NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CAUSSÉ

Solution de la question d'analyse proposée en 1902 au concours d'agrégation des sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 115-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__115_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE EN 1902 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. A. CAUSSÉ.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox *et* Oy, *on considère une courbe* C *telle que la tangente* MT *et la normale* MN *menées à cette courbe en un point* M *forment avec l'axe* Ox *un triangle* MNT *dont l'aire reste constante (et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné* a) *lorsque* M *décrit* C.

1° *Exprimer les coordonnées* x *et* y, *par rapport à* Ox *et* Oy, *d'un point* M *de la courbe* C *en fonction du coefficient angulaire* t *de la tangente en* M; *construire la courbe.*

2° *Exprimer ensuite les coordonnées* x *et* y *considérées en fonction* UNIFORME *d'un paramètre à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.*

3° *Calculer en fonction de* u *le rayon de courbure* *relatif au point* M *de la courbe* C *et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de u.*

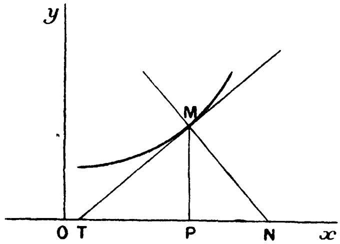
4° *Démontrer que, si l'on désigne par* M' *le centre de courbure de la courbe* C *relatif au point* M *et par* P *la projection de* M *sur* Ox, *l'aire du triangle* M'NP *ne varie pas avec le point* M; *indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.*

5° *Calculer en fonction de u la longueur de l'arc de la courbe* C *compris entre un point donné* M_0 *et le point* M *correspondant à la valeur u du paramètre.*

6° *Soit* M *un point de la courbe* C *correspondant à la valeur u du paramètre et situé du même côté de l'axe* Ox *qu'un point donné* M_0 *de cette courbe; on suppose de plus que l'arc de la courbe* C *qui joint* M_0 *et* M *n'est pas rencontré, entre* M_0 *et* M, *par les portions* MP, M_0P_0 *des ordonnées de* M *et de* M_0 *limitées à l'axe* Ox; *calculer en fonction de u l'aire dont le contour est formé par la portion* PP_0 *de l'axe* Ox, *par les portions* MP, M_0P_0 *des ordonnées de* M *et de* M_0 *et par l'arc de la courbe* C *joignant les points* M_0 *et* M.

1. Soit P la projection de M sur Ox (*fig.* 1); en pre-

Fig. 1.



nant les points de rencontre avec Ox de la tangente en M,

$$Y - y = t(X - x),$$

et de la normale $Y - y = -\frac{1}{t}(X - x)$, on trouve

$$\overline{PT} = -\frac{y}{t}, \qquad \overline{PN} = ty,$$

$$\overline{TN} = \overline{PN} - \overline{PT} = ty + \frac{y}{t} = y\,\frac{t^2+1}{t}.$$

On a

$$\text{aire TMN} = \frac{1}{2}\,\text{TN} \times \text{PM} = \pm\frac{y^2}{2}\,\frac{t^2+1}{t};$$

l'équation du problème est

$$\pm y^2\,\frac{t^2+1}{t} = a^2.$$

On en déduit

$$\frac{y}{a} = \varepsilon\sqrt{\varepsilon'\,\frac{t}{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{a} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{dt}{\sqrt{4\varepsilon' t(t^2+1)}}$$

$$(\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1);$$

puis

$$dx = \frac{dy}{t}, \qquad \frac{dx}{a} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4\varepsilon' t(t^2+1)}}.$$

Premier cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$. — La réalité de x et y exige que t ne prenne que des valeurs positives.

Quand t augmente indéfiniment, $\frac{dx}{dt}$ tend vers 0 comme $\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$; donc x a une limite; choisissons la constante d'intégration de sorte que cette valeur limite soit nulle

$$\frac{x}{a} = \int_{\infty}^{t} \frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}.$$

Quand t tend vers 0, $\frac{dx}{dt}$ augmente indéfiniment comme $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$; donc x augmente indéfiniment.

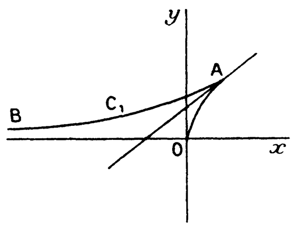
Voici le Tableau des variations de x et y quand t varie de $0 + \infty$:

$\frac{dy}{dx} = t \ldots$	0		1		$+\infty$
$\frac{dy}{dt} \ldots\ldots$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0
$y \ldots\ldots\ldots$	0	croît	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	décroît	0
$\frac{dx}{dt} \ldots\ldots$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0
$x \ldots\ldots\ldots$	$-\infty$	croît	»	décroît	0

La branche de courbe représentative C_1 est asymptote à Ox et présente un rebroussement pour $t = 1$.

Les branches de courbe correspondant aux différentes valeurs de la constante d'intégration se déduisent de C_1 par des translations parallèles à Ox (*fig.* 2).

Fig. 2.



Deuxième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$. — En choisissant encore la constante d'intégration de sorte que $x = 0$ pour $t = +\infty$, on trouve pour x et y des expressions égales et de signes contraires à celles du premier cas; donc la branche représentative C_2 est symétrique de C_1 par rapport à l'origine.

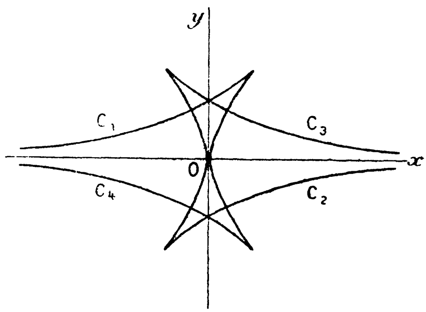
Troisième cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$. — La variable t ne peut prendre que des valeurs négatives; par un choix convenable de la constante d'intégration, il vient

$$\frac{x}{a} = -\int_{-\infty}^{t} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{-4t(t^2+1)}},$$

$$\frac{y}{a} = \sqrt{-\frac{t}{t^2+1}}.$$

Je dis que la branche représentative C_3 est symétrique de C_1 par rapport à Oy (*fig.* 3). En premier lieu, le

Fig. 3



point M_1 de C_1 correspondant à $t = t_0$ et le point M_3 de C_3 correspondant à $t = -t_0$ ont la même ordonnée

$$\sqrt{\frac{t_0}{t_0^2+1}};$$

en second lieu, si l'on fait dans l'intégrale définie qui donne l'abscisse de M_3,

$$-a\int_{-\infty}^{-t_0} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{4t(t^2+1)}},$$

le changement de variable de t en $-t$, on obtient

$$-a\int_{\infty}^{t_0} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{4t(t^2+1)}},$$

c'est-à-dire l'abscisse de M_1 changée de signe.

Quatrième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$. — La branche représentative C_4 est symétrique de C_3 par rapport à l'origine.

Finalement, les quatre branches C_1, C_2, C_3, C_4 forment une courbe C admettant Ox et Oy pour axes de symétrie et toutes les courbes de l'énoncé se déduisent de C par des translations parallèles à Ox.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que la branche C_1.

2. Posons

$$u = -\int_{+\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}};$$

la quantité sous le radical étant de la forme

$$4t^3 - g_2 t - g_3$$

($g_2 = -4$, $g_3 = 0$; racines $e_1 = i$, $e_2 = 0$, $e_3 = -i$), l'inversion de cette intégrale elliptique donne

$$t = \wp(u : -4, 0):$$

quand t varie de 0 à $+\infty$, u décroît de

$$u + \omega + \omega' = u + \omega_2 \quad \text{à} \quad 0.$$

y et x s'expriment en fonction uniforme de u :

$$\frac{y}{a} = \sqrt{\frac{t}{t^2+1}} = \sqrt{\frac{\wp u - e_2}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)}} = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma}}{\frac{\sigma_1}{\sigma}\,\frac{\sigma_3}{\sigma}} = \frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3},$$

ou encore

$$\frac{y}{a} = \frac{2t}{\sqrt{4t(t^2+1)}} = 2\,\frac{\wp u}{-\wp' u}.$$

En décomposant $\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}$ en fractions simples, il vient

$$\frac{dx}{a} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)\frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}$$
$$= \left(\frac{1}{pu - e_2} + \frac{1}{pu - e_1} + \frac{1}{pu - e_3}\right) du.$$

Or, la formule

$$p(u + \omega_\lambda) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{pu - e_\lambda},$$

où λ, μ, ν représentent les nombres 1, 2, 3 rangés dans un ordre quelconque, donne

$$\int \frac{du}{pu - e_\lambda} = -\frac{\zeta(u + \omega_\lambda) + e_\lambda u}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} + \text{const.}$$

Appliquons aux trois cas différents :

$$\int \frac{du}{pu - e_1} = \frac{\zeta(u + \omega) + iu}{2} + \text{const.},$$
$$\int \frac{du}{pu - e_2} = -\zeta(u + \omega + \omega') + \text{const.},$$
$$\int \frac{du}{pu - e_3} = \frac{\zeta(u + \omega') - iu}{2} + \text{const.}$$

Il en résulte

$$\frac{x}{a} = \left(\zeta(u + \omega + \omega') + \frac{\zeta(u + \omega) + \zeta(u + \omega')}{2}\right)_0^u$$
$$= -\zeta(\omega + \omega') + \zeta(u + \omega + \omega')$$
$$+ \frac{-\zeta(\omega) + \zeta(u + \omega)}{2} + \frac{-\zeta(\omega') + \zeta(u + \omega')}{2}.$$

On peut transformer cette expression à l'aide de la formule

$$\zeta(u + v) - \zeta v = \zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

où l'on fait $v = \omega_\lambda$,

$$\zeta(u + \omega_\lambda) - \zeta(\omega_\lambda) = \zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_\lambda};$$

il vient

$$\frac{x}{a} = 2\zeta u + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u}{pu - e_1} + \frac{p'u}{pu - e_3} + 2\frac{p'u}{pu - e_2}\right)$$
$$= 2\zeta u + \frac{2\,p'u(2\,p^2u + 1)}{4\,pu(p^2u + 1)}$$
$$= 2\zeta u + \frac{2(2p^2u + 1)}{p'u}.$$

Les expressions définitives de x et y en fonction uniforme de u sont, débarrassées de tout symbole imaginaire,

$$x = 2a\left(\zeta u + \frac{2\,p^2u + 1}{p'u}\right) \quad (^1),$$

$$y = a\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3} = -2a\frac{pu}{p'u};$$

de plus y est une fonction elliptique de u.

3. Soit R le rayon de courbure relatif au point M

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dt}{dx}} = (1 + t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}\,\frac{1 - t^2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçons, dans cette expression, t par

$$pu - e^2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2:$$

$$R = \frac{a}{2}\,\frac{1 - \dfrac{\sigma_2^4 u}{\sigma^4 u}}{\dfrac{\sigma_2^3 u}{\sigma^3 u}} = \frac{a}{2}\,\frac{\sigma^4 - \sigma_2^4}{\sigma\sigma_2^3}.$$

---

(1) L'expression

$$\frac{x}{2a} = \zeta u + \frac{2\,pu\,p'u}{4(p^2u + 1)} + \frac{p'u}{2\,pu},$$

est toute préparée pour l'intégration.

Si l'on veut mettre les zéros en évidence au numérateur, on détermine un argument u_1 tel que $\wp u_1 = 1$, et un autre u_2 tel que $\wp u_2 = -1$, et l'on exprime $\wp u - \wp u_1$ et $\wp u - \wp u_2$ au moyen de la fonction σ

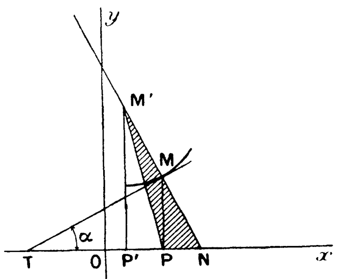
$$R = \frac{a}{2}\,\frac{1 - \wp^2 u}{\dfrac{\sigma_2^3 u}{\sigma^3 u}}$$

$$= -\frac{a}{2}\,\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma^2 u_1\,\sigma^2 u_2\,\sigma_2^3 u\,\sigma u}.$$

De toutes manières, R s'exprime en fonction uniforme, mais non elliptique, de u; on voit aisément que c'est une fonction aux multiplicateurs constants -1 et -1.

4. Si α désigne l'angle que fait avec Ox (*fig.* 4), la

Fig. 4.



tangente menée dans le sens des t croissants, l'ordonnée de M'

$$\overline{P'M'} = y + R\cos\alpha$$

$$= a\sqrt{\frac{t}{t^2+1}} + \frac{a}{2}\,\frac{1-t^2}{t^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = a\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{2\,t^{\frac{3}{2}}}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\text{aire M'NP} &= \frac{1}{2}\text{PN} \times \text{P'M'} \\ &= \pm \frac{1}{2} ty \times \overline{\text{P'M'}} \\ &= \pm \frac{1}{2} ta \sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\, a \frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

L'aire M'NP est bien constante et sa valeur est $\frac{a^2}{4}$.

5. Si s désigne l'arc de la courbe compté positivement dans le sens des t croissants, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (t^2+1)\,dx^2,$$

$$\frac{ds}{a} = \pm \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} \frac{dt}{\sqrt{4t}} = \pm \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1}\right) \frac{dt}{\sqrt{4t}};$$

on doit prendre le signe + quand $t < 1$, et le signe — quand $t > 1$.

On est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle en posant $t^2 = \theta$. Mais il est aussi simple de tout exprimer en fonction de u :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{a} &= \pm \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}} \\ &= \pm \left(\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2} - 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\right) du.\end{aligned}$$

En premier lieu,

$$\int \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2}\, du = \frac{\sigma}{\sigma_2} + \text{const.}$$

Tout revient à calculer $\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\, du$; or les relations

$$(1) \qquad \frac{\sigma_1^2}{pu - e_1} = \frac{\sigma_2^2}{pu - e_2} = \frac{\sigma_3^2}{pu - e_3} = \frac{\sigma^2}{1}$$

ou

$$\frac{\sigma_1^2}{pu - i} = \frac{\sigma_2^2}{pu} = \frac{\sigma_3^2}{pu + i} = \frac{\sigma^2}{1}$$

donnent

$$2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2,$$

de sorte que

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \int \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,du + \int \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\,du.$$

On voit aisément que la dérivée logarithmique de $\sqrt{e_3 - e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ est $\sqrt{e_3 - e_2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, et que celle de $\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ est $\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$; il vient donc, en remplaçant e_1, e_2 et e_3 par leurs valeurs,

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \frac{1}{\sqrt{-i}}\log\frac{\sqrt{-i}\,\sigma + \sigma_1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sqrt{i}}\log\frac{\sqrt{i}\,\sigma + \sigma_2}{\sigma_1} + \text{const.}$$

Les relations $\sigma_3^2 = \sigma_2^2 + i\sigma^2$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 - i\sigma^2$ fournies encore par les relations (1) permettent de transformer cette expression

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \frac{1}{2\sqrt{-i}}\log\frac{\sigma_2 + \sqrt{-i}\,\sigma}{\sigma^2 - \sqrt{-i}\,\sigma} + \frac{1}{2\sqrt{i}}\log\frac{\sigma_2 + \sqrt{i}\,\sigma}{\sigma_2 - \sqrt{i}\,\sigma} + \text{const.}$$

$$= \sqrt{-i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\,\sigma} + \sqrt{i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\,\sigma} + \text{const.}$$

Finalement

$$\text{arc}\,M_0M = \pm\left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \sqrt{-i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\,\sigma} - \sqrt{i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\,\sigma}\right)_{u=u_0}^{u}.$$

On est conduit précisément à cette expression en intégrant par les fractions rationnelles et en exprimant ensuite en fonction de u.

L'application de cette formule donne lieu aux remarques suivantes. Désignons par A le point de rebroussement ($t = 1$) :

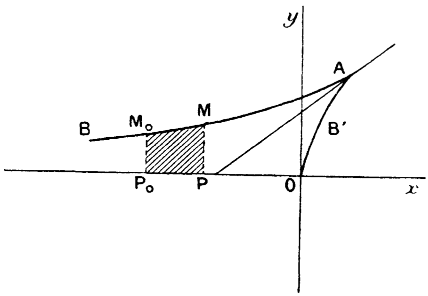
1° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche infinie AB, on doit prendre le signe — devant le second membre ;

2° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche AB′O, on prendra le signe + ;

3° Si l'un des deux points est situé sur la branche AB et l'autre sur la branche AB′O, on calculera séparément arc M_0A et arc MA.

6. Les conditions auxquelles M_0 et M sont assujettis par l'énoncé reviennent à ceci : M_0 et M (*fig.* 5) sont

Fig. 5.



situés tous deux sur la branche AB, ou tous deux sur l'arc AB′O :

$$\text{aire } P_0M_0MP = \pm\int y\,dx$$
$$= \pm\int a\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\,\frac{a}{2}\,\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}$$
$$= \pm\frac{a^2}{4}\int\frac{1-t^2}{t(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \pm\frac{a^2}{8}\int\frac{(1-\theta)\,d\theta}{\theta(\theta+1)^2},$$

par le changement de variable $t^2 = \theta$.

Décomposons $\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2}$ en fractions simples :

$$\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1} - \frac{2}{(\theta+1)^2}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\text{aire } P_0 M_0 MP &= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log\frac{\theta}{\theta+1} + \frac{2}{\theta+1}\right) + \text{const.} \\
&= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log\frac{p^2 u}{p^2 u + 1} + \frac{2}{p^2 u + 1}\right)_{u_0}^{u} \\
&= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log\frac{\sigma_2^4 u}{\sigma_1^2 \sigma_3^2} + \frac{2\sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2}\right)_{u_0}^{u} \\
&= \pm \frac{a^2}{4}\left(\log\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_3} + \frac{\sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2}\right)_{u_0}^{u}.
\end{aligned}$$