Nouvelles annales de mathématiques

R. Gilbert

À propos de la question 1933

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 132-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__132_1>

A PROPOS DE LA QUESTION 1933;

PAR M. R. GILBERT.

Considérons dans un plan deux droites Ox, Oy et deux courbes C, C_1; menons deux tangentes communes AB, $A'B'$ qui se coupent en M et soient P, P' les milieux des segments AB, $A'B'$ compris entre les deux droites Ox, Oy. Lorsque les deux courbes C, C_1 sont tangentes en M, les points P, P' coïncident; on en conclut que les courbes S, S_1 lieux des milieux des segments déterminés sur les tangentes à C et C_1 par les droites Ox, Oy sont aussi tangentes.

En particulier, supposons que C soit une parabole tangente aux droites Ox, Oy, le lieu S des points P

milieux des segments AB des tangentes à C est une droite, Δ, tangente à C au point de rencontre, Q, avec le diamètre du point O. En effet, toute tangente AB à C coupe quatre tangentes fixes Ox, Oy, Δ et la droite de l'infini en quatre points dont le rapport harmonique est constant. Or, si AB se confond avec Δ, ce rapport est harmonique.

Cela étant, si la parabole C varie en restant tangente à une courbe C_1, l'enveloppe de Δ est la courbe S_1 lieu des milieux P_1 des tangentes à C_1 comprises entre Ox et Oy.

En particulier, si les droites Ox, Oy sont rectangulaires, le foyer F de la parabole C décrit une courbe homothétique dans le rapport $\frac{2}{1}$ à la podaire de S_1 par rapport au point O.

Exemples :

1° La courbe C_1 se réduit à un point Q, le lieu du point P_1 est une hyperbole équilatère qui passe en O et dont le centre est au milieu de OQ. Le lieu du foyer est la podaire de cette hyperbole.

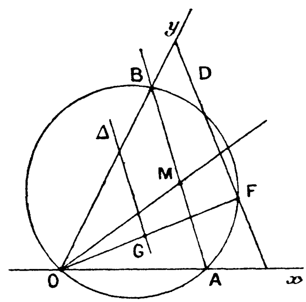
2° La courbe C_1 est une conique tangente à Ox, Oy; les points A et B décrivent des divisions homographiques sur Ox, Oy et la courbe S_1 est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à Ox, Oy et passent au centre de la conique C_1. Plus particulièrement, si C_1 est un cercle tangent à Ox, Oy, on en conclut que O est le foyer de l'hyperbole équilatère S_1. Le lieu du foyer de la parabole C est alors un cercle.

3° La courbe C_1 est une hypocycloïde quadrangulaire d'axes Ox, Oy; la courbe S_1 est un cercle de centre O.

4° La courbe C_1 est une hypocycloïde triangulaire tangente à Ox, Oy. La courbe S_1 est un cercle qui passe en O et le lieu du foyer de C une cardioïde.

Revenons au cas général où l'angle xOy est quelconque. Soit AB la tangente à la parabole C au point de rencontre M avec le diamètre de C qui passe en O ; le foyer F de C est à l'intersection du cercle circonscrit au triangle OAB avec la symédiane OF relative à l'angle O du triangle (*fig.* 1); nous allons chercher

Fig. 1.

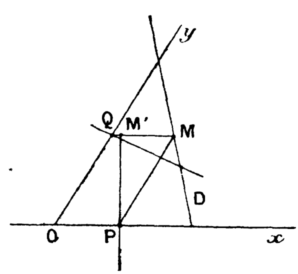


l'enveloppe de la droite D perpendiculaire à OF en F.

Pour cela, considérons la transformation suivante :

On donne un angle xOy; à un point M on fait correspondre le point M′ de rencontre des perpendiculaires PM′, QM′ à Ox, Oy (*fig.* 2) aux points P, Q où

Fig. 2.



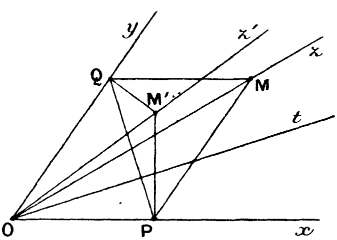
les parallèles MP, MQ à Oy, Ox coupent Ox, Oy.

Il est évident que la transformation est birationnelle;

elle est homographique; car, lorsque M décrit une droite D, les points P, Q décrivent sur Ox, Oy deux divisions homographiques, les points à l'infini se correspondant. Donc, les faisceaux PM′, QM′ dont les sommets sont à l'infini sont homologiques et le lieu de M′ est une droite D′.

A une droite quelconque Oz passant en O correspond une droite Oz' que nous allons définir. On sait qu'étant données deux droites Oz', Ot (*fig.* 3) également

Fig. 3.



inclinées respectivement sur Ox, Oy (isogonales dans l'angle xOy), si d'un point M′ de Oz' on abaisse les perpendiculaires M′P, M′Q sur Ox, Oy, la droite PQ est perpendiculaire à Ot. Or PQ est, en direction, conjuguée de OM par rapport à Ox, Oy.

On en conclut que Oz' est l'isogonale de la perpendiculaire à la conjuguée de Oz, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire à l'isogonale de la conjuguée de Oz.

On voit donc (*fig.* 1) qu'à la droite AB correspond une perpendiculaire à OF; mais au milieu M de AB correspond le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc à la droite AB correspond le diamètre du cercle perpendiculaire à OF.

Si AB enveloppe une courbe S_1, ce diamètre, Δ, enveloppe une courbe transformée homographique de S_1, soit Σ_1, et le lieu du foyer est la podaire d'une courbe homothétique à Σ_1 dans le rapport $\frac{2}{1}$.

En particulier, le lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et passant par un point fixe est la podaire d'une hyperbole par rapport à un de ses points.

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et à une conique tangente à ces droites est la podaire d'une hyperbole.