Nouvelles annales de mathématiques

Canon

Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 13-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__13_1>

[K2c]

DÉMONSTRATION DE LA CONSTRUCTION TROUVÉE PAR HAMILTON POUR DÉTERMINER LE POINT OÙ LE CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE TOUCHE LE CERCLE INSCRIT;

PAR M. CANON.

Gérono, en 1865, a donné dans ce Journal une démonstration géométrique de cette construction, à laquelle Hamilton était arrivé analytiquement.

En voici une autre plus courte que celle de Gérono.

Soient

A un sommet du triangle ;
M le milieu du côté opposé ;
E le point de contact de ce côté et du cercle inscrit (I) de centre I ;
P le pied de la hauteur AP.

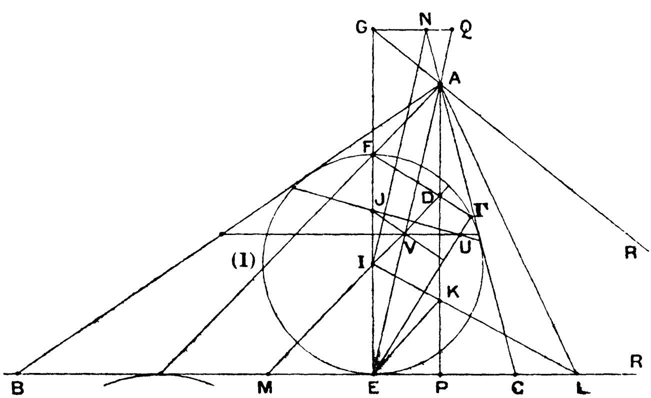
Menons la parallèle EK à MI, et appelons L le point où IK coupe MP. On a

$$\frac{LM}{LE} = \frac{LE}{LP},$$

d'où

$$\overline{LE}^2 = LP.LM.$$

Le point L appartient donc à la tangente menée au



cercle (I) et au cercle des neuf points en leur point de contact Γ.

La droite qui va de A au point F, diamétralement opposé à E, est parallèle à MID, par suite AD est égal à IF. La parallèle GAR à IL donne G et le segment FG est aussi égal à IF.

Menons la droite EAQ, jusqu'à sa rencontre Q avec la parallèle GQ à ELR, et la droite IN parallèlement à EA qui coupe GQ en N. On a

$$\frac{RL}{LE} = \frac{GI}{IE} = \frac{GN}{NQ},$$

ce qui montre que N, A, L sont en ligne droite.

Le point J, milieu de IF, est, par rapport à (I), le pôle de GN, puisque

$$IJ . IG = \overline{IF}^2.$$

La perpendiculaire JU à IN est la polaire de N, elle coupe la perpendiculaire EΓ à IL au point U qui est le pôle de NAL. La polaire de A passe donc par U. La droite AE passe par le milieu V de ID et alors la droite JV est parallèle à FD et à IK.

Dans le triangle JVE, la droite EUΓ est une hauteur, de même JU perpendiculaire à EV, la droite VU est alors perpendiculaire à EJ.

Nous voyons ainsi que la polaire de A, par rapport à (I), et la parallèle à MP, à égales distances de cette droite et de A, se coupent en un point U qui, avec E, détermine la droite EUΓ.

Autrement dit : *La droite, qui joint les points de contact avec* (I) *des côtés* AB, AC *du triangle, et la droite, qui joint les milieux de ces côtés, se coupent en un point* U : *la droite* EU *rencontre le cercle* (I) *au point* Γ *cherché.*

C'est là la construction d'Hamilton.

Remarques. — Dans le courant de cette démonstration nous avons trouvé des constructions de Γ : ce point est le symétrique de E par rapport à IL; il est à la rencontre de (I), soit avec la parallèle FD à IL, soit avec la droite qui va de F au milieu de AI.

La droite IL peut s'obtenir en joignant le point I au point K, extrémité du segment AK égal à FE.