peut se réduire à un degré inférieur à m, même au premier degré, par exemple si φ_1, φ_2, ..., φ_{m-1} sont des constantes, φ_m peut même se réduire à une constante. Il s'ensuit que $\chi_{\omega,m}$ qui contient linéairement $\varphi_{\omega m}$ est généralement une fonction rationnelle de degré $m\omega$ de y, mais peut se réduire au premier degré, ou même à une constante; $\chi_{\omega,m}$ admet donc généralement d'autres substitutions avec celles de G, et ce n'est que lorsque $\chi_{\omega,m}$ se réduit au premier degré, c'est-à-dire à une fonction linéaire d'une fonction ψ_p que $\chi_{\omega,m}$ est une fonction du groupe. Nous concluons donc :

Les fonctions symétriques normales d'ordre ω, $\chi_{\omega,m}$ sont généralement des fonctions rationnelles de degré $m\omega$ de toute fonction y du groupe; ce n'est que dans les cas particuliers où $\chi_{\omega,m}$ se réduit à une fonction du premier ordre ψ_p qu'on peut employer $\chi_{\omega,m}$ à la détermination du groupe.

Les fonctions φ_ω sont les fonctions d'ordre ω formées au moyen de ψ_1 :

$$\varphi_1 = \chi_{1,1}, \quad \varphi_2 = \chi_{2,1}, \quad \varphi_3 = \chi_{3,1}, \quad \ldots, \quad \varphi_\omega = \chi_{\omega,1}, \quad \ldots.$$

Si $\varphi_1 (= \psi_1)$ n'est pas constante, on emploiera cette fonction, qui est la plus simple à former dans le cas où $\sum \frac{1}{s}$ est convergente, pour déterminer les fonctions $f(x)$ du groupe

$$f(x) = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu}{\nu\varphi_1 + \rho}.$$

Si $\sum \frac{1}{s}$ est convergente, mais constante, on pourra alors employer $\varphi_2 = -\sum \frac{1}{s^2}$

$$f(x) = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu}{\nu\varphi_2 + \rho}$$

et ainsi de suite. Si $\sum \frac{1}{s_n^\omega}$ est convergente et si toutes les sommes analogues relatives aux exposants 1, 2, ..., $\omega - 1$ sont divergentes, on sait ([1]) qu'il est *des cas* où les h_n, k_n, ... sont telles que φ_1, φ_2, ..., $\varphi_{\omega-1}$ se réduisent à des constantes, ou sont même nulles; donc, si ω est le plus petit nombre pour lequel $\sum \frac{1}{s_n^\omega}$ est convergente, on est conduit à employer cette fonction φ_ω de la même manière que lorsque les fonctions d'indices inférieurs sont constantes; les fonctions entières dont le rapport est $y = f(x)$ sont alors de genre $\omega - 1$.

Mais il faut remarquer qu'on ne peut être assuré à l'avance que les h_n, k_n, ... sont tels que φ_1, φ_2, ..., $\omega - 1$ sont constantes. Il s'ensuit que tout ce qu'on peut affirmer, c'est que φ_ω admet toutes les substitutions données, mais peut en admettre d'autres, et il restera à voir si le groupe de φ_ω est le groupe G donné ou contient G comme sous-groupe.

En général, un groupe G de substitutions contient des sous-groupes et se décompose sous forme d'une somme de sous-groupes, c'est-à-dire qu'il existe des sous-groupes

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_p, \quad \ldots$$

tels que le groupe G peut être considéré comme l'ensemble de toutes les substitutions de tous les sous-groupes g_p (sauf dans chaque sous-groupe la substitution identique qu'il ne faut pas répéter) et de la substitution identique $s = 0$.

Supposons qu'il existe une fonction $f_p(x)$, uniforme ou multiforme, admettant les substitutions de g_p. La

([1]) *Voir* la Note : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1902).

fonction cherchée est une fonction uniforme de $f_p(x)$. Les substitutions de g_p sont les racines de l'équation

$$f_p(s) = f_p(x). \tag{11}$$

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ relatives à ce groupe g_p sont déterminées de la même manière que pour le groupe G; en en retranchant respectivement $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots,$ on a les sommes

$$\sum\left(h_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right), \quad \ldots$$

relatives au groupe g_p, sauf, dans chacune d'elles, le terme correspondant à la substitution identique. Si l'on fait le même calcul pour tous les sous-groupes g_p, on voit que chacune des fonctions φ_m relative au groupe G est obtenue par la somme de $\frac{1}{x^m}$ et de termes provenant chacun d'un sous-groupe.

Ceci sera utile pour la formation des fonctions φ, en employant particulièrement des sous-groupes g_p d'ordre 1, c'est-à-dire formés au moyen d'une seule substitution fondamentale.

On pourra aussi procéder autrement : former la somme (y compris la substitution identique) des termes relatifs à un sous-groupe, puis substituer à x dans cette somme une fonction s d'un autre sous-groupe, puis une autre, et ainsi de suite. Dans tous les cas, φ_m sera obtenue par une somme de termes dont la formation est méthodique.

Si, en particulier, toutes les substitutions sont algébriques et, par exemple, si les sous-groupes fondamentaux sont les groupes de N fonctions rationnelles, les termes P_p obtenus par la seconde méthode sont tous algébriques

$$\varphi_m = \sum_p \mathrm{P}_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

et dans certains cas sont même rationnels : on a ainsi une fonction du groupe donné, sous forme de série de fonctions rationnelles ; mais généralement les termes P_p, dans la seconde formation comme dans la première, sont transcendants, même lorsque toutes les substitutions de G sont algébriques. Nous donnerons ultérieurement quelques détails sur les groupes de substitution algébriques et les fonctions qui y sont attachées.

Les relations (6) permettent encore de démontrer une formule qui sera utile dans bien des cas lorsque les séries (7) sont convergentes : soit α une valeur quelconque de x autre qu'un point multiple du groupe ou l'un de ses transformés $s_n(x)$ s'il en existe, et soit β la valeur qu'acquiert y lorsque x égale α. $\beta - y$ s'*annulant* avec $\alpha - x$, on peut écrire

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \Phi(x).$$

Changeons x en $s_n(x)$ dans cette égalité ; y ne changeant pas, on a

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right) \Phi(s_n).$$

Le facteur $1 - \dfrac{\alpha}{s_n}$ ne s'annulant pas lorsque $x = \alpha$, puisque α n'est pas un point multiple du groupe, on est conduit à écrire

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right) \Psi(x, s_n).$$

D'autre part, deux facteurs tels que $1 - \dfrac{\alpha}{s_n(x)}$ ne peuvent s'annuler à la fois ; car, alors on aurait à la fois

$$s_n(x) = s_m(x) = \alpha,$$

ce qui ne pourrait arriver que si α était un point multiple du groupe ou un transformé d'un tel point par les s_n, s'il en existe. On est donc conduit à écrire

$$(12) \qquad 1 - \frac{\beta}{y} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \prod_n \left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right),$$

où le produit $\prod$ est étendu à toutes les substitutions du groupe. Or, P a une expression très simple. En effet, le produit qui suit P, dans l'hypothèse faite, est

$$\frac{y - \beta}{\mathrm{P}y} = 1 + \alpha\psi_1 + \alpha^2\psi_2 + \alpha^3\psi_3 + \ldots,$$

et nous avons vu qu'une telle fonction (9) est une fonction du groupe, c'est-à-dire une fonction linéaire de y; d'ailleurs cette fonction s'annule avec $y - \beta$, donc $\mathrm{P}y$ est de la forme $\lambda y + \mu$:

$$\mathrm{P} = \lambda + \frac{\mu}{y}.$$

On déterminera les deux coefficients λ et μ en se donnant les valeurs de y pour deux nouvelles valeurs α', α'' de x. Si, par exemple, y s'annule avec x [1], on a $\mu = 0$, $\mathrm{P} = $ const.

Dans l'analyse précédente on a supposé que α n'était pas un point multiple de G ou un transformé d'un tel point; mais il est clair qu'on peut poser *a priori* l'égalité (12), où P est déterminé par cette égalité même, et cela *quel que soit* α; le théorème démontré est donc vrai quel que soit α (pourvu que β soit fini et déterminé, c'est-à-dire pourvu que α soit distinct des pôles et points essentiels de y, ou du groupe). Ce qu'il y a de parti-

(1) Parmi les fonctions du groupe, fonctions linéaires de l'une d'elles, il y en a toujours une infinité qui satisfont à cette condition.

culier dans le cas où α est un point multiple du groupe, c'est que α est une racine de l'équation $y - \beta = 0$, d'un ordre égal au nombre des substitutions

$$s_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

qui s'égalent en ce point, nombre qui peut d'ailleurs être infini.

Dans certains cas particuliers, il existe des fonctions entières parmi celles de groupe G. Supposons que y soit entière, on voit par les équations (6), en y faisant

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0,$$

que l'on a

$$\frac{a_m}{a_0 - y} = \psi_m, \qquad \frac{\lambda}{a_0 - y} = \lambda_0 + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots$$

et, par suite, que la formule générale des fonctions entières est

$$(13) \qquad \frac{\lambda}{\psi_m} + \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots} + \mu$$

En particulier, si $\sum \frac{1}{s_n}$ est convergente, non constante, on peut prendre

$$(14) \qquad y = \frac{\lambda}{\sum\limits_n \frac{1}{s_n}} + \mu.$$

Toutes les considérations précédentes s'appliquent aux fonctions complètes uniformes, qui, toutes, comme on sait, ont des substitutions qui les laissent invariables. Elles ne s'appliquent pas, en général, aux fonctions multiformes, parce que celles-ci ne sont périodiques que dans des cas exceptionnels; mais les formules qui permettent de trouver toutes les fonctions uniformes d'un groupe G discontinu, lorsqu'il en existe, s'appliquent intégralement au cas où il existe des fonctions multiformes, et non des fonctions uniformes, admettant les substitutions du groupe G donné et seulement ces substitutions-là. Nos formules donnent alors des fonctions multiformes du groupe donné, fonctions ponctales, linéales ou aréales, suivant que le groupe est discontinu, simplement continu ou doublement continu. Mais, si ce sont les plus simples fonctions de groupe G, ce ne sont plus les seules, puisque si $f(x)$ est une *fonction multiforme* admettant les s_n données et seulement celles-là, en un mot de groupe G, toute fonction de la forme

$$\chi[f(x)],$$

où χ est une fonction multiforme non périodique quelconque, satisfait encore à ces conditions.

Nous allons maintenant donner quelques exemples simples de détermination de fonctions uniformes au moyen de leur groupe de substitutions :

1° Considérons d'abord le groupe des substitutions

$$s_n(x) = n\pi + x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La série

$$\sum_n \frac{1}{s_n(x)} = \sum \frac{1}{n\pi + x}$$

n'est pas *absolument convergente;* mais on peut ranger ses termes dans un ordre tel qu'elle soit convergente : on sait, en effet, que l'on peut écrire

$$\sin x = x \prod_n{}' \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

en associant par couples les facteurs dans lesquels n a deux valeurs égales et de signes contraires et faisant croître ensuite n à partir de 1. On a donc dans les mêmes conditions, en prenant la dérivée logarithmique

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{x} + \sum' \dfrac{1}{n\pi + x} = \sum \dfrac{1}{n\pi + x} \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

On vérifie ainsi que les fonctions du groupe sont les fonctions linéaires de $\tan x$.

2° Considérons le groupe formé par les deux sortes de substitutions

$$\begin{matrix} s_n(x) = 2n\pi + x \\ s_p(x) = (2p+1)\pi - x \end{matrix} \qquad (n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme $\sum \frac{1}{s}$ se décompose sous la forme

$$\sum_n \frac{1}{s_n} + \sum_p \frac{1}{s_p}.$$

D'après ce qui précède, on a

$$\sum_n \frac{1}{s_n} = \sum \frac{1}{2n\pi + x} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n\pi + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}}.$$

Pour former $\sum \frac{1}{s_p}$, nous écrirons

$$\cos x = \prod \left(1 - \frac{x}{(2p+1)\frac{\pi}{2}}\right) \qquad (2p+1 = \pm 1, \pm 3, \ldots),$$

produit convergent si l'on associe les valeurs égales et de signes contraires de $2p+1$, et si l'on fait croître $2p+1$ à partir de 1. La dérivée logarithmique donne alors

$$-\tan x = \sum \frac{-1}{(2p+1)\frac{\pi}{2} - x} = -2 \sum \frac{1}{(2p+1)\pi - 2x}$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{1}{s_p} = \sum \frac{1}{(2p+1)\pi - x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}.$$

On a donc enfin

$$(16) \quad \sum \frac{1}{s} = \sum_n \frac{1}{s_n} + \sum_n \frac{1}{s_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} + \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

On vérifie ainsi qu'il existe des fonctions entières du groupe, parmi lesquelles est $\sin x$, qui sont données par la formule générale

$$(14) \qquad \frac{\lambda}{\sum \frac{1}{s}} + \mu.$$

La formule générale (12) conduit dans ce cas, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = 1$, à la relation

$$1 - \sin x = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

et, par suite, à celle-ci

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

qui se trouve ainsi démontrée directement en ne se servant que du développement en produit de $\sin x$, et des substitutions de cette fonction.

3° Considérons encore le groupe des substitutions de $\cos x$

$$\begin{aligned} s_n &= 2n\pi + x \\ s_p &= 2p\pi - x \end{aligned} \qquad (n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme des inverses des substitutions est

$$\sum \frac{1}{2n\pi + x} + \sum \frac{1}{2p\pi - x}.$$

Or, n et p prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, on voit que les termes dans lesquels $p = -n$ se détruisent deux à deux en sorte que cette somme est nulle : on peut alors employer la somme des inverses des carrés des substitutions

$$\sum \frac{1}{s_n^2} + \sum \frac{1}{s_p^2}.$$

Puisque les substitutions s_p ne sont autres que les substitutions s_n changées de signe, la somme précédente est $2\sum \frac{1}{s_n^2}$. Or

$$\sum \frac{1}{s_n} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}}.$$

La somme cherchée est donc, en remarquant que $s'_n = 1$, $\frac{d\frac{1}{s}}{dx} = -\frac{1}{s^2}$,

$$2\sum \frac{1}{s_n^2} = -2\sum \frac{d}{dx}\frac{1}{s_n} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1-\cos x}.$$

On vérifie ainsi que les fonctions entières du groupe sont données par la formule (13).

On remarquera qu'au contraire, dans les deux cas précédents, par exemple dans le premier, où $\sum \frac{1}{s}$ n'est pas constante,

$$\sum \frac{1}{n\pi + x} = \sum \frac{1}{s_n} = \frac{1}{\operatorname{tang} x},$$

la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ qu'on peut obtenir en dérivant par rapport à x

$$-\sum \frac{1}{s_n^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$$

est une *fonction du second degré de toute fonction du groupe*, par exemple de $\tang x$ (¹).

4° Considérons le groupe de la fonction elliptique $u_x = \operatorname{sn} x$

$$s_{m,m'} = 4mK + 2m'iK' + x,$$
$$s_{p,p'} = 2(2p+1)K + 2p'iK' - x$$
$$(m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme des substitutions

$$\sum_{m'}\sum_{m}\frac{1}{s_{m,m'}} + \sum_{p'}\sum_{p}\frac{1}{s_{p,p'}}$$

qui n'est pas absolument convergente est cependant convergente lorsqu'on range ses termes dans un certain ordre qui résulte de ce qui suit et qui est d'ailleurs employé dans la théorie des fonctions H, Θ de Jacobi. Remarquant que p' et m', comme p et m, sont indépendants et prennent toutes les valeurs entières positives et négatives, nous ferons $p' = -m'$ et nous poserons

$$2m'iK' + x = z.$$

La somme est alors

$$\sum_{z}\left[\sum_{m}\frac{1}{4mK + z} + \sum_{p}\frac{1}{2(2p+1)K - z}\right]$$

$(m, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ z = x + 2m'iK',\ m' = 0, \pm 1, \pm 2)$,

---

(¹) Dans les exemples qui précèdent on aurait pu employer des séries absolument convergentes sous la forme

$$\sum\left(h_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right),$$

mais cela complique l'écriture et ne donne pas d'autre résultat.

ce qu'on peut écrire encore

$$\frac{\pi}{2K}\sum_z\left[\sum_m \frac{1}{2m\pi+\frac{\pi}{2K}z}+\sum_p \frac{1}{(2p+1)\pi-\frac{\pi}{2K}z}\right].$$

Si l'on compare la somme entre crochets à la somme (16) relative à $\sin x$, on voit que cette somme est convergente en associant les valeurs de m et de p, égales et de signes contraires, et que cette somme est

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}z}.$$

La somme cherchée relative au groupe donné est donc

$$\frac{\pi}{2K}\sum_z \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}z}=\frac{\pi}{2K}\sum_{m'}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2m'iK')}$$

$$(m'=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

ou, en faisant sortir le terme dans lequel m' est nul, et associant deux à deux ceux dans lesquels m' a la même valeur arithmétique,

$$\sum\frac{1}{s}=\frac{\pi}{2K}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}x}$$

$$+\frac{\pi}{2K}\sum_n\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}\right]$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Sous cette forme, la somme est convergente, n croissant à partir de 1.

L'ensemble des deux termes soumis au signe $\sum$ prend d'ailleurs la forme

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')+\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{2K}x\cos ni\pi\frac{K'}{K}}{\cos 2ni\pi\frac{K'}{K}-\cos\frac{\pi}{K}x}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{2K}x\frac{q^n+q^{-n}}{2}}{\frac{q^{2n}+q^{-2n}}{2}-\cos\frac{\pi}{K}x}.$$

On a donc

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \sum\frac{1}{s} &= \frac{\pi}{2K}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}x} \\ &\quad+\frac{2\pi}{K}\sin\frac{\pi}{2K}x\sum_n\frac{q^n(1+q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi}{K}x+q^{4n}} \\ &\qquad\left(q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}\right). \end{aligned}\right.$$

Ceci est une formule connue; mais on peut la déterminer complètement par notre théorie. On sait, en effet, que la somme obtenue ainsi est une fonction linéaire de la fonction $u=\operatorname{sn}x$ du groupe; or, on voit facilement que :

1° Le second membre devient infini lorsque x s'annule ou prend une valeur quelconque $2mK+2m'iK'$ qui annule u;

2° Le second membre s'annule lorsque $x=iK'$, c'est-à-dire lorsque u devient infini.

La fonction formée, qu'on sait être une fonction linéaire de u, ne peut donc être que

$$\frac{\lambda}{u},$$

où λ est une constante ([1]). On trouve λ en donnant à x une valeur particulière, par exemple la valeur K; ou mieux, multipliant le développement précédent et $\frac{\lambda}{u}$ par x et faisant $x = 0$, $\frac{u}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2K}x}{\frac{\pi}{2K}x} = 1$, on a

$$\lambda = 1;$$

la valeur K attribuée à x donne alors la formule connue

$$1 = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

ou

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\sum_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}.$$

([1]) On arrive à la même formule, plus rapidement, en considérant le groupe de la fonction de $y = \sin\frac{\pi}{2K}x$

$$\varphi(y) - \operatorname{sn} x \qquad \left(y = \sin\frac{\pi}{2K}x\right),$$

dont les substitutions sont (*Nouv. Ann.*, 1900)

$$s_n(y) = a_n y + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_n^2} = \sin\frac{\pi}{2K}(x + 2niK')$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On est ainsi conduit immédiatement à la série convergente calculée plus haut

$$\sum \frac{1}{s_n(y)} = \sum \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

qui n'est autre que $\frac{1}{\varphi(y)} = \frac{1}{\operatorname{sn} x}$.

La somme $\sum \frac{1}{s}$ n'étant pas constante et étant convergente au moins d'une certaine manière, la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ est, d'après notre théorie, une fonction du second degré de u; cette remarque conduit à une démonstration intéressante d'une formule connue; on a

$$\sum \frac{1}{s^2} = \frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2}.$$

Or, la fonction H peut s'écrire, λ étant une constante,

$$\begin{aligned} H &= \lambda x \prod \left(1 + \frac{x}{2mK + 2m'iK'}\right) \\ &= \lambda x \prod{}' \frac{s_{m,m'}}{4mK + 2m'iK'} \prod \frac{s_{p,p'}}{2(2p+1)K + 2p'iK'} \end{aligned}$$

$$(m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où les produits indiqués sont convergents lorsqu'on range les facteurs dans un certain ordre connu qui résulte d'ailleurs de l'étude précédente. Les dérivées de $s_{m,m'}$, $s_{p,p'}$ sont $s'_{m,m'} = 1$, $s'_{p,p'} = -1$ et, par conséquent, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation précédente, on a

$$\frac{H'}{H} = \frac{1}{x} + \sum{}' \frac{1}{s_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s_{p,p'}} = \sum \frac{1}{s_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s_{p,p'}}$$

et, en dérivant encore une fois,

$$\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} = -\sum \frac{1}{s^2_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s^2_{p,p'}} = -\frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2}.$$

Les zéros de $s_{m,m'}$, $s_{p,p'}$ ne sont autres que ceux de u; ce sont ainsi des infinis doubles du premier membre : donc $a' = b' = 0$. D'ailleurs

$$s_{m,m'}(-x) = -s_{-m,-m'}(x), \quad s_{2p+1,p'}(-x) = -s_{-(2p+1),-p'}(x)$$

et, par conséquent, lorsqu'on change x de signe, les éléments associés deux à deux de la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ ne font que se permuter, et cette somme ne change pas; mais u change de signe, donc $b = 0$. On a donc finalement

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\mathrm{H} = \frac{\lambda}{u^2} + \mu, \tag{18}$$

où λ et μ sont deux constantes qu'on peut déterminer en faisant $x = \mathrm{K}$, $u = 1$ et $x = i\mathrm{K}'$, $\frac{1}{u} = 0$; on peut trouver ainsi la formule servant à l'intégration de l'intégrale de seconde espèce.

5° Considérons encore le groupe de la fonction $v = \mathrm{sn}(\mathrm{K} + x)$

$$\begin{aligned} s_{m,m'} &= 4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}' + x \\ s_{p,p'} &= 4p\mathrm{K} + 2p'i\mathrm{K}' - x \end{aligned} \qquad (m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On voit que pour $p = -m$, $p' = -m'$, on a

$$s_{p,p'} = -s_{m,m'}$$

et par conséquent que la somme $\sum \frac{1}{s}$ est nulle. La somme $\frac{1}{s^2}$ est alors une fonction du groupe, si cette somme n'est pas constante et peut être mise sous forme de série convergente. On a d'ailleurs, pour la même raison que plus haut,

$$\sum \frac{1}{s_{m,m'}^2} = \sum \frac{1}{s_{p,p'}^2}, \qquad \sum \frac{1}{s^2} = 2 \sum \frac{1}{s_{m,m'}^2}.$$

La fonction

$$\sum \frac{1}{(4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}' + x)^2} \qquad (m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est donc une fonction du groupe. On peut le vérifier comme il suit ([1]) : considérons la transformation de $\operatorname{sn} x$

$$u_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2}x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2}\,\frac{1-v}{1-kv}} \quad ([2])$$

obtenue en divisant par 2 l'argument dans la transformation de Gauss et pour laquelle on a

$$K_1 = \frac{1+k}{2}2k, \qquad iK'_1 = \frac{1+k}{2}iK'.$$

Posant $g_1 = \frac{1+k}{2}$, $x_1 = g_1 x$, la fonction H de Jacobi relative à cette fonction peut s'écrire, dans les mêmes conditions de convergence que H,

$$\begin{aligned} &Cx_1 \prod{}' \left(1 + \frac{x_1}{2mK_1 + 2m'iK'_1}\right) \\ &= Cg_1 x \prod{}' \left(1 + \frac{x}{4mK + 2m'iK'}\right). \end{aligned}$$

La dérivée seconde du logarithme de cette fonction est, d'après ce que nous avons vu à propos de $u = \operatorname{sn}(x, k)$, une fonction de la forme

$$\frac{\lambda}{u_1^2} + \mu = \lambda \frac{2}{1+k}\,\frac{1-kv}{1-v} + \mu;$$

d'ailleurs, la dérivée première est

$$\frac{1}{x} + \sum{}' \frac{1}{4mK + 2m'iK' + x} = \sum \frac{1}{4mK + 2m'iK' + x}$$

et la dérivée seconde

$$-\sum \frac{1}{(4mK + 2m'iK' + x)^2}.$$

([1]) On pourrait trouver une formule analogue à celle de $\frac{1}{u}$ en effectuant, comme plus haut, la somme indiquée; mais le procédé de vérification que nous employons est plus rapide.

([2]) Voir : *Sur une représentation des fonctions elliptiques et leur analogie avec les fonctions circulaires* (*Nouv. Ann.*, 1901).

La vérification est donc faite; on voit, de plus, que le dénominateur de cette fonction linéaire de v est $1 - v$. Quant aux facteurs λ et μ on les déterminera en donnant à x deux valeurs particulières.

La fonction p de Weierstrass, qui est une fonction linéaire de tout cosinus elliptique v ayant les mêmes périodes ([1]), donne lieu aux mêmes calculs. A ce sujet, il convient de remarquer qu'au lieu des séries semi-convergentes que nous avons employées qui conduisent aux fonctions H, Θ de Jacobi, on peut employer des séries absolument convergentes sous la forme

$$\sum\left(k_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right), \quad \cdots$$

ce qu'on sait faire dans le cas des fonctions elliptiques; ces séries conduisent alors aux fonctions σ de Weierstrass, mais aux mêmes fonctions périodiques $u = \operatorname{sn} x$, $v = \operatorname{sn}(K + x)$.

Sur les fonctions rationnelles. — Les théorèmes démontrés plus haut sur les fonctions complètes uniformes s'appliquent évidemment aux fonctions rationnelles avec cette simplification que les sommes

$$\sum \frac{1}{s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n}, \quad \cdots$$

sont ici toujours convergentes. De plus, au lieu de ces sommes, on peut employer celles-ci

$$\sum s_n, \quad \sum s_m s_n, \quad \cdots,$$

([1]) On sait qu'on peut exprimer p de six manières, deux à deux de même forme, en fonction linéaire d'un cosinus elliptique v de mêmes périodes [*Sur les fonctions de première espèce* (*Nouv. Ann.*, 1898)].

car l'équation (5) se met sous la forme suivante, μ étant le degré de la fonction rationnelle y considérée

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 - b_0 y + (a_1 - b_1 y) s + \ldots \\ \quad + (a_{\mu-1} - b_{\mu-1} y) s^{\mu-1} + (a_\mu - b_\mu y) s^\mu = 0, \end{array} \right.$$

et l'on peut employer, soit les équations (6) dans lesquelles les h_n, k_n, ... sont nulles, soit les suivantes

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_{\mu-1} - b_{\mu-1} y}{a_\mu - b_\mu y} = \psi'_1 = -\sum s_n \quad = \varphi'_1, \\ \dfrac{a_{\mu-2} - b_{\mu-2} y}{a_\mu - b_\mu y} = \psi'_2 = \quad \sum s_m s_n = \dfrac{1}{2}\varphi'_2 + \dfrac{1}{2}\varphi'^2_1, \\ \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{a_0 - b_\mu y}{a_\mu - b_\mu y} \quad = \psi'_\mu = (-1)^\mu \prod s_n, \end{array} \right.$$

où ψ'_m est la somme des produits m à m des s_n et φ'_m la somme de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ changée de signe. Ces fonctions ψ' sont d'ailleurs liées aux premières ψ d'une manière simple et se mettent sous la forme (10) et réciproquement.

Les plus simples des fonctions à employer pour former les fonctions du groupe sont alors

$$\sum s_n, \quad \sum \frac{1}{s_n}, \quad \prod s_n.$$

Il peut arriver que celles-ci se réduisent à des constantes; alors on emploiera des fonctions symétriques *du second ordre* qui se réduisent au premier [1]. Un

---

[1] On remarquera que, s'il existe des fonctions entières y du groupe (polynomes), $b_1 = b_2 = \ldots = b_\mu = 0$, toutes les fonctions ψ' se réduisent à des constantes sauf la dernière $\prod s_n$ qui est une de ces fonctions entières; on emploiera donc pour déterminer ces fonctions entières, soit $\prod s_n$, soit une fonction $\dfrac{1}{\psi_m}$ inverse d'une quelconque des ψ_m.

exemple simple est fourni par le groupe

$$s = x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1 - x, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x-1}{x}, \quad \frac{x}{x-1},$$

pour lequel les trois fonctions précédentes sont constantes ; on emploiera alors $\sum s^2$ ou $\sum \frac{1}{s^2}$, qui, d'après ce qui a été dit précédemment, se réduit dans ce cas au premier ordre et est une fonction du groupe. Si l'on pose $x' = 1 - x$, on a

$$\sum s^2 = \frac{(x^2 + x'^2)(1 + x^2 x'^2) + x^4 + x'^4}{x^2 x'^2},$$

$$2 + \sum s^2 = \frac{(x^2 + x'^2)(1 + x^2)(1 + x'^2)}{x^2 x'^2}.$$

L'une des plus simples fonctions du groupe, fonction linéaire de la précédente, est

$$\frac{4}{27} \frac{(1 - xx')^3}{x^2 x'^2} = \frac{4}{27} \frac{(1 - x + x^2)^3}{x^2(1-x)^2}$$

fonction bien connue sous le nom d'*invariant absolu* dans la théorie des fonctions elliptiques modulaires, x étant égal à k^2, carré du module.

Les considérations qui précèdent s'appliquent à tout groupe d'un nombre fini de substitutions : dans tous les cas, les fonctions $\sum s$, $\prod s$, $\sum \frac{1}{s}$, ou à leur défaut des fonctions symétriques d'ordre supérieur se réduisant au premier ordre, donnent toujours des fonctions du groupe, rationnelles ou non.

Il en est de même de la formule (12) concernant deux valeurs correspondantes de x et de la fonction y du groupe ; mais dans le cas d'un groupe fini, cette formule peut s'écrire d'une manière plus simple en employant les fonctions symétriques des s_n au lieu de celles de leurs inverses $\frac{1}{s_n}$. On a visiblement par la même démonstration :

$$(19) \qquad \beta - y = \mathrm{P}(\alpha - x) \prod_n [\alpha - s_n(x)]$$

où le facteur P est de la forme $\lambda y + \mu$.

Une application fort simple des théories précédentes dans le cas d'un groupe fini est celle de la recherche des transformations rationnelles des fonctions elliptiques. Sans entrer dans plus de détails, on voit immédiatement que l'emploi des expressions $\sum_n s_n$, $\prod_n s_n$, fonctions linéaires de toute fonction du groupe, conduit aux calculs mêmes et aux formules d'Abel pour la transformation impaire de $\operatorname{sn} x$, les fonctions s_n étant de la forme

$$\operatorname{sn}(x + n\alpha) \qquad \left(n = 1, 2, \ldots, \mu;\ \alpha = \frac{4a\mathrm{K} + 2a'i\mathrm{K}'}{2\mu + 1}\right).$$

Quant à la fonction $\sum \frac{1}{s}$, elle conduit à une autre formule, et il en serait de même de toute fonction ψ'_m (6'), mais ces formules sont plus compliquées.

La formule (19) conduit de même aux formules connues de $1 \pm y$, $1 \pm \lambda y$ (y étant le transformé de $\operatorname{sn} x$, de module λ) et fournit de ces formules une démonstration fort simple. On voit que toute fonction uniforme, et en général toute fonction périodique, susceptible de *transformations* en d'autres de mêmes formes, et dont les groupes sont analogues, satisferont à des relations analogues à celles qu'expriment les formules de $1 \pm y$, $1 \pm \lambda y$ dans les transformations de $\operatorname{sn} x$.

Il convient de remarquer, au sujet des fonctions elliptiques, que l'emploi de la théorie générale des groupes de substitutions n'est autre que la méthode même d'Abel ; si celui-ci n'a pas dégagé explicitement, des théories particulières où il s'en est servi, la théorie générale des groupes et des fonctions y attachées, s'il n'a pas prononcé le mot de groupe, du moins on peut dire que la notion générale de groupes de substitutions à une variable se retrouve dans toutes ses théories, et il s'en est servi de la manière la plus heureuse. C'est là surtout ce qu'ont d'original et de personnel les travaux d'Abel, qui est ainsi le premier auteur de la découverte des groupes de substitutions à une variable ([1]).

On pourra comparer la méthode que nous venons d'exposer pour déterminer une fonction *périodique* au moyen de ses substitutions, avec la méthode que nous avons précédemment donnée ([2]) qui, employant les *périodes* $p_n = s_n(x) = n$, au lieu des substitutions s_n elles-mêmes, détermine par une équation du troisième ordre les fonctions du groupe, ou par une équation linéaire homogène du deuxième ordre les fonctions entières dont les quotients sont les fonctions du groupe, ainsi que le *multiplicateur* de ces fonctions entières.

On voit que, dans les deux cas, on a à employer des séries $\sum \frac{1}{s}, \sum \frac{1}{s^2}, \dots$ ou $\sum \frac{1}{p}, \sum \frac{1}{p^2}$ qui peuvent n'être pas convergentes et qu'alors l'introduction de fonctions h, k, l rendant convergentes ces séries complique le problème, le choix de ces fonctions h, k, l, présentant une ambiguïté. Lorsqu'on peut déterminer sans ambi-

([1]) Cette découverte a été faussement attribuée à Galois par plusieurs auteurs; Galois avait surtout étudié les travaux d'Abel et il ne serait pas étonnant que ses propres travaux s'en soient ressentis. Mais la principale découverte de Galois, les groupes dits *de Galois*, sont des cycles de permutations linéaires de lettres et n'ont rien de commun avec les groupes de substitutions à une variable.

([2]) *Détermination des fonctions*, etc. (*Nouv. Ann.*, 1902).

guïté ces fonctions h, k, ou lorsque les séries considérées sont convergentes, l'avantage paraît être en faveur de la méthode que nous venons d'exposer, car elle donne immédiatement, sans intégration à effectuer, une expression (ou plusieurs) des fonctions du groupe; par exemple, dans le cas du groupe de $\operatorname{sn} x$, on a obtenu le développement connu (17) de $\frac{1}{\operatorname{sn} x}$ et on aurait celui de $\operatorname{sn} x$ en y changeant x en $x - i\mathrm{K}'$.

Mais la méthode de l'équation aux fonctions à multiplicateurs formée au moyen des périodes $p = s - x$, qui a le désavantage d'exiger une intégration, a d'autre part l'avantage de déterminer les *fonctions entières* dont les fonctions du groupe sont les quotients et, en outre, le *multiplicateur* de ces fonctions; nous avons vu (*loc. cit.*) que cette méthode conduit, dans le cas du groupe de $\operatorname{sn} x$, aux fonctions H, Θ, ... de Jacobi, et aux fonctions σ, σ_α, ... de Weierstrass, et donne immédiatement leur multiplicateur. Chacune des deux méthodes a donc ses avantages propres et aussi ses inconvénients; cependant, ce que l'on sait de l'importance des fonctions entières H, Θ, ... ou σ, dans le cas des fonctions elliptiques, importance que n'ont pas les développements de la forme (17) montre que c'est la première méthode que nous avons donnée qui, quoique au prix d'une intégration, fournit les résultats les plus utiles ([1]).

([1]) Il ne faut pas oublier également que cette méthode nous a donné divers autres résultats : conditions nécessaires pour qu'il existe des fonctions du groupe, sous forme d'identités auxquelles doivent satisfaire les substitutions; condition unique ($\Phi'' = \Phi\Psi$) pour qu'il existe des fonctions entières du groupe donné, et expressions de ces fonctions entières, etc.

Cependant, la seconde méthode fournit des résultats positifs dans certains cas où la première ne fournit que des résultats ambigus : nous avons vu, en effet, que la série $\sum \frac{1}{s^{\omega}}$ est, lorsqu'elle est con-

Rien n'empêchera d'ailleurs d'employer à la fois l'une et l'autre des deux methodes et d'en contrôler les applications l'une par l'autre.

---

vergente et non constante, une fonction qui admet toutes les substitutions du groupe et que, dans les cas ou les series

$$(a) \qquad \sum \frac{1}{s}, \quad \sum \frac{1}{s^2}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{s^{\omega-1}}$$

sont constantes, et dans certains cas ou ces séries sont divergentes, cette fonction $\sum \frac{1}{s^\omega}$ n'admet pas d'autres substitutions du groupe, cette fonction est donc toujours une indication lorsque les precedentes sont divergentes et, dans certains cas, elle est même l'une des fonctions cherchees du groupe donné

Si l'on considere au contraire, pour appliquer la premiere methode, les series analogues aux precedentes, formees au moyen des periodes $p = s - x$ du groupe

$$(b) \qquad \sum \frac{1}{p}, \quad \sum \frac{1}{p^2}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{p^{\omega-1}}, \quad \sum \frac{1}{p^\omega}$$

dans l'hypothese ou la $\omega^{\text{ième}}$ est convergente et les precedentes divergentes ou nulles, on ne peut se servir de $\sum \frac{1}{p^\omega}$ et eliminer les autres en choisissant, comme on peut le faire dans certains cas pour les series $\sum \frac{1}{s^p}$, les $h_1, h_2, \ldots, h_{\omega-1}$ de maniere que les séries

$$(c) \qquad \sum \left(h_1 - \frac{1}{p}\right), \quad \sum \left(h_2 - \frac{1}{p^2}\right), \quad \ldots, \quad \sum \left(h_{\omega-1} - \frac{1}{p^{\omega-1}}\right)$$

soient nulles En effet, les fonctions $\Theta = \lambda\Theta_1 + \mu\Theta_2$ sont determinees par les equations

$$\Theta_1\Theta_2 - \Theta_2\Theta_2 = \Phi,$$
$$\Theta_1\Theta_2 - \Theta_2\Theta_1 = \Phi \quad = 2\Phi \sum \left(h_1 - \frac{1}{p}\right),$$
$$\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_4' = \Phi\Psi = 3\Phi \left\{ \left[\sum \left(h_1 - \frac{1}{p}\right)\right]^2 + \sum \left(h_2 - \frac{1}{p^2}\right) \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Theta_1\Theta_2^{(\omega+1)} - \Theta_2\Theta_1^{(\omega+1)} = \chi_\omega,$$

où χ_ω ne dépend que des series (c) et de $\sum \frac{1}{p^\omega}$ et se réduit a cette derniere a un facteur constant pres lorsque les series (c) s'annulent, on pourrait tirer parti de cette circonstance dans le cas