Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'études supérieures

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 137-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__137_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

Caen.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *trouver le lieu* S *d'une circonférence qui s'appuie sur* OZ *tandis que son plan reste parallèle à* OXY *et que son centre décrit la droite* $y = 0$, $x + z = a$. *Calculer le volume* V *compris entre les parties positives des plans coordonnés, le plan* $x = a$ *et la surface* S. *Lignes de plus grande pente de* S *par rapport au plan des* xy.

II. *Une barre* OP, *très mince, homogène, de longueur* $2l$, *peut tourner dans un plan* H *autour de l'extrémité* O *qui est fixe; chacun de ses éléments est attiré vers un point* A *du plan* H *avec une force égale au produit d'une constante* ω^2 *par la masse de l'élément et par sa distance au point* A; OA *est égal à* $\frac{2}{3}l$. *A l'instant initial, l'angle* POA *est droit et la barre animée d'une vitesse angulaire* ω *de sens tel que l'angle* POA *commence par croître. Déterminer le mouvement de la barre.*

III. Épreuve pratique. — *Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage du Soleil au périgée jusqu'à l'instant où son ascension droite est de* 225°.

Solutions.

(I). S est un cône, $x^2 + y^2 - 2(a - z)x = 0$.

V est égal à $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{9}\right)a^3$.

Les lignes de pente se projettent sur OXY suivant des cercles touchant OY à l'origine.

(II). Si $POA = \theta$, on a

$$\frac{4}{3} l^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2\right) = \frac{4}{3} l^2 \omega^2 \cos\theta, \qquad \omega\, dt = \frac{d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

(Juillet 1901.)

I. *Trouver une surface de révolution telle qu'en un quelconque de ses points* M, *un des centres principaux de courbure soit à la même distance de l'axe que* M. *Considérant la portion de surface comprise entre les plans tangents en deux de ses points de rencontre consécutifs avec l'axe, calculer son aire* A *et le volume* V *qu'elle limite.*

II. *Mouvement d'un point pesant sur un cône à axe vertical, dont la base, de rayon a, est à une distance a au-dessous du sommet : à l'instant initial, la vitesse est horizontale et égale à $2\sqrt{ga}$, le mobile étant à la distance $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ du sommet.*

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon d'un point dont la latitude est boréale et égale à $47°29'$, le jour du solstice d'été, l'heure sidérale étant de $11^h 25^m$: l'obliquité de l'écliptique est $23°27'$.*

SOLUTIONS.

(I). La méridienne est une cycloïde : a étant le rayon du cercle générateur, on a

$$A = \frac{64}{3}\pi a^2, \qquad V = 5\pi^2 a^3.$$

(II). Projection horizontale de la trajectoire

$$d\psi = \frac{a\sqrt{2a}\, dr}{r(r+a)\sqrt{2r-a}}.$$

(Novembre 1901.)

I. *Une droite* MP, *de longueur donnée, se meut dans un plan en restant tangente à la trajectoire* (C) *de son extrémité* M :

1° *Prouver que la normale en* P *à la trajectoire* (T) *du point* P *passe au centre de courbure de* (C) *en* M ;

2° *Déterminer* (C) *de manière que* (T) *soit une droite* Δ : *construire et rectifier la courbe trouvée* (Γ);

3° *Montrer qu'en un point quelconque de la surface* S *engendrée par la révolution de* Γ *autour de* Δ, *le produit des rayons de courbure principaux est constant; reconnaître que* S *et la sphère ne sont pas les seules surfaces de révolution qui jouissent de cette propriété.*

II. *Mouvement d'une barre pesante et homogène dont les extrémités glissent sans frottement sur une hélice coupant sous un angle de* 45° *les génératrices d'un cylindre à axe vertical : la vitesse initiale est nulle.*

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'heure moyenne à midi vrai, le jour du solstice d'été* ($1^m 35^s$).

(Juillet 1902.)

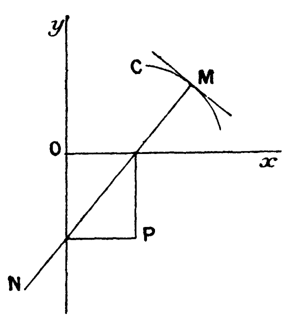
Lyon.

I. *Mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant, quand la résistance dépend de la vitesse seule, suivant une loi donnée.*

II. *Intégrer*

$$(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy.$$

III. *La normale* MN, *en* M, *à la courbe* C *définit, par la construction indiquée sur la figure, le point* P.



Quel est le lieu $\overline{P}$ *de* P *lorsque la courbe* C, *parcourue par* M, *est la parabole*

$$y^2 = 2px?$$

SOLUTIONS.

On ne donnera la solution que de III. Les problèmes I et II sont des applications immédiates du cours.

La normale MN au point $M(x, y)$ a pour équation

$$(u-x)\,dx + (v-y)\,dy = 0.$$

Faisons successivement $v = 0$ et $u = 0$, on a, pour les coordonnées de P,

$$u = x + \frac{y\,dy}{dx}, \qquad v = y + \frac{x\,dx}{dy}.$$

Pour la parabole, tout calcul fait, il vient

$$u = x + p, \qquad v = \frac{xy}{p},$$

c'est-à-dire

$$pv^2 = (u-p)^3,$$

pour le lieu P. C'est une cissoïde facile à construire.

(Novembre 1902.)

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de la réflexion totale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le phénomène de la réflexion totale, les petits déplacements vibratoires de l'éther, produits sur la surface réfléchissante, sont décroissants aux diverses distances x de cette surface, comme l'exponentielle*

$$e^{-\frac{2\pi x}{\tau\omega}\sqrt{\sin^2 i - N^2}}$$

où τ est la période de vibration, ω la vitesse de propagation de la lumière au-dessus de la surface, N *l'indice de réfraction et i l'angle d'incidence.*

On demande à quelle fraction de leur valeur à la sur-

face sont réduits ces DÉPLACEMENTS, *aux distances respectives* $x = \tau\omega$ *et* $x = 2\tau\omega$ *de* UNE *et* DEUX *longueurs d'onde, quand l'indice* N *de réfraction est* $\frac{2}{3}$, *ce pour une incidence* $i = 75^\circ$.

On a

$$e = 2,71828, \qquad \pi = 3,14159.$$

(Juillet 1902.)