NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

E. DUPORCQ,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Ingénieur des Télégraphes.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR GERONO, PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ ET ANTOMARI.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME III.

(LXII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1903.

Sujet.

On considère deux complexes linéaires en involution A *et* B.

1° *Soit* Q *une quadrique dont chaque système de génératrices appartient à l'un de ces complexes. Par les points communs à trois d'entre elles, il en passe généralement une simple infinité d'autres : on dira qu'elles forment un* SYSTÈME *de quadriques* Q.

A tout système de quadriques Q *en correspond un autre, tel que toute quadrique de l'un de ces système touche toute quadrique de l'autre.*

2° *L'enveloppe commune des quadriques de ces deux systèmes est une surface de Kummer.*

3° *Toute surface de Kummer est susceptible de cette double génération. Chercher de combien de manières.*

4° *Propriétés corrélatives.*

5° *On considère toutes les surfaces de Kummer,* Σ, *conjuguées aux deux complexes linéaires* *en involution* A *et* B. *Il n'y en a généralement qu'une qui touche neuf droites de l'un de ces complexes.*

6° *Toutes celles qui touchent huit droites du complexe* A, *par exemple, en touchent généralement une infinité d'autres, formant une surface du huitième ordre.*

7° *Celles qui touchent sept droites du complexe* A *touchent, outre les conjuguées de ces sept droites par rapport à* B, *un huitième couple de droites appartenant à* A *et conjuguées par rapport à* B.

8° *Les droites bitangentes à une surface* Σ *et communes aux complexes* A *et* B *engendrent deux surfaces distinctes du quatrième ordre, circonscrites à* Σ *le long des lignes asymptotiques particulières,* (α) *et* (β), *qui appartiennent respectivement aux complexes* A *et* B.

9° *La courbe* (α), *par exemple, est généralement définie par huit de ses points; mais sept d'entre eux en déterminent neuf autres.*

10° *Il existe une famille de surfaces* Σ *admettant la même ligne asymptotique* (α). *Les quatre complexes linéaires, en involution deux à deux, ainsi qu'avec* A *et* P, *auxquels chacune de ces surfaces est conjuguée, sont fixes.*

11° *Il n'existe qu'une surface de cette famille tangente à une génératrice de* B. *Il en existe trois bitangentes à une droite du complexe* A, *et les trois couples de points de contact forment deux à deux des divisions harmoniques.*

12° *Les génératrices de* A, *qui touchent à la fois deux surfaces de la famille en question, les touchent suivant des lignes asymptotiques.*

Conditions.

Le Concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 200fr d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de M. Gauthier-Villars;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction *avant le* 31 *décembre* 1903, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir *du* 31 *décembre* 1903 et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un Travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er *février* 1904, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire connaître sans retard s'il désire que la publication de son travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[O2e]

RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE. REMARQUES ET CONSTRUCTIONS;

PAR M. C.-A. LAISANT.

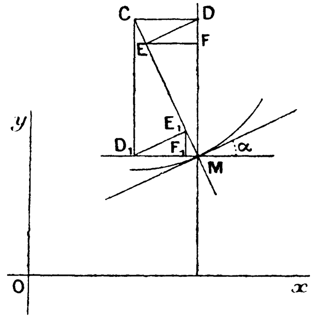
---

1. On connaît l'expression $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ de la courbure d'une courbe plane, rapportée à des coordonnées rectangulaires, en un point $M(x, y)$ (*fig.* 1). En appelant α l'angle d'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x, on peut écrire

$$\frac{1}{R} = y'' \cos^3\alpha \qquad \text{ou} \qquad R\cos^3\alpha = \frac{1}{y''}.$$

Si donc on projette le centre de courbure C en D, sur l'ordonnée de M, puis D en E sur la normale, puis E en F sur l'ordonnée, le segment MF représentera l'expression $\frac{1}{y''}$. Réciproquement, si l'on connaît y'', on pourra construire le segment MF, et l'on obtiendra C par la

Fig. 1.



construction inverse, c'est-à-dire en menant FE parallèle à Ox jusqu'à la normale, ED parallèle à la tangente jusqu'à l'ordonnée, et DC parallèle à Ox jusqu'à la normale.

Il est aisé de voir qu'on a aussi, en tenant compte des signes,

$$R \sin^3 \alpha = -\frac{1}{x''},$$

la notation x'' représentant $\frac{d^2x}{dy^2}$. Donc la construction des droites CD_1, D_1E_1, E_1F_1, analogue à la précédente, donnera en MF_1 l'expression géométrique de $\frac{1}{x''}$; et réciproquement, si l'on connaît x'', la construction inverse donnera C.

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$x_0 = x + \frac{1}{x'' \sin^2 \alpha}, \qquad y_0 = y + \frac{1}{y'' \cos^2 \alpha}.$$

On vérifie en outre les relations, d'ailleurs bien connues,

$$x'' \operatorname{tang}^3 \alpha + y'' = 0, \qquad x'' + y'' \cot^3 \alpha = 0,$$

et l'on obtient aussi très aisément, en considérant le triangle MCD, l'expression symétrique suivante du rayon de courbure, qui est peut-être nouvelle :

$$R = \left[\left(\frac{1}{x''}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Ces remarques permettent donc :

Connaissant le rayon de courbure et la normale, de construire les deux dérivées secondes x'', y'' ;

Connaissant l'une des dérivées secondes et la normale, de construire l'autre dérivée seconde et le rayon de courbure ;

Connaissant les deux dérivées secondes, de calculer le rayon de courbure et la direction de la normale (mais non de construire ces éléments avec la règle et le compas).

Il serait facile d'appliquer ces considérations aux rayons de courbure d'un grand nombre de courbes, et en particulier aux paraboles d'ordre quelconque,

$$y = f(x),$$

$f(x)$ étant un polynome entier; dans ce cas on trouve des résultats remarquablement simples. Mais, pour abréger, nous nous bornons à cette simple indication.

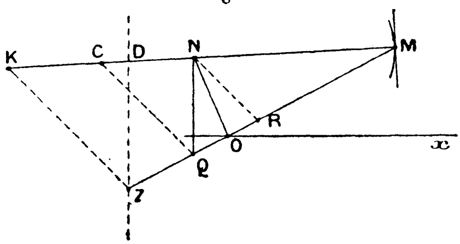
On remarquera enfin qu'une courbe étant donnée, si on la rapporte à un système quelconque d'axes rectangulaires, et si l'on fait tourner ces axes, l'extrémité F du segment $MF = \frac{1}{y''}$ porté sur l'ordonnée décrit une courbe définie par l'équation polaire $MF = R\cos^3\theta$. Il en est de même pour le lieu décrit par F_1 extrémité de $MF_1 = \frac{1}{x''}$.

2. Une construction du même genre, bien que moins intuitive, peut être obtenue pour le cas des coordonnées polaires. On sait en effet qu'alors le rayon de courbure R est donné par la formule

$$(1) \qquad R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Soient (*fig.* 2) Ox l'axe polaire, M le point consi-

Fig. 2.



déré, C le centre de courbure, ON la sous-normale, NQ une perpendiculaire à NM; soient enfin, sur le rayon vecteur OM, ZO égal à la dérivée seconde r'' fournie par l'équation, et $QR = ZQ$.

On a

$$OM = r, \qquad ON = r', \qquad NM = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$QO = \frac{r'^2}{r}, \qquad QM = \frac{r^2 + r'^2}{r}, \qquad CM = R,$$

$$QR = ZQ = ZO - QO = r'' - \frac{r'^2}{r}.$$

Dès lors, la relation (1) peut s'écrire

$$CM = \frac{NM^3}{NM^2 + OM.QO - OM.ZO},$$

d'où

$$\frac{CM}{NM} = \frac{NM^2}{OM}\,\frac{1}{QM + QO - ZO} = \frac{QM}{QM - ZQ}$$
$$= \frac{QM}{QM - QR} = \frac{QM}{RM}.$$

Les deux triangles MCQ, MNR sont donc semblables, c'est-à-dire que les droites CQ, NR sont parallèles. On peut encore remarquer que la parallèle ZK à ces deux droites coupe la normale en un point K tel que le milieu du segment KN est le centre de courbure C.

La construction qui précède permet, soit d'obtenir le centre de courbure quand on a la dérivée seconde, soit de construire cette dérivée seconde ZO lorsqu'on connaît, au point correspondant M, le centre de courbure.

Il est évident qu'en tout ceci la direction de l'axe polaire Ox n'intervient en rien. Mais si l'on se donne une courbe entièrement déterminée, et qu'on veuille la rapporter à un système de coordonnées polaires, la position de l'origine O importera beaucoup.

Supposons d'abord qu'on connaisse à la fois la normale $MN = n$ et le rayon de courbure $MC = R$. Alors, l'origine se déplacera sur un cercle de diamètre NM. En outre, en posant $OMN = \omega$, on aura

$$\frac{MZ}{MQ} = \frac{MK}{MC} \quad \text{ou} \quad \frac{MZ}{n}\cos\omega = \frac{2R - n}{R},$$

de sorte que le point Z décrit une droite ZD parallèle à la tangente.

La dérivée seconde ZO est donc représentée par le segment intercepté sur une sécante MOZ par le cercle et la droite ZD, lorsque cette sécante tourne autour du point M.

Quand le point O varie sur la droite MO, alors ω est constant, et n variable; on a toujours la relation

$$\mathrm{MZ} = \frac{n}{\cos\omega}\left(2 - \frac{n}{\mathrm{R}}\right),$$

qui montre comment sont liées les variations des points Z et N sur le rayon vecteur et la normale.

Un cas particulier intéressant est celui où l'origine est située sur la normale, qui coïncide alors avec le rayon vecteur; dans ce cas, les points O, N, Q coïncident, OR représente la dérivée seconde, OM est moyenne proportionnelle entre CM et RM, en sorte qu'on a

$$\mathrm{R} = \frac{r^2}{r - r''},$$

résultat qui se déduit d'ailleurs immédiatement de l'expression générale, en y faisant $r' = 0$, et qui est d'une construction aussi simple que possible.

[K2c]

DÉMONSTRATION DE LA CONSTRUCTION TROUVÉE PAR HAMILTON POUR DÉTERMINER LE POINT OÙ LE CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE TOUCHE LE CERCLE INSCRIT;

PAR M. CANON.

Gérono, en 1865, a donné dans ce Journal une démonstration géométrique de cette construction, à laquelle Hamilton était arrivé analytiquement.

En voici une autre plus courte que celle de Gérono.

Soient

A un sommet du triangle;
M le milieu du côté opposé;
E le point de contact de ce côté et du cercle inscrit (I) de centre I;
P le pied de la hauteur AP.

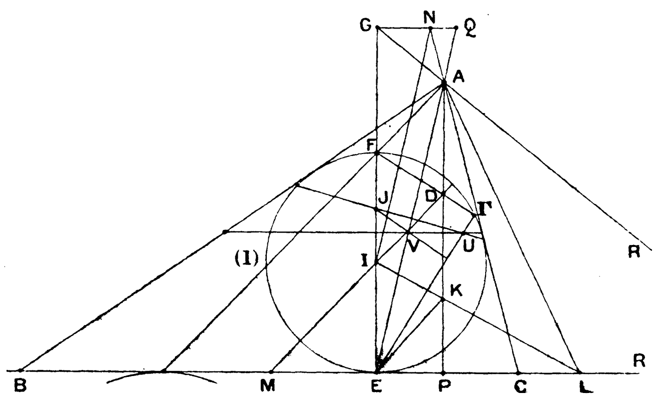
Menons la parallèle EK à MI, et appelons L le point où IK coupe MP. On a

$$\frac{LM}{LE} = \frac{LE}{LP},$$

d'où

$$\overline{LE}^2 = LP . LM.$$

Le point L appartient donc à la tangente menée au



cercle (I) et au cercle des neuf points en leur point de contact Γ.

La droite qui va de A au point F, diamétralement opposé à E, est parallèle à MID, par suite AD est égal à IF. La parallèle GAR à IL donne G et le segment FG est aussi égal à IF.

Menons la droite EAQ, jusqu'à sa rencontre Q avec la parallèle GQ à ELR, et la droite IN parallèlement à EA qui coupe GQ en N. On a

$$\frac{RL}{LE} = \frac{GI}{IE} = \frac{GN}{NQ},$$

ce qui montre que N, A, L sont en ligne droite.

Le point J, milieu de IF, est, par rapport à (I), le pôle de GN, puisque

$$IJ.IG = \overline{IF}^2.$$

La perpendiculaire JU à IN est la polaire de N, elle coupe la perpendiculaire EΓ à IL au point U qui est le pôle de NAL. La polaire de A passe donc par U. La droite AE passe par le milieu V de ID et alors la droite JV est parallèle à FD et à IK.

Dans le triangle JVE, la droite EUΓ est une hauteur, de même JU perpendiculaire à EV, la droite VU est alors perpendiculaire à EJ.

Nous voyons ainsi que la polaire de A, par rapport à (I), et la parallèle à MP, à égales distances de cette droite et de A, se coupent en un point U qui, avec E, détermine la droite EUΓ.

Autrement dit : *La droite, qui joint les points de contact avec* (I) *des côtés* AB, AC *du triangle, et la droite, qui joint les milieux de ces côtés, se coupent en un point* U : *la droite* EU *rencontre le cercle* (I) *au point* Γ *cherché.*

C'est là la construction d'Hamilton.

Remarques. — Dans le courant de cette démonstration nous avons trouvé des constructions de Γ : ce point est le symétrique de E par rapport à IL; il est à la rencontre de (I), soit avec la parallèle FD à IL, soit avec la droite qui va de F au milieu de AI.

La droite IL peut s'obtenir en joignant le point I au point K, extrémité du segment AK égal à FE.

[P3b]

NOTE SUR L'INVERSION;

Par M. R. BRICARD.

L'inversion appliquée à une surface fait correspondre aux lignes de courbure de cette surface les lignes de courbure de la surface inverse.

Ce théorème fondamental peut être établi de diverses manières, par l'Analyse et la Géométrie. Je ne sais si l'on en donne la démonstration bien simple que voici :

Soient (S) et (S') deux surfaces inverses par rapport au point O, m et m' deux points correspondants, appartenant respectivement à ces surfaces. On sait que la normale à (S) en m et la normale à (S') en m' se rencontrent et font le même angle, avec mm'. Soit μ le point d'intersection de ces deux normales. On a

$$\mu m = \mu m'.$$

Si donc le point m se déplace sur (S), le point μ décrira la surface (Σ), lieu des points équidistants de (S) et de (S'). Comme il est bien connu, le plan (M), tangent à (Σ) en μ, passe par la droite D, commune au plan (P), tangent à (S) en m, et au plan (P'), tangent à (S') en m'.

Cela posé, faisons décrire à m une ligne de courbure C de (S). Les points m' et μ décriront en même temps des courbes C' et Γ, situées respectivement sur (S') et (Σ). Soient mt, $m't'$, $\mu\tau$, les tangentes à C, C', Γ, respectivement aux points m, m', μ. mm' engendre un cône. mt et $m't'$ se rencontrent donc, et leur point d'intersection α appartient à D.

$m\mu$ engendre une développable [puisque C est ligne de courbure de (S), par hypothèse]. mt et $\mu\tau$ se rencontrent donc, et leur point d'intersection, situé sur D, se confond nécessairement avec α.

Il en résulte que $m't'$ et $\mu\tau$ se rencontrent. La normale $m'\mu$ engendre donc une développable, et C' est bien une ligne de courbure de (S'). C. Q. F. D.

Soit ω le centre de courbure principal de (S) en m, relativement à la direction principale mt. Soit, de même ω', ...

On reconnaît aisément que les *points* O, ω, ω', *sont en ligne droite.*

En effet, lorsque m décrit C, la droite $m\mu$ est tangente en ω à l'arête de rebroussement de la développable qu'elle engendre. De même, lorsque m' décrit C', ... Le plan ($Omm'\mu$) reste donc tangent à ces deux arêtes de rebroussement, respectivement aux points ω et ω'. Il en résulte que sa caractéristique contient les points ω et ω'. Or elle contient aussi le point O. Donc, etc.

[I19c]

SUR L'ÉQUATION $x^3+y^3+z^3=t^3$;

PAR M. D. MIRIMANOFF,
Privat-docent à l'Université de Genève.

On sait que l'équation

$$x^3+y^3=z^3$$

n'admet pas de solutions entières (Fermat, Legendre).

Mais considérons l'équation plus générale

$$x^3+y^3+z^3=t^3, \tag{1}$$

qui présente une certaine analogie avec l'équation classique

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Euler, le premier, prouva que l'équation (1) admet une infinité de solutions entières [1]. Il montra, de plus, que toutes les solutions de (1), entières ou non, s'expriment en fonction entière de quatre paramètres.

En 1841, Binet (*C. R.*, t. XII) fit voir que le nombre de ces paramètres pouvait être réduit à deux.

Enfin Hermite, dans une Note qui fut insérée dans ces *Annales* mêmes (2e série, t. II, 1872), montra que les formules d'Euler simplifiées par Binet pouvaient être déduites d'une propriété générale des surfaces du troisième ordre.

Essayons d'établir ces résultats d'une manière plus directe.

Au lieu de l'équation (1), considérons, comme l'a déjà fait Hermite, la suivante :

$$(2) \qquad x^3 + y^3 = z^3 + t^3,$$

qui se ramène à

$$(3) \qquad x'^3 + y'^3 = z'^3 + 1,$$

en posant

$$x' = \frac{x}{t}, \qquad y' = \frac{y}{t}, \qquad z' = \frac{z}{t}.$$

Soient α une racine cubique imaginaire de l'unité, $\beta = \alpha^2$ sa conjuguée. L'équation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad (x' - 1)(x' - \alpha)(x' - \beta) + y'^3 = z'^3.$$

Appelons K l'ensemble de toutes les fonctions ration-

---

(1) En voici une : $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $t = 6$.

nelles (à coefficients entiers) de α, ou bien l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{-3}$, a et b étant des fractions ordinaires quelconques positives ou négatives.

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} y' = u(x' - \alpha) + v(x' - \beta), \\ z' = u\beta(x' - \alpha) + v\alpha(x' - \beta). \end{cases}$$

A tout système de valeurs x', y', z' (solutions ou non), sauf $x' = \alpha$, β, correspond un système u, v et un seul. Si x', y', z' appartiennent au domaine K, u, v en font partie aussi.

Portons maintenant les valeurs (5) dans (4). L'équation (4) ainsi transformée ne contiendra pas les cubes de $u(x' - \alpha)$ et $v(x' - \beta)$; elle sera, de plus, divisible par $(x' - \alpha)(x' - \beta)$. Divisons-la par ce produit. Le degré de l'équation par rapport à x' se réduit à 1 et, par conséquent, toutes les racines x' différentes de α et β sont fonctions rationnelles de u et v (à coefficients appartenant au domaine K).

On a

$$(6)\qquad x' = \frac{1 + 3(\beta - 1)uv^2 + 3(\alpha - 1)u^2v}{1 + 3(1 - \alpha)uv^2 + 3(1 - \beta)u^2v}.$$

Désignons le dénominateur de x' par D.

En vertu de (5), y' et z' sont, de même que x', fonctions rationnelles des paramètres u et v,

$$y' = \frac{(1 - \alpha)u + (1 - \beta)v - 9u^2v^2}{D},$$

$$x' = \frac{(\beta - 1)u + (\alpha - 1)v - 9u^2v^2}{D}.$$

On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation (3), sauf $x' = \alpha$, β, en donnant aux paramètres u, v des valeurs quelconques.

Solutions réelles. — Pour que x', y', z' soient réelles, il faut et il suffit [en vertu de (5)] que $u+v$, $\beta u+\alpha v$, $\alpha u+\beta v$ soient réels; u est donc le conjugué de v.

Posons $\beta u+\alpha v=a$, $u+v=b$, d'où

$$\alpha u+\beta v=-a-b, \qquad uv=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Les formules (6) deviennent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(a^2+ab+b^2)(a+2b)-1}{a^3-b^3-1}, \\ y' &= \frac{(a^2+ab+b^2)^2-a-2b}{a^3-b^3-1}, \\ z' &= \frac{(a^2+ab+b^2)^2-a+b}{a^3-b^3-1}, \end{aligned}\right.$$

et l'on retombe sur les expressions obtenues par Hermite, d'où l'on déduit très simplement la première série des formules de Binet.

On obtient toutes les solutions réelles de (3) en donnant aux paramètres a, b des valeurs réelles quelconques.

Posons maintenant $\frac{a+2b}{3}=p$, $\frac{b-a}{3}=q$, d'où

$$a=p-2q, \qquad b=p+q.$$

Les formules (7) deviennent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1-9p(p^2-pq+q^2)}{1+9q(p^2-pq+q^2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et l'on retombe, en revenant à l'équation (2), sur la deuxième série des formules de Binet.

Solutions rationnelles. — Si x', y', z' sont des nombres rationnels, les paramètres a, b et p, q sont, en vertu de (5), rationnels aussi. On obtient donc toutes les solutions rationnelles de (3) en donnant aux paramètres a, b ou p, q des valeurs rationnelles quelconques.

A toute solution rationnelle de (3) correspond une solution entière de (2) en multipliant par le dénominateur des trois fractions de (3). On en déduit facilement des formules générales donnant toutes les solutions entières de (2).

[J2f]

UN PARADOXE DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. R. DE MONTESSUS.

Dans son *Traité du Calcul des probabilités*, J. Bertrand se propose de rechercher la *probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit* et, à ce propos, le célèbre géomètre résout les trois problèmes *particuliers* que voici :

I. *D'un point quelconque* A, *pris à l'intérieur d'une circonférence* O *et sur un diamètre déterminé* xOy, *on mène une corde perpendiculaire à ce diamètre. Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence?*

Réponse : $\frac{1}{2}$.

II. *D'un point quelconque* B, *pris sur une circonférence, on mène une corde quelconque. Quelle est la* *probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{3}$.

III. *D'un point quelconque* C, *intérieur à une circonférence, on mène une corde perpendiculaire au rayon* OC. *Quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?*

Réponse : $\frac{1}{4}$.

De la divergence de ces réponses J. Bertrand conclut que le problème de la probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est une question « mal posée » ; M. H. Poincaré dirait plutôt que « le bon sens ne suffit pas ici pour nous apprendre quelle *convention* il faut faire ».

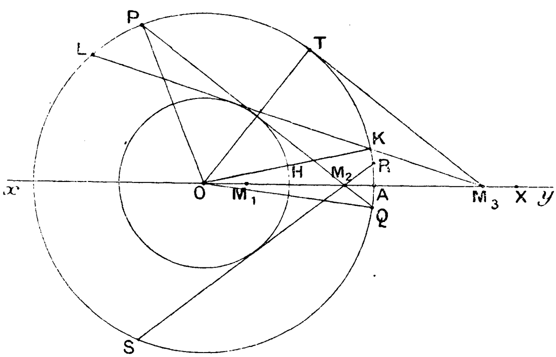
Nous faisons, en effet, une convention en disant que le problème de Bertrand est identique à l'un des trois problèmes résolus au début. Nous convenons que les cordes dont on compare les longueurs sont construites d'une façon *déterminée :* et il se trouve que la solution du problème dépend de ce mode de construction.

En quoi la solution du problème de Bertrand dépend-elle du mode de construction? En ce qu'il n'est pas de *comparaison* possible entre les évaluations des nombres de cordes résultant de procédés de construction *différents*. Cette impossibilité, évidente s'il s'agit d'un nombre de cordes limité, s'étend d'elle-même au cas d'un nombre de cordes illimité.

Tout au plus peut-on prendre des conventions plus larges que celles admises dans les trois problèmes traités au début : chercher, par exemple, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque d'un diamètre déterminé xOy d'une circonférence O soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ou, mieux encore, la probabilité pour qu'une corde menée d'un point quelconque du plan de la circonférence vérifie la condition imposée.

Ces problèmes sont faciles à traiter. Nous y trouverons lieu de confirmer l'indétermination du problème de Bertrand.

Problème I. — *D'un point quelconque* M *situé sur un diamètre déterminé et indéfini* xOy *d'un cercle* O



de rayon 1, *on mène une corde quelconque; quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle?*

Le point M peut se trouver soit entre les points O et H, H milieu du rayon OA, soit entre les points H et A, soit au delà du point A.

Dans le deuxième cas, les cordes menées de M_2 sont plus grandes que le côté du triangle équilatéral si elles tombent dans l'un des angles PM_2O, RM_2A définis par les cordes PM_2Q, RM_2S égales au côté du triangle équilatéral. Au contraire, les cordes qu'il est possible de mener de O tombent dans l'un des angles PM_2x, RM_2P, yM_2R. Ici, le nombre des cas favorables est représenté par la somme d'angles

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2A} = \widehat{PM_2x} + \widehat{AM_2Q} = 2\widehat{PM_2x} = 2\pi - 2\widehat{OM_2Q},$$

et le nombre des cas possibles par

$$\widehat{PM_2x} + \widehat{RM_2P} + yM_2R = \pi.$$

Soit $OM_2 = x$; le triangle OM_2Q donne

$$\frac{OQ}{\sin\widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin\widehat{M_2QO}}, \qquad \frac{1}{\sin\widehat{OM_2Q}} = \frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}\left(\text{ou } \frac{1}{2}\right)}$$

et

$$OM_2Q = \text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

On remarquera que l'angle OM_2Q est obtus; si donc on prend pour arc sin la détermination comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, on devra écrire

$$OM_2Q = \pi - \text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

Il en résulte que le nombre des cas favorables est représenté par

$$2\,\text{arc sin}\,\frac{1}{2x}.$$

Dans le premier cas, toutes les cordes vérifient la condition imposée; le nombre des cas possibles étant représenté par π, comme précédemment, le nombre des cas favorables sera également représenté par π.

Dans le troisième cas, où l'on prendra $OM_3 = y$, si M_3T, M_3KL sont respectivement la tangente et la corde égale au côté du triangle équilatéral menées de M_3, les nombres des cas favorables et possibles seront représentés par les angles $\widehat{OM_3K}$, $\widehat{TM_3O}$. Le triangle OKM_3 donne

$$\frac{\sin \widehat{OM_3K}}{OK} = \frac{\sin \widehat{OKM_3}}{OM_3},$$

d'où

$$\sin \widehat{OM_3K} = \frac{\sin \widehat{LKO} \left(\text{ou } \sin \frac{\pi}{6}\right)}{y},$$

donc

$$\widehat{OM_3K} = \arcsin \frac{1}{2y};$$

de plus,

$$OT = OM_3 \sin \widehat{TM_3O} \qquad \text{et} \qquad \widehat{TM_3O} = \arcsin \frac{1}{y}.$$

Ainsi, *pour un point* M_2, *situé à la distance* x *du centre,* $\frac{1}{2} < x < 1$, *la probabilité d'une corde plus grande que le côté du triangle équilatéral sera*

$$\frac{2 \arcsin \frac{1}{2x}}{\pi}, \quad \left(1 < \frac{\arcsin \frac{1}{2x}}{\pi} < \frac{1}{3}\right);$$

pour un point M_3, *situé à la distance* y *du centre, la probabilité sera*

$$\frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}}, \quad \left(\frac{1}{3} < \frac{\arcsin \frac{1}{2y}}{\arcsin \frac{1}{y}} < \frac{1}{2}\right):$$

La probabilité est donc fonction de la distance du point M au centre.

Revenons au calcul de la probabilité pour un point M occupant une position quelconque sur un segment $OP = a$ de la droite xOy.

Partageons OH en n parties égales par les points H_1, H_2, ..., H_{n-1}, situés aux distances

$$x_1 = \frac{1}{2n}, \qquad x_2 = \frac{2}{2n}, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = \frac{n-1}{2n}$$

du point O et prolongeons cette division jusqu'au point A par les points H_{n+1}, H_{n+2}, ..., H_{2n-1} d'abscisses

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ x_{n+2} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{2n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n}, \end{aligned}$$

et enfin jusqu'au point P par les points A_1, A_2, ..., A_p d'abscisses

$$\begin{aligned} y_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2n}, \\ y_{2n+2} &= 1 + \frac{2}{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ y_{2n+p} &= 1 + \frac{p}{2n}. \end{aligned}$$

L'ensemble des cas favorables sera pour les points x_1, ..., x_{n-1} :

$$(n-1)\pi;$$

pour les points x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1} :

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2 \arcsin \frac{1}{2x_i};$$

pour les points $y_{2n+1}, y_{2n+2}, \ldots, y_{2n+p}$:

$$\sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{2y_j};$$

tandis que les ensembles des cas possibles seront respectivement

$$(n-1)\pi, \quad (n-1)\pi, \quad \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j}.$$

La probabilité pour l'ensemble des points considérés sera donc

$$\frac{(n-1)\pi + \sum\limits_{i=n+1}^{i=2n-1} 2\arcsin \frac{1}{2x_i} + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{2y_j}}{2(n-1)\pi + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j}}.$$

Or,

$$y_{j+1} - y_j = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2n};$$

écrivant l'expression précédente comme suit :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi + \sum\limits_{i=n+1}^{i=2n+1} 2\arcsin \frac{1}{2x_i}(x_{i+1}-x_i) + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \frac{1}{2y_j}(y_{j+1}-y_j)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi + \sum\limits_{j=2n+1}^{j=2n+p} \arcsin \frac{1}{y_j}(y_{j+1}-y_j)},$$

il résulte, en faisant croître n indéfiniment, que la formule

$$P = \frac{\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\arcsin \frac{1}{2x}\,dx + \int_{1}^{a} \arcsin \frac{1}{2y}\,dy}{\pi + \int_{1}^{a} \arcsin \frac{1}{y}\,dy}$$

représente la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point pris au hasard sur le segment

$$OX = a > 1$$

soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit.

Si l'on observe que

$$\int \arc\sin\frac{\alpha}{x}\,dx = x \arc\sin\frac{\alpha}{x} + \alpha\log\left[\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 1}\right],$$

on pourra écrire

$$P = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}) + a\arc\sin\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\log(2a+\sqrt{4a^2-1})}{\frac{\pi}{2} + a\arc\sin\frac{1}{a} + \log(a+\sqrt{a^2-1})}.$$

Si a tend vers l'infini, $a \arc\sin\frac{1}{a}$ a une limite finie et P a par suite même limite que

$$\frac{\frac{1}{2}\log(2a+\sqrt{4a^2-1})}{\log(a+\sqrt{a^2-1})},$$

soit $\frac{1}{2}$:

Ainsi, $\frac{1}{2}$ *est la probabilité pour qu'une corde menée à un cercle d'un point quelconque d'une droite indéfinie, déterminée et homogène passant par son centre, soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.*

Problème II. — *D'un point quelconque du plan d'un cercle O de rayon* 1, *on mène une corde quelconque à ce cercle ; quelle est la probabilité pour que cette corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ?*

Aux chances λ et μ trouvées tout à l'heure pour un point situé sur la droite xOy et à la distance d du centre de la circonférence, il faudra substituer les chances $\lambda.2\pi d$, $\mu.2\pi d$ de l'ensemble des points dont la distance au centre de cette même circonférence est précisément d.

On obtiendra ainsi les expressions

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} 2\pi x_i \arcsin \frac{1}{2x_i} + \sum_{i=2n+1}^{i=2n+p} \pi y_j \arcsin \frac{1}{2y_j}}{\sum_{k=1}^{k=n-1} \pi x_k + \sum_{i=n+1}^{i=2n-1} \pi x_i + \sum_{j=2n+1}^{j=2n+p} \pi y_i \arcsin \frac{1}{y_j}}$$

et

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dx + x\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \arcsin \frac{1}{2x}\, dx + \int_1^a y \arcsin \frac{1}{2y}\, dy}{\int_0^1 x\, dx + \int_1^a y \arcsin \frac{1}{y}\, dy}.$$

Si l'on observe que

$$\int x \arcsin \frac{\alpha}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{x^2 - \alpha^2},$$

on trouvera que *la probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque intérieur à un cercle de rayon a* ($a > 1$), *concentrique au cercle* O, *soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit est*

$$\frac{1 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + 4a^2 \arcsin \frac{1}{2a} + \sqrt{4a^2 - 1}}{4 - 2\pi + 4a^2 \arcsin \frac{1}{a} + 4\sqrt{a^2 - 1}}:$$

LA PROBABILITÉ EST ENCORE UNE FONCTION DU NOMBRE a.

La limite de cette expression, quand a tend vers l'infini, est $\frac{1}{2}$: *La probabilité pour qu'une corde quelconque menée d'un point quelconque du plan soit plus grande que le côté du triangle équilatéral est encore* $\frac{1}{2}$.

Quoi qu'il en soit, *le problème dépend d'une convention arbitraire et, pour cette raison, il admet une* INFINITÉ *de solutions.*

Au fait, considérons, par exemple, les deux opérations suivantes qui chacune *matérialisent* le problème de Bertrand :

a. On lance une bille dans un canal creusé le long d'une circonférence; on la fixe en son point d'arrêt; on lui adapte un index rectiligne qu'on lance autour de ce point comme pivot.

b. On lance une bille sur le plan d'un cercle limité à la circonférence du cercle par un rebord; on fixe la bille en son point d'arrêt et on lui adapte un index rectiligne; on fait tourner l'index autour de la bille.

Dans l'une et l'autre de ces opérations, l'index, une fois arrêté, détermine dans le cercle une corde tantôt plus grande, tantôt plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit. Cela posé, répétons l'opération a un très grand nombre de fois et soit α le rapport du nombre des cordes plus grandes que le côté du triangle équilatéral inscrit au nombre des cordes plus petites que ce même côté; puis reprenons l'opération b et calculons ici encore le rapport du nombre des cordes de la première catégorie au nombre des cordes de la seconde catégorie : *on trouvera que les nombres* α, β *tendent vers des limites* NON IDENTIQUES *quand le nombre des expériences s'accroît de plus en plus.*

Nous ne saurions nous en étonner, car, dans chacune de ces deux catégories d'expériences, le problème de Bertrand se trouve matérialisé au prix d'une CONVENTION spéciale, portant sur la manière de lancer la bille qui sert de pivot à l'index.

En dernière analyse, LA SOLUTION DU PROBLÈME DÉPEND D'UNE CONVENTION. J. Bertrand le savait, car, nous dit M. Darboux dans son bel éloge académique du maître vénéré : « Cette question l'a préoccupé; il en avait trouvé la solution, mais il la laisse à chercher à son lecteur ».

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1902). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

Étant donnée la surface du second ordre S *qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-2x=0,$$

on considère les deux coniques C *et* C′ *d'intersection de cette surface par les plans* xOy *et* xOz, *et une droite* D *située dans le plan* yOz *et passant par l'origine des coordonnées.*

1° *Trouver l'équation de tout plan* P *tel que, si* M *est l'un de ses points d'intersection avec la conique* C, M′ *l'un de ses points d'intersection avec la conique* C′, *et* N *son point d'intersection avec la droite* D, *les trois points* M, M′, N *soient en ligne droite.*

2° *Trouver l'enveloppe des plans* P.

3° *Trouver le lieu* Σ *des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe* A *de l'espace sur les plans* P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, *passant par* A, *qui coupent cette surface* Σ *suivant deux cercles.*

Trouver l'enveloppe de ces plans Q *et le lieu de la corde commune aux deux cercles.*

4° *Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre* S *est un paraboloïde?*

I. Les équations de la droite D étant

$$x = 0, \qquad y - mz = 0,$$

considérons le plan défini par la droite D et la droite MM'N ou Δ ; l'équation de ce plan est de la forme

$$y - mz - \alpha x = 0.$$

Les équations de la conique C sont

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2x = 0.$$

Le plan (D, Δ) coupe cette conique C au point O et au point M dont les coordonnées x_1, y_1 se déduisent des équations précédentes

$$x_1 = \frac{2ab}{b + a\alpha^2}, \qquad y_1 = \frac{2ab\alpha}{b + a\alpha^2}.$$

Les équations de la conique C' étant

$$x = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

les coordonnées x_2, z_2 du point M' seront

$$x_2 = \frac{2acm^2}{cm^2 + a\alpha^2}, \qquad z_2 = \frac{-2acm\alpha}{cm^2 + a\alpha^2}.$$

Si

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P, en exprimant que les points M et M' sont dans ce plan, on a les deux conditions

$$(1) \qquad 2abu + 2ab\alpha v + b + a\alpha^2 = 0,$$

$$(2) \qquad 2acm^2 u - 3acm\alpha w + cm^2 + a\alpha^2 = 0.$$

En tirant de ces équations v et w, l'équation d'un plan P s'écrit

$$ux - \frac{2abu + b + a\alpha^2}{2ab\alpha} y + \frac{2acm^2 u + cm^2 + a\alpha^2}{2acm\alpha} z + 1 = 0$$

ou

$$2abcm\alpha ux - cm(2abu + b + a\alpha^2)y + b(2acm^2 u + cm^2 + a\alpha^2)z + 2abcm\alpha = 0$$

ou encore

$$(3) \quad \begin{cases} 2abcmu(\alpha x - y + mz) \\ \quad - cm(b + a\alpha^2)y + b(cm^2 + a\alpha^2)z + 2abcm\alpha = 0. \end{cases}$$

Elle renferme deux paramètres u et α.

II. Cherchons d'abord l'enveloppe des plans P en coordonnées ponctuelles. Il suffit d'éliminer u et α entre l'équation (3) et ses dérivées par rapport à u et α, savoir

$$(3)' \qquad \alpha x - y + mz = 0.$$

$$(3)'' \qquad 2abcmux - 2acm\alpha y - 2ab\alpha z + 2abcm = 0,$$

En tenant compte de (3)' l'équation (3) ne renfermera plus le paramètre u ; elle devient

$$a\alpha^2(bz - cmy) + 2abcm\alpha + bcm(mz - y) = 0.$$

Remplaçant dans cette équation α par sa valeur tirée de l'équation (3)', on obtient l'enveloppe demandée

$$\frac{a}{x^2}(y-mz)^2(bz-cmy)$$
$$+2abcm\frac{(y-mz)}{x}+bcm(mz-y)=0,$$

qui se décompose dans le plan

$$y-mz=0,$$

c'est-à-dire le plan xOD qui contient l'infinité des droites Δ qui passent par le deuxième point commun O' aux coniques C et C', et l'hyperboloïde H

$$a(y-mz)(bz-cmy)+2abcmx-bcmx^2=0$$

ou

$$(4)\qquad a(y-mz)(cmy-bz)+bcmx(x-2a)=0.$$

On voit les deux systèmes de génératrices de cet hyperboloïde; il passe par les coniques C, C' et la droite D; c'est donc l'hyperboloïde engendré par les droites Δ s'appuyant sur les coniques C, C' et la droite D. D'ailleurs on pouvait remarquer tout d'abord que les droites MM'N ou Δ engendraient un hyperboloïde H, et que tout plan P passant par Δ était tangent à H; de là un autre procédé de calcul pour résoudre les deux premières parties de la question : on considère le faisceau des quadriques passant par les coniques C et C'; il a pour équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-2x+\lambda yz=0,$$

et l'on prend λ de façon que cette équation représente une quadrique passant par la droite D; on obtient ainsi l'hyperboloïde (4). Le système des génératrices Δ est représenté par les équations

$$y - mz = \alpha x$$
$$a\alpha(cmy - bz) = bcm(2a - x)$$

et tout plan P, passant par Δ, a une équation de la forme

$$\beta(\alpha x - y + mz) + a\alpha(cmy - bz) - bcm(2a - x) = 0$$

renfermant deux paramètres α et β.

Pour trouver l'équation de l'enveloppe du plan P en coordonnées tangentielles, il suffit d'éliminer α entre les équations (1) et (2); pour cela, éliminons successivement $a\alpha^2$ et u entre ces équations; on obtient

$$(1)' \qquad (b - cm^2)(2au + 1) + 2a\alpha(bv + cmw) = 0$$

et

$$-2abcm^2\alpha v - 2abcm\alpha w + a\alpha^2(b - cm^2) = 0$$

ou

$$(2)' \qquad -2bcm(mv + w) + \alpha(b - cm^2) = 0.$$

L'élimination de α entre (1)' et (2)' donne l'équation cherchée

$$(4)' \quad 4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - mc^2)^2(2au + 1) = 0.$$

III. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan P dont les coordonnées homogènes sont u, v, w, h. On trouvera l'équation ponctuelle du lieu Σ des pieds E des perpendiculaires issues de A aux plans P en éliminant u, v, w, h entre les équations

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$$
$$= \frac{z - z_0}{w} = \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)}{-h},$$

$$4abcm(mv + w)(bv + cmw) + (b - cm^2)^2(2auh + h^2) = 0.$$

Pour cela on remplace dans la dernière équation u, v, w, h par des quantités proportionnelles $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, $x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)$ et l'on a

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&4abcm\,[m(y-y_0)+z-z_0]\,[b(y-y_0)+cm(z-z_0)]\\
&\quad+(b-cm^2)^2\,[x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]\\
&\quad\times[2a(x-x_0)+x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette surface Σ est du quatrième ordre, bicirculaire; elle admet A pour point double : c'est aussi une surface anallagmatique. Ces résultats sont connus, car la surface Σ étant la podaire de l'hyperboloïde H est aussi l'inverse de la quadrique polaire réciproque de H par rapport à une sphère de centre A. Le cône des tangentes au point double A est le cône supplémentaire du cône circonscrit à H de sommet A.

Il existe une infinité de plans Q, passant par A, et coupant la surface Σ suivant deux cercles. Pour le voir, considérons les plans P passant par une droite Δ; pour ces plans, le lieu de E est un cercle de centre ω, de diamètre AB, en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ. En considérant la génératrice Δ' de l'hyperboloïde H parallèle à Δ, on a, dans le même plan Q, un cercle de centre ω' de diamètre AB$'$, le point B$'$ étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ'. Donc tout plan Q qui passe par A et qui est perpendiculaire à une génératrice Δ ou Δ' de H coupe Σ suivant deux cercles.

Une génératrice Δ de H étant parallèle à une génératrice du cône asymptote Γ de H, les plans Q perpendiculaires aux génératrices du cône Γ envelopperont le cône Γ' supplémentaire de Γ et de sommet A.

La corde commune AA' aux deux cercles ω et ω' situés dans un plan Q est perpendiculaire à la ligne des centres $\omega\omega'$ et par suite à la droite BB' parallèle à $\omega\omega'$; mais les deux plans BAB' ou Q et (Δ, Δ') étant perpendiculaires, comme AA' est perpendiculaire à leur intersection BB', AA' est aussi perpendiculaire au plan (Δ, Δ') qui est tangent au cône asymptote Γ de H; donc le lieu de AA' est le cône Γ' supplémentaire de Γ, de sommet A, enveloppé par les plans Q; de plus, un plan Q touche le cône Γ' le long de la corde AA' située dans ce plan Q.

IV. Dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde S_1 représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

il suffit de supposer $\frac{1}{a} = 0$, ou $a = \infty$, et de voir ce que deviennent les équations trouvées dans le cas précédent. L'équation (3) du plan P devient

$$(\mathrm{P}) \quad 2bcmu(\alpha x - y + mz) - cm\alpha^2 y + b\alpha^2 z + 2bcm\alpha = 0.$$

L'enveloppe de ce plan est le paraboloïde hyperbolique η ayant pour équation en coordonnées ponctuelles

$$(\eta) \qquad (y - mz)(cmy - bz) - 2bcmx = 0,$$

et en coordonnées tangentielles

$$(\eta)' \quad 2bcm(mv + w)(bv + cmv) + (b - cm^2)^2 uh = 0.$$

La surface podaire Σ_1 de ce paraboloïde relative au point A est du troisième ordre; c'est un cyclide cubique ayant pour équation

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} 2bcm[m(y - y_0) + z - z_0][b(y - y_0) + cm(z - z_0)] \\ \quad + (b - cm^2)^2 (x - x_0)[x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] = 0. \end{array} \right.$$

Le cône asymptote de l'hyperboloïde H est remplacé par l'ensemble des plans directeurs ϖ_1 et ϖ_2 du paraboloïde η. Les plans Q deviennent des plans passant par A et perpendiculaires à l'un ou l'autre des plans directeurs de η. Un plan Q, perpendiculaire à un plan directeur, coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite, issue de A, perpendiculaire à ce plan directeur.

En effet, une droite MM'N ou Δ reste parallèle au plan directeur ϖ_1 ayant pour équation

$$cmy - bz = 0.$$

Considérons, comme précédemment, les plans P passant par Δ; le lieu des pieds E des perpendiculaires issues de A à ces plans P est le cercle de centre ω, de diamètre AB, en désignant par B le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ; le plan Q de ce cercle est le plan mené par A perpendiculairement à Δ; le plan Q est perpendiculaire au plan ϖ_1 parallèle à Δ et il contient la perpendiculaire AA' à ϖ_1; cette perpendiculaire AA' appartient à Σ_1 comme on le voit en supposant que la droite Δ s'éloigne à l'infini; le diamètre AB du cercle ω devient infini et ce cercle devient la droite AA'.

Si l'on considère ensuite les génératrices Δ' du paraboloïde η parallèles au plan directeur ϖ_2 ($y - mz = 0$), on voit, de la même manière, qu'un plan Q perpendiculaire à ϖ_2 coupe Σ_1 suivant un cercle et une droite AA'', issue de A et perpendiculaire à ϖ_2.

Enfin l'enveloppe des plans Q qui passent par les droites AA' ou AA'' se compose de ces deux droites; on peut dire aussi que ces droites remplacent les cordes communes aux cercles ω et ω' du cas précédent.

On peut ajouter que l'existence de ces plans Q et leurs propriétés se voient sur l'équation (Σ_1).

CERTIFICAT DE CHRONOMÉTRIE.

Besançon.

Balancier compensateur. — Théorie des balanciers compensateurs à lame bimétallique. (Juillet 1902.)

Le balancier d'un chronomètre étant supposé rigide, on demande d'évaluer la perturbation que l'inertie du spiral apporte à l'isochronisme. On admettra que l'isochronisme statique soit préparé par l'emploi d'un spiral cylindrique Philipps; mais on supposera que le nombre des spires soit assez grand pour que, malgré ses courbes terminales, le spiral puisse être regardé comme sensiblement cylindrique dans tout son ensemble.

ÉPREUVE PRATIQUE (*commune aux certificats de Mécanique rationnelle et de Chronométrie*). — 1° *On envisage deux systèmes, semblables dans leur composition géométrique (rapport de similitude* α*), semblables dans leur composition matérielle (rapport des masses concentrées sur les éléments géométriquement semblables* β*), semblables dans les forces qui sollicitent ces mêmes éléments (rapport de ces forces* δ*); montrer que par un choix convenable des vitesses initiales les déplacements du second système seront continuellement semblables aux déplacements du premier système, mais emploieront des durées dont le rapport* γ *aux durées des déplacements homologues de ce système vérifiera la relation*

$$\delta = \frac{\alpha\beta}{\gamma^2};$$

2° *Un artiste reproduit aveuglément un chronomètre* DE MATIÈRE DONNÉE, *mais il le reproduit à une échelle linéaire* n; *faire voir que* SI L'ON NÉGLIGEAIT LES RÉSISTANCES PASSIVES ET SI LES PIÈCES SONT BIEN AXÉES, *de manière que la pesanteur n'influe pas sur les mouvements des deux pièces, ces mouvements seront semblables; calculer le rapport des durées homologues des deux instruments; faire voir que cepen-*

dant les réactions inefficaces pour l'entretien du mouvement ne sont pas dans le même rapport que les forces produites par l'élasticité des ressorts. Qu'en résulte-t-il si l'on tient compte des résistances passives des frottements de glissement? On néglige les résistances au roulement.

(Novembre 1902.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE PHYSIQUE ET EXPÉRIMENTALE.

Paris.

Équations du mouvement intérieur dans un solide isotrope. Onde plane.

Couples d'éléments cinématiques; leurs propriétés.

(Octobre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Équilibre élastique d'un tube cylindrique de révolution. Expériences de M. Amagat pour déterminer le coefficient d'élasticité et le coefficient de Poisson.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Statique graphique : épure des tensions dans les barres d'une ferme à la Polonceau.*

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Distribution des tensions à l'intérieur d'un milieu continu. Tensions principales autour d'un point. Quadriques directrices.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Faire l'épure de la poutre de Warren à deux appuis, avec charges verticales. Méthode des nœuds.* (Octobre 1902.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

Calcul des résistances passives dans un treuil à engrenage; on tiendra compte du frottement propre de l'engre-

nage et du frottement des coussinets, en supposant que la puissance est donnée sous la forme d'un couple constant.

(Novembre 1900.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étude des freins dans les voitures automobiles : rôle des freins; théorie du freinage : 1° par le moteur; 2° à l'aide de sabots, de cordes ou de lames flexibles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Boîte du mouvement différentiel d'une voiture automobile.*

On demande : 1° les dessins d'exécution de la boîte et des axes des pignons d'après un croquis coté donné; 2° l'épure des pignons coniques par le tracé approximatif de Tredgold.

(Juillet 1901.)

PREMIÈRE QUESTION. — *Étudier pour un automobile à essieu d'arrière moteur la répartition de la charge sur les deux essieux pendant le démarrage; déterminer le maximum de l'accélération au départ, dans des conditions données de stabilité.*

SECONDE QUESTION. — *Déformation du quadrilatère plan articulé ; condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des pivots à révolution complète.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Exposer sommairement la méthode de M. Léauté pour tracer approximativement par arcs de cercle les profils d'engrenages cylindriques.*

L'appliquer aux données suivantes :

Grande roue	36 dents
Petite roue	18 dents
Rayon du cercle primitif de la petite roue.	$0^{m},14$

(Novembre 1901.)

I. *Effets dus à l'inertie dans les moteurs fixes à grande vitesse : diagramme corrigé; efforts supportés par le bâti (on donnera la construction de Mohr et la méthode analytique, en tenant compte seulement de l'inertie du piston).*

II. *Détermination des dimensions d'un arbre soumis à la flexion et à la torsion.* (Juillet 1902.)

Étudier les différents modes d'action d'une roue d'automobile selon qu'elle est porteuse, motrice ou freinée. Établir dans les trois cas l'équation d'équilibre dynamique de la roue. Conséquences. (Novembre 1902.)

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorie des éclipses de Lune.* (Juillet 1901.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1903.

(1901, p. 47.)

Si l'on considère les courbes tracées sur une même quadrique, le rapport anharmonique de quatre courbes quelconques, tangentes à une même biquadratique, est constant lorsque ces courbes appartiennent à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables.

(H. LÉAUTÉ.)

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Ce théorème résulte de la proposition suivante :

Soit $f(u)$ une fonction elliptique du second ordre, construite sur les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. Si l'on désigne par $2k$ la somme des deux pôles de $f(u)$, le rapport anharmo-

nique des quatre quantités

$$f(k),\quad f(k+\omega_1),\quad f(k+\omega_2),\quad f(k+\omega_3),$$

où

$$\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$$

est indépendant de la fonction f et a pour valeur

$$\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2},$$

en posant, suivant l'usage,

$$p\omega_1 = e_1,\qquad p\omega_2 = e_2,\qquad p\omega_3 = e_3.$$

Autrement dit, ce rapport anharmonique est un *invariant absolu* pour les fonctions elliptiques du second ordre, admettant des périodes données.

Considérons, en effet, les deux fonctions elliptiques

$$f(u),\quad p(u-k).$$

Elles admettent les mêmes périodes $2\omega_1, 2\omega_2$. Il existe donc entre elles une relation algébrique, qui est nécessairement linéaire par rapport à chacune d'elles. Donnons-nous, en effet, une valeur quelconque α ; $f(u)$ prendra cette valeur pour deux arguments u_1 et u_2 liés par les relations

$$u_1 + u_2 = 2k,$$

d'où il résulte

$$p(u_1 - k) = p(u_2 - k).$$

Ainsi à une valeur de $f(u)$ ne correspond qu'une valeur de $p(u-k)$. De même.... Donc, etc.

Il résulte de là que u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre arguments quelconques, le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de $f(u)$ est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de $p(u-k)$. Faisons, en particulier,

$$\begin{aligned} u_1 &= k,\\ u_2 &= k+\omega_1,\\ u_3 &= k+\omega_2,\\ u_4 &= k+\omega_3. \end{aligned}$$

On aura

$$\frac{f(k)-f(k+\omega_2)}{f(k+\omega_1)-f(k+\omega_2)} : \frac{f(k)-f(k+\omega_3)}{f(k+\omega_1)-f(k+\omega_3)}$$
$$= \frac{p(o)-p\omega_2}{p\omega_1-p\omega_2} : \frac{p(o)-p\omega_3}{p\omega_1-p\omega_3} = \frac{e_1-e_3}{e_1-e_2},$$

C. Q. F. D.

Cela posé, soient C la biquadratique considérée, $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes des fonctions elliptiques qui peuvent servir à la représentation paramétrique de cette courbe, (F) un faisceau de courbes algébriques tracées sur les quadriques, et dont chacune ne rencontre C qu'en deux points. Chaque courbe de (F) est déterminée par un paramètre λ qui est connu lui-même rationnellement si l'on donne l'un des points de rencontre de cette courbe avec C. Soit u le paramètre elliptique de ce point. On aura

$$\lambda = f(u),$$

f étant une certaine fonction elliptique. En vertu de l'hypothèse faite, $f(u)$ ne peut prendre la même valeur que pour deux valeurs de u ; c'est donc une fonction elliptique du second ordre.

Soit $2k$ la somme des pôles de cette fonction. Les arguments de deux points de C situés sur une même courbe (F) satisfont à la relation

$$u_1 + u_2 = 2k + \text{période}.$$

Pour trouver les courbes (F) tangentes à C, on fera dans cette égalité $u_1 = u_2$. On voit ainsi qu'il existe quatre telles courbes (F), et que les arguments des points de contact sont

$$k, \quad k+\omega_1, \quad k+\omega_2, \quad k+\omega_3.$$

Le théorème à démontrer est maintenant une conséquence immédiate du lemme établi au début.

1918.

(1901, p. 336.)

Construire le point où une normale à une parabole coupe la développée de cette courbe, en dehors du point où elle est tangente à la développée. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E. Duporcq.

On sait que les pieds de trois normales concourantes à une parabole forment un triangle dont le centre de gravité est sur l'axe. Soient donc M le pied d'une normale, A le point où elle coupe la développée en dehors du centre de courbure en M, enfin N le pied de la normale qui touche la développée en A. Le point A peut être considéré comme l'intersection de trois normales, dont deux sont confondues et normales en N, la troisième étant la normale en M. Par suite, le point N est de l'autre côté que M par rapport à l'axe, et à une distance deux fois moins grande. Il est donc facile à construire : on en déduit la normale NA et le point A.

La construction inverse donnerait le centre de courbure A relatif au point N.

Autres solutions de MM. Barisien, Brocard, Lez et Valdès.

1921.

(1902, p. 96.)

Démontrer que pour tout nombre entier n on a l'inégalité

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 > n\pi$$

et que, lorsque n augmente indéfiniment, la différence des deux termes de l'inégalité tend vers zéro.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Monnet.

La proposition énoncée se rattache directement aux propriétés de l'intégrale classique

$$\psi(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx.$$

Rappelons, en effet, les formules

$$\psi(2n) \quad = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\psi(2n+1) = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

et l'inégalité évidente

$$\psi(2n-1) > \psi(2n) > \psi(2n+1).$$

Il viendra

$$\frac{2.4.6\ldots 2n-2}{1.3.5\ldots 2n-1} > \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1}.$$

Multiplions les trois membres par

$$2n\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1};$$

nous obtiendrons les inégalités

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 > n\pi > \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2$$

qui démontrent la proposition.

QUESTIONS.

1953. Soient, pour un point M d'une courbe (M) quelconque, m et μ les centres des deux premières courbures. MT étant la tangente en M à cette courbe, Δ une direction fixe quelconque, on porte des longueurs égales au rayon de courbure mM en $m\mathrm{M}_1$ et MM_2 sur les parallèles à Δ menées par m et M, en MM_3 sur la tangente MT. Les tangentes en M_1, M_2, M_3 aux courbes décrites respectivement par ces trois points résultent des théorèmes suivants :

I. *La tangente en* M_1 *passe par* M.

II. *La tangente en* M_2 *passe par le point de rencontre de la tangente* MT *et de la perpendiculaire abaissée de* m *sur la symétrique de* $M\mu$ *par rapport à la normale* Mm.

III. *La tangente en* M_3 *est symétrique de* $M_3\mu$ *par rapport à la tangente* MM_3. (M. D'OCAGNE.)

1954. Trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 déterminent un réseau ponctuel de quadriques Q. Les polaires D d'une droite Δ par rapport aux surfaces Q appartiennent à une congruence :

1° Les droites de la congruence sont en général les cordes d'une cubique gauche C;

2° Lorsque Δ varie, les cubiques C rencontrent en huit points une courbe fixe;

3° Trouver la surface S lieu des droites Δ telles que les droites D passent par un point fixe, et la courbe lieu de ce point, quand Δ, variant, engendre la surface S.

(R. GILBERT.)

1955. Étant donnés : deux droites fixes rectangulaires Ox, Oy et un cercle C qui passe en O; l'enveloppe des droites dont les segments, limités à Ox, Oy, ont leur milieu sur le cercle est une hypocycloïde triangulaire H_3 (*Nouvelles Annales,* janvier 1902).

Montrer géométriquement que l'enveloppe de cette courbe H_3, quand le cercle C de rayon constant tourne autour du point O, est une hypocycloïde quadrangulaire H_4. (R. GILBERT.)

1956. On donne dans l'espace quatre droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, et quatre génératrices D_1, D_2, D_3, D_4 d'un même système d'une quadrique Q. Trouver le lieu d'un point M tel que les quatre plans MD_1, MD_2, MD_3, MD_4 rencontrent Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 respectivement en quatre points situés dans un même plan P et l'enveloppe de ce plan. (R. GILBERT.)

1957. Une parabole est bitangente à une conique donnée S en un point fixe et en un autre point. Le lieu du foyer est une podaire de parabole.

Cas particuliers : 1° la conique donnée S est une hyperbole équilatère; 2° la conique S se décompose en un couple de points. (R. GILBERT.)

1958. D'un point A d'une hyperbole donnée, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe; elles coupent en B, C la tangente à l'hyperbole au point M. On projette orthogonalement A en P sur la normale en M. Démontrer que les cercles tels que PBC passent par un même point, quel que soit le point A de l'hyperbole. (MANNHEIM.)

1959. Le triangle ABC est circonscrit à une parabole donnée; sur la normale à cette courbe, menée du point de contact de BC, on projette orthogonalement A en P. Démontrer que les cercles, tels que PBC, passent par un même point, quelle que soit la position de A. (MANNHEIM.)

1960. Construire le rayon de courbure en un point d'une conique, connaissant la tangente en ce point et trois autres tangentes. (MANNHEIM.)

1961. Déterminer une expression du rapport des arcs infiniment petits interceptés sur deux courbes données par des cercles infiniment voisins dont on connaît l'axe radical.

(MANNHEIM.)

ERRATA.

4ᵉ série, Tome II, 1902. Page 570, douzième ligne en remontant, *au lieu de :*

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi, \quad \textit{lire :} \quad x = \mathrm{R}\cos\alpha.$$

Même page, quatrième ligne en remontant, *au lieu de :* où le centre touche, *lire :* où la courbe touche.

Page 572, septième ligne en remontant, *au lieu de :*

$$-(10n + q\mathrm{R})x^3, \quad \textit{lire :} \quad -(10n + 9\mathrm{R})x^3.$$

Page 573, vingtième ligne en remontant, *au lieu de :*

$$+8\mathrm{R}x(x^2 + 3y^2), \quad \textit{lire :} \quad +8\mathrm{R}x(x^2 - 3y^2).$$

Page 574, dixième ligne en remontant, *au lieu de :*

$$-2m\sin\varphi, \quad \textit{lire :} \quad +2m\sin\varphi.$$

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 1. *SUPPLÉMENT.* JANVIER 1903.

CHRONIQUE.

Sur la présentation de l'Académie des Sciences de Paris, M. DARBOUX a été nommé membre du **Bureau des Longitudes** à la place de M. Cornu.

★

Le D[r] **J.-B. de Toni** a été nommé professeur de Botanique et directeur du Jardin botanique à l'Université de Modène.

★

Le professeur **G.-W. Green,** professeur de Mathématiques à l'Université Wesleyenne de l'Illinois, est mort à Bloomington (Illinois), à l'âge de 55 ans.

★

L'**Université d'Oxford** annonce les cours suivants pour le prochain « terme » de 1903 : Comparaison des méthodes analytique et synthétique dans la géométrie des coniques, par M. W. ESSON. — Éléments des fonctions elliptiques, par M. ELLIOTT. — Attraction et Électrostatique, par M. A.-E.-H. LOVE. — Calcul des différences finies, par M. A.-L. DIXON. — Courbes planes supérieures, par M. P.-J. KIRBY. — Théorie des équations, par M. HASELFOOT. — Géométrie pure, par M. J.-W. RUSSELL. — Géométrie (maxima et minima, inversion, etc.), par M. LENDERSDORF.

★

Le **Congrès des Sciences historiques**, qui devait primitivement avoir lieu à Rome en avril 1902, se tiendra au mois d'avril 1903. La 8[e] Section (Histoire des Sciences mathématiques et physiques) est présidée par M. Gino Loria, de Gênes.

★

L'**Association américaine pour l'avancement des Sciences** s'est réunie le 29 décembre 1902, à Washington. M. CARROLL D. WRIGHT a été nommé président. La prochaine réunion aura lieu à Saint-Louis à la fin de 1903.

★

L'**Académie des Sciences** a tenu sa séance annuelle le 22 décembre 1902. Parmi les prix décernés, citons : Le grand prix des

Sciences mathématiques à M. VESSIOT, le prix Francœur à M. EMILE LEMOINE, le prix Poncelet à M. D'OCAGNE.

*

La **Société mathématique américaine** a tenu sa réunion générale annuelle à l'Université de Columbia, le 29 décembre 1902. M. THOMAS S. FISKE a été élu président, M. F.-N. COLE, secrétaire. La prochaine réunion aura lieu à New-York, le 28 février.

*

Par arrêté du Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, les **jurys d'agrégation** sont constitués ainsi qu'il suit, pour l'année 1903 :

Agrégation des Sciences mathématiques : MM. APPELL, membre de l'Institut, président. PRUVOST, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président. ANDOYER, professeur adjoint à l'Université de Paris. BOURLET, professeur au lycée Saint-Louis. VOGT, professeur à l'Université de Nancy.

Agrégation des Sciences physiques : MM. JOUBERT, inspecteur général de l'Instruction publique, président. L. POINCARÉ, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président. BOUASSE, professeur à l'Université de Toulouse. CAVALIER, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Marseille. RIVIÈRE, professeur au lycée Saint-Louis.

Agrégation des Sciences naturelles : MM. FERNET, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, président. BOUVIER, professeur au Muséum d'Histoire naturelle. LELOUTRE, professeur au lycée Buffon. VALLERANT, maître de conférences à l'École Normale supérieure.

Certificat d'aptitude au professorat des classes élémentaires : MM. FRINGNET, inspecteur de l'Académie de Paris, président. BENAERTS, professeur au lycée Charlemagne, LAPRESTÉ, professeur au lycée Buffon. PEINE, professeur au lycée Condorcet. SIMMONOT, professeur au lycée Chaptal.

Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles : ORDRE DES SCIENCES. — *a.* Section des Sciences mathématiques : MM. PIÉRON, inspecteur général de l'Instruction publique, président. NIEWENGLOWSKI, inspecteur de l'Académie de Paris. M[lle] PICOT, professeur au lycée de jeunes filles de Nancy. M. MARTIN, professeur au lycée Saint-Louis.

b. Section des Sciences physiques et naturelles : MM. FERNET, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, président. MARGOTTET, recteur de l'Académie de Lille. MONIEZ, inspecteur de l'Académie de Paris. MARTIN, professeur au lycée Saint-Louis (adjoint pour la composition de morale et d'éducation).

Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles : ORDRE DES SCIENCES. — M. PIÉRON, inspecteur général de l'Instruction publique, président. M[me] COLLET, professeur au lycée de jeunes filles de Grenoble. M. MONIEZ, inspecteur de l'Académie de Paris. M^me^ LANDOLPHE, professeur au lycée Lamartine (adjointe pour les épreuves de langues vivantes). M^me^ SCHACH, professeur au lycée de jeunes filles de Versailles (adjointe pour les épreuves de langues vivantes).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXV, n^os^ 23 à 26. — Sur l'irréductibilité de l'équation $y'' = 6y^2 + x$; par M. *Paul Painlevé*. — Sur les propriétés du plan au point de vue de l'*Analysis situs*; par M. *Combebiac*. — Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables; par M. *Martin Krause*. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes; par M. *R. d'Adhémar*. — Sur les fonctions entières; par M. *Hadamard*. — Remarque relative à la Note « Sur la représentation approchée des fonctions »; par M. *Stekloff*. — Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies; par M. *Mathias Lerch*. — Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor; par M. *Lindelöf*. — Sur une représentation plane de l'espace et son application à la statique graphique; par M. *B. Mayor*.

Bulletin des Sciences mathématiques (octobre et décembre 1902). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES. *Bouvart et Ratinet*. Nouvelles Tables de Logarithmes à cinq décimales. Division centésimale. — *Appell*. Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures. — *Capelli* (*A.*). Lezioni sulla Teoria delle forme algebriche. — *Gauss* (*K.-F.*). General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. — *Sellenthin* (*B.*). Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. — *Hammer* (*E.*) Sechstellige Tafel der Werte $\log \frac{1+x}{1-x}$ für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3,0-10 bis 9,99000-10 (von Argument 9,99000-10 an bis 9,999700-10 sind die $\log \frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). — MÉLANGES. *Andoyer*. Sur un problème de Mécanique rationnelle. — *Goursat* (*C.*). Sur un théorème de M. Jensen. — *Stouff* (*Xavier*). Sur la première lettre arithmétique d'Hermite à Jacobi. — Bulletin bibliographique. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES. *Zeuthen* (*H.-G.*). Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. — *Larmor* (*J.*) Aether and Matter. — *Czuber* (*E.*). Probabilités et moyennes géométriques. — MÉLANGES. *Levi-Civita*. Sur les fonctions de genre infini. Bulletin bibliographique. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES. *Zaremba*. Sur l'équation $\Delta u + \xi u = 0$. — *Bardey* (*E.*). Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. — *Perry* (*J.*). Höhere Analysis für Ingenieure. — *Pascal* (*E.*). Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). — *Combebiac* (*Gaston*). Calcul des Triquaternions. — MÉLANGES. *Hadamard.* Sur certaines surfaces minima. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

Journal de Mathématiques pures et appliquées (fascicule IV, 1902). — Sur les fonctions entières et quasi-entières; par M. *Ed. Maillet.* — Essai sur la théorie des fractions continues; par M. *Auric.* — Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor; par M. *L. Desaint.* — Table des matières du Tome VIII de la 5ᵉ série.

Le Mathematiche pure ed applicate (septembre à décembre 1902). *Severi.* Risoluzione descrittiva di alcuni problemi spaziali biquadratici (con tre tavole). — *Calegari.* I determinanti di specie superiore. *Burali-Forti.* Sulle linee funicolari. — *Tzitzeica.* Sulle superficie minime ortogonali ad una sfera. — *Lo monaco-aprile.* Sopra una transformazione cremoniana del terz'ordine speciale. Nota sul sogetto di ricerche nº VII. — *Retali.* Sopra una transformazione cremoniana del terz'ordine. — *E. Lebon.* Sulla identità di dire metodi elementari pel calcolo di π. — *Alfa.* Dimostrazione di una relazione di condizione negli integrali iperrelittici. — Risoluzione di questioni. — Questioni proposte. — Soggetti di ricerche. — Bibliografia.

Calegari. I determinanti di specie superiore. — *Retali.* Sopra una transformazione cremoniana del terz'ordine. — *Pirondini.* Proprietá caratteristiche di alcune linee piane a dioppa curvatura. — *Strazzeri.* Sul moto di una sfera che si appoggia a due rette che l'incontrano. — *Niels Nielsen.* Note sur la fonction gamma. — Note: *Barisien.* Proprietà nella teoria dei numeri. Un teorema sui determinanti. — Rizoluzione di questioni. — Questioni da risolvere. — Soggetti di ricerche. — Bibliografia.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (fascicule IV, 1902). — Sur les courbes de déformation des fils (2ᵉ Partie); par M. *H. Bouasse.* — Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance régulière et les équations différentielles; par M. *Edmond Maillet.* — Eclipse totale de Soleil du 28 mai 1902; Rapport de la mission organisée par l'Université de Toulouse; par M. *Henry Bourget.* — PLANCHE.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (octobre à décembre et supplément 1902). — Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier; par M. *A. Hurwitz.* — Recherches sur les séries de factorielles; par M. *Niels Nielsen.* — Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique; par M. *Stekloff.* — Sur la forme doublement quadratique et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques; par M. *H. Andoyer.* — Sur les transformations de Baecklund; par M. *J. Clairin.*

Table des Matières.

33071 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

[K12b]

SUR LES CERCLES TANGENTS A TROIS CERCLES DONNÉS;

PAR M. G. LERY.

Je me propose de montrer qu'une méthode de construction donnée par M. Mannheim ([1]) permet la discussion simple et complète de la réalité des solutions et de la nature des contacts. M. Mannheim a obtenu cette construction en transformant par inversion la solution du problème correspondant de la sphère; je commence par donner une démonstration directe.

CONSTRUCTION.

1. Comme M. Fouché l'a fait ([2]), j'étudie les cercles isogonaux aux trois cercles donnés : les cercles tangents en sont des cas particuliers. Les démonstrations sont simplifiées par l'usage des angles dirigés.

Remarques. — 1° Dans un plan orienté, l'angle d'une première droite avec une seconde est un nombre algébrique défini à $k\pi$ près; je dirai pour abréger qu'un angle multiple de π est nul.

2° Deux angles dont les côtés origine et extrémité sont respectivement symétriques par rapport à une droite ont alors une somme nulle; par suite, étant donnés deux cercles C_1 et C_2 qui se coupent en A et A',

([1]) *Nouv. Annales*, 1885, p. 108.
([2]) *Nouv. Annales*, 1892, p. 227.

l'angle de C_1 avec C_2 en A a une somme nulle avec l'angle de C_1 avec C_2 en A'.

De même pour l'angle de deux courbes C_1, C_2, en un point commun A, et l'angle de leurs transformées par une inversion, C'_1 et C'_2, au point inverse A'.

2. *Cercles isogonaux à deux cercles* C, C_1. — Soit Γ un tel cercle qui coupe C en M et M'. L'angle de C avec Γ en M est égal à l'angle de C_1 avec Γ en l'un de leurs deux points communs, et a une somme nulle avec l'angle de C_1 et Γ en l'autre; soient N' le premier de ces points, N le second.

MN et $M'N'$ se coupent en un point O_2. L'inversion de centre O_2 qui transforme Γ en lui-même change C_1 en un cercle passant en M et M' et y faisant avec Γ justement les mêmes angles que C, *en grandeur et en signe;* ce cercle est C.

En conséquence, O_2 est l'un des deux centres d'inversion de C et C_1; sa puissance par rapport à Γ est le module α_2 de l'inversion de centre O_2 qui transforme C en C_1; enfin les points de rencontre de Γ avec C sont antihomologues par rapport à O_3 de ceux de Γ et C_1. La réciproque est évidente; il y a deux séries de cercles isogonaux, qui correspondent aux deux centres d'inversion O_2, O'_2.

Si MN est parallèle à $M'N'$, O_2 est à l'infini. L'inversion correspondante est remplacée par une symétrie, par rapport à la perpendiculaire au milieu de MN; C et C_1 sont alors égaux.

Si l'on veut construire N antihomologue de M, il suffit, en appelant c et c_1 les centres des deux cercles, de mener le rayon c_1n parallèle à cM, de même sens ou de sens contraire; la droite Mn coupe C_1 en N. Le choix du sens du rayon c_1n correspond au choix possible de l'un des deux centres d'inversion O_2, O'_2 ; cette construction rend inutile la construction préalable de ces deux points.

3. *Cercles isogonaux à trois cercles* C, C_1, C_2. — Soit Γ l'un d'eux ; la puissance par rapport à ce cercle de l'un des deux centres d'inversion de C et C_1, soit O_2, est le module α_2 ; de même l'un des deux centres d'inversion de C_1 et C_2, O par exemple, a pour puissance le module α, par rapport à Γ. Γ appartient donc à un faisceau linéaire. Réciproquement, les cercles de ce faisceau qui coupent C sont isogonaux à C et C_1, et à C_1 et C_2, d'après le n° 2.

Remarquons que, étant isogonaux à C_2 et C, la puissance par rapport à eux de l'un des deux centres d'inversion de C et C_2 égale le module correspondant ; ce centre O_1 est sur la droite OO_2, axe radical du faisceau.

On a quatre faisceaux de cercles isogonaux, en accouplant l'un des centres O, O' à l'un des centres O_2, O'_2.

Pour construire un cercle Γ isogonal à C, C_1, C_2, je prends un point M sur C, je construis son antihomologue N sur C_1 et l'antihomologue P de N, sur C_2, après avoir choisi les sens relatifs des rayons parallèles des trois cercles. Le cercle MNP est isogonal aux trois cercles. *On a facilement son second point de rencontre avec* C : le point M', *antihomologue* sur C *du point* P, appartient en effet aux cercles isogonaux à C et C_2 qui passent en P et par rapport auxquels le point O_1 a la puissance α_1 ; c'est donc un point de Γ. Il reste à prouver qu'il est distinct de M ; or l'angle de Γ avec C en M étant désigné par φ, celui de Γ avec C_1 en N est $-\varphi$; en P on a de même φ ; en M', $-\varphi$; donc M' diffère de M, à moins que φ ne soit nul.

4. *Solution.* — Je considère l'un des quatre faisceaux de cercles isogonaux, qui est défini par le choix de trois centres d'inversion O, O_1, O_2 en ligne droite, ou par celui des sens de trois rayons parallèles. On a à chercher les cercles du faisceau tangents à C : ils toucheront C_1 et C_2. Je construis les axes radicaux MM', $M_1M'_1$ de C et de deux cercles du faisceau; ils se coupent en H, qui a même puissance par rapport à C et à deux cercles du faisceau, donc à tous; les tangentes menées de H au cercle C, si elles existent, sont les axes radicaux de C et des cercles cherchés; on a un point de chacun d'eux en coupant C par la polaire de H, polaire qu'on a sans déterminer H, car elle passe aux points de rencontre des droites MM_1, M'_1M', et des droites MM'_1, $M'M_1$.

Chaque faisceau peut donc fournir deux solutions.

DISCUSSION.

5. Les deux solutions qui correspondent à l'un des quatre faisceaux existent ou non suivant que le point H, relatif à ce faisceau, est extérieur ou intérieur au cercle C. Je puis supposer, pour faire la discussion, que le point M_1 est très voisin de M; alors M'_1 est très voisin de M'. *Le point* H *est extérieur à* C *si les petits arcs* MM_1, $M'M'_1$ *sont de sens contraire sur* C, *intérieur s'ils sont de même sens.* Pour simplifier, j'appelle *positif* le sens de rotation du petit arc MM_1; nous allons chercher quel est le sens de NN_1, puis de PP_1, et enfin de $M'M'_1$, ce qui nous montrera si le point H est extérieur ou intérieur à C.

Les points N et N_1 sont respectivement inverses de M et M_1 par rapport à l'un des centres de similitude de C et C_1, soit O_2. *Si* O_2 *est extérieur aux deux cir-*

conférences, la figure montre que *le sens de* NN_1 *est négatif;* dans les autres cas il est positif. Dans le premier cas, je donne à O_2 l'indice $\varepsilon_2 = -1$, dans les autres l'indice $\varepsilon_2 = +1$.

De même les points P et P_1 sont respectivement antihomologues de N et N_1 par rapport à un centre de similitude O de C_1 et C_2. Soit ε l'indice du point O, déterminé comme on l'a vu à propos de O_2; le sens de PP_1 relativement à celui de l'arc NN_1 est du signe de ε, et, relativement à l'arc MM_1 il est du signe de $\varepsilon\varepsilon_2$.

Enfin, soit ε_1 l'indice du centre de similitude O_1 par rapport auquel l'arc $M'M'_1$ est antihomologue de PP_1. On voit de la même façon que le sens de $M'M'_1$ est positif suivant que $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ est positif ou négatif.

Par conséquent, je considère trois centres de similitude O, O_1, O_2, en ligne droite et le faisceau isogonal correspondant; les indices ε, ε_1, ε_2 de ces trois centres étant déterminés, le faisceau fournira deux solutions ou zéro suivant que le produit $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ sera négatif ou positif.

6. Cette méthode, appliquée à chacun des cas de figure que peuvent présenter les trois cercles, donne dans chaque cas le nombre de solutions. Par exemple, si les trois cercles sont extérieurs, soient O, O_1, O_2 les centres de similitude directe, O', O'_1, O'_2 les centres de similitude inverse; les trois premiers ont l'indice -1, les autres également.

On a le Tableau suivant :

1^er^ faisceau :	$O\,O_1\,O_2$,	$\varepsilon\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = -1$	(2 solutions);
2^e^	»	$O\,O'_1\,O'_2$,	$\varepsilon\,\varepsilon'_1\,\varepsilon'_2 = -1$	(2 solutions);
3^e^	»	$O'\,O_1\,O'_2$,	$\varepsilon'\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_2 = -1$	(2 solutions);
4^e^	»	$O'\,O'_1\,O_2$,	$\varepsilon'\,\varepsilon'_1\,\varepsilon_2 = -1$	(2 solutions).

Il y a donc huit solutions.

On examinerait aussi facilement les autres cas de figure; on retrouve ainsi, par une méthode aussi courte que possible, les résultats de la discussion de M. Fouché.

7. Soit Γ une solution correspondant à un axe de similitude OO_1O_2; on peut, d'une façon analogue, connaître *a priori* la nature de ses contacts avec C, C_1, C_2. Nous partirons de la remarque suivante : si deux cycles sont tangents extérieurement, leurs sens sont contraires, et inversement. Je dirige C arbitrairement, et ensuite Γ de façon qu'il y ait concordance des sens au point de contact; je pose $\gamma = +1$ ou -1, suivant que Γ est du sens de C ou du sens contraire, c'est-à-dire que le contact est intérieur ou extérieur. L'inversion de centre O_2 qui transforme C en C_1 change Γ en un cycle Γ_1, ayant même support que Γ, et tangent au cycle C_1; le sens de C_1 est du signe de ε_2; celui de Γ_1 est du signe de $-\eta_2\gamma$, en posant $\eta_2 = +1$ si la puissance de l'inversion est positive, $\eta_2 = -1$ si cette puissance est négative.

Le contact de C_1 et Γ_1 est intérieur si ε_2 et $-\eta_2\gamma$ sont de même signe, donc si $\gamma\varepsilon_2\eta_2$ est négatif, extérieur dans le cas contraire.

En définissant de même l'indice η du centre O, on voit que le contact de C_2 et Γ_2 est intérieur si $\gamma\varepsilon\eta\varepsilon_2\eta_2$ est positif.

On remarque, en faisant les différentes figures, que, pour un centre de similitude direct de deux cercles, le produit $\varepsilon\eta$ est négatif, et qu'il est positif pour un centre inverse.

On voit ainsi que, si le faisceau relatif aux trois centres de similitude directe donne des solutions Γ_1, Γ_2, les contacts de Γ_1 avec les trois cercles sont de même espèce, ceux de Γ_2 également.

CAS PARTICULIERS.

8. Les cercles Γ qui doivent toucher un cercle C et deux droites C_1, C_2, ou bien deux cercles C, C_1 et une droite C_2, sont donnés par la même méthode de construction que les cercles tangents à trois cercles. Il n'y a, en effet, rien à changer dans la démonstration donnée, car une droite et un cercle possèdent deux centres d'inversion; pour deux droites, ces deux centres sont à l'infini sur les bissectrices, les inversions correspondantes étant remplacées par des symétries par rapport à ces bissectrices. Il existe encore quatre faisceaux de cercles isogonaux, dont chacun peut donner deux solutions; remarquons que, dans le cas de trois cercles, nous pouvions chercher les intersections de deux cercles d'un faisceau avec l'un quelconque des trois cercles; ici la construction serait illusoire si nous prenions le point M, qui définit un cercle du faisceau, sur la droite C_2 par exemple; on déterminerait bien, par la méthode indiquée, le second point de rencontre M' de ce cercle et de C_2, et l'on pourrait trouver un segment analogue $M_1 M'_1$, mais le point H serait indéterminé.

On peut, cependant, finir la question en cherchant les points doubles de l'involution dans laquelle se correspondent M et M', M_1 et M'_1. Si M et M_1 sont pris sur le cercle C, on a encore à chercher les points doubles d'une involution, ce qui est alors très simple, comme nous l'avons vu.

Pour étudier l'existence des solutions, le plus simple est de ramener le problème au cas de trois cercles, par une inversion; les indices ε ne peuvent plus, en effet, être définis. Par exemple, deux droites et un cercle qui ne les coupent pas se transforment en deux cercles sécants et un cercle extérieur; il y a alors quatre solutions.

On ferait facilement, de cette façon, le tableau complet de la discussion.

9. Cercles passant par un point C et touchant deux cercles C_1 et C_2. Soient O et O′ les centres d'inversion de C_1 et C_2; les cercles isogonaux à C_1 et C_2 forment deux réseaux; ceux d'entre eux qui passent en C forment deux faisceaux, dont on a facilement les seconds points de base, et l'on est ramené à un problème connu, dont la discussion est facile.

THÉORÈME DE PASCAL.

10. Je considère trois cercles C, C_1, C_2 et un cercle Γ, isogonal aux trois premiers. Γ coupe C en M, sous l'angle φ, C_1 en $N(-\varphi)$, C_2 en $P(\varphi)$, C en $M'(-\varphi)$, C_1 en $N'(\varphi)$, C_2 en $P'(-\varphi)$. Les droites NP, N′P′ se coupent en O, PM et P′M′ en O_1, MN et M′N′ en O_2, et ces points sont trois centres de similitude en ligne droite. On a donc un hexagone inscrit à Γ, et les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite. Soit, maintenant, un cercle Γ et un hexagone MNPM′N′P′ inscrit; je dis qu'il possède la propriété précédente. En effet, on peut faire passer respectivement par M et M′, N et N′, P et P′ des cercles qui coupent Γ sous un même angle, par exemple des cercles orthogonaux; la propriété de l'hexagone est alors évidente.

[B11a]

SUR LA CANONISATION DES FORMES BILINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

1. Considérons une *matrice* A ou Tableau des n^2 coefficients

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

de déterminant

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

La matrice définit sans ambiguïté, soit une *forme bilinéaire*

$$A = A(x, y) = \sum_{jk} a_{jk} y_j x_k,$$

soit une *substitution* n-aire

$$A = \left| x_j \quad \sum_k a_{jk} x_k \right|.$$

2. La même lettre A peut désigner indifféremment la matrice, la forme bilinéaire ou la substitution. Je suivrai les règles du calcul symbolique telles qu'elles sont exposées par Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 1). Les formules symboliques comporteront une triple interprétation, suivant qu'elles s'entendront de matrices, de formes bilinéaires ou de substitutions.

3. Une matrice A_0 sera *canonique* si

$$A_0(x, y) = \sum_j h_j x_j y_j = \sum h x y.$$

Si $h_j = 1$, la matrice devient la matrice unité E,

$$E(x, y) = \sum x y.$$

Soient A et B deux matrices, avec $|B| \neq 0$. Si l'on a B telle que

$$A = B^{-1} A_0 B, \qquad A_0 = \text{canonique},$$

A est *canonisable* et admet A_0 pour *forme canonique* et B pour *canonisante*.

A est toujours canonisable si l'équation caractéristique

$$(\mathfrak{D}) \qquad \Delta(r) = \Delta_0(r) = |rE - A| = 0$$

n'a que des racines simples. A cesse en général d'être canonisable, s'il apparaît dans $(\mathfrak{D})$ des racines multiples.

4. M. Jordan a signalé, il y a longtemps déjà, que toute substitution d'ordre fini était canonisable. Il en est de même pour les substitutions *unitaires* et les substitutions *hermitiennes* que j'ai étudiées [*Sur l'Hermitien* (*Rendiconti du Cercle Mathématique de Palerme*, 1902); *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (*Bulletin de la Société Mathématique*, 1902)] et les substitutions *réelles* et *orthogonales*, cas particulier des unitaires, ainsi du reste que pour toutes les *orthogonales*.

Par contre, je n'ai vu publiées nulle part les conditions générales, nécessaires et suffisantes de canonisabilité.

Elles se déduisent facilement, ainsi qu'on le verra ci-dessous, d'un fameux théorème de Weierstrass (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868, p. 310 à 338).

5. Rappelons d'abord les principes de la théorie.

Prenons un *faisceau* de matrices $f_r = r\mathrm{A} + \mathrm{B}$, r étant un paramètre variable, et nommons $\Delta(r) = \Delta_0(r)$ le déterminant

$$|\, r\mathrm{A} + \mathrm{B}\,|,$$

premier membre de l'équation caractéristique (D), $\Delta(r) = 0$.

Dans le déterminant Δ, les $k^{\text{ièmes}}$ mineurs seront des polynomes en r, de degré $n - k$. Nommons $\Delta_k(r)$ le plus grand commun diviseur de tous ces mineurs.

Supposons qu'une racine ρ de (D) possède un degré de multiplicité α_k dans l'équation $\Delta_k(r) = 0$, avec $k = 0, 1, \ldots, q$, tandis que : 1° $\alpha_0 = m$ est le degré de multiplicité dans (D); 2° $\alpha_q = 0$.

Les degrés de multiplicité α_k forment une suite décroissante

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k > \ldots > \alpha_{q-1} > 0.$$

Les différences $\beta_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k$ forment une suite non croissante

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \beta_k \geqq \ldots \geqq \beta_q.$$

Si l'on pose $\beta_k = 1 + \delta_k$, *les entiers positifs ou nuls δ_k forment une suite non croissante*

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \ldots \geqq \delta_k \geqq \ldots \geqq \delta_q.$$

D'ailleurs

$$\sum_{k=1}^{k=q} \beta_k = (\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots$$
$$+ (\alpha_{k-1} - \alpha_k) + \ldots + \alpha_{q-1} = \alpha_0 = m = q + \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k,$$

d'où la formule

$$m - q = \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k. \tag{1}$$

Si tous les δ sont nuls, q est précisément le degré m de multiplicité que la racine ρ possède dans $\mathfrak{D}$.

6. Weierstrass dit que les expressions

$$(r - \rho)^{\beta_k}$$

sont les *Elementartheiler* afférents à la racine ρ.

Pour abréger, je dirai que ces expressions sont les *successifs* (sous-entendu : facteurs ou diviseurs) afférents à la racine ρ.

Le successif est *simple,* si l'exposant β_k est égal à l'unité, d'où $\delta_k = 0$.

7. Deux faisceaux de matrices

$$rA + B \quad \text{et} \quad rC + D$$

sont *équivalents* s'il existe deux matrices L et M, avec

$$|L| \neq 0, \qquad |M| \neq 0,$$

telles que

$$rC + D = L(rA + B)M,$$

c'est-à-dire

$$C = LAM, \qquad D = LBM.$$

Alors C est *équivalente* à A et D à B.

Dans le cas particulier où $C = A = E$, on a

$$L = M^{-1},$$

et *l'équivalence se change en similitude.*

Ainsi *pour que deux matrices* A *et* A_0 *soient sem-*

blables, il faut et il suffit que les deux faisceaux

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents.

8. L'admirable théorème de Weierstrass s'énonce ainsi :

Pour que deux faisceaux

$$rA + B \quad \text{et} \quad rC + D$$

soient équivalents, il faut et il suffit que les successifs soient identiques de part et d'autre.

9. Je vais en déduire la solution du problème proposé.

THÉORÈME. — *Pour qu'une matrice* A *soit canonisable, il faut et il suffit que le faisceau caractéristique*

$$\varphi_r = rE - A$$

n'admette que des successifs simples.

La démonstration est très courte, après quelques explications préliminaires.

10. Conservons les notations du n° 5 et envisageons le système Ω des n équations linéaires et homogènes

$$(\Omega) \qquad \rho x_j = \sum_k a_{jk} x_k \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a $\Delta_k(\rho) = 0$ pour $\rho = 0, 1, \ldots, q-1$, tandis que $\Delta_q(\rho) \neq 0$; Ω ne contient que $n - q$ équations distinctes.

Réciproquement, si le système Ω, aux n inconnues x_j, ne contient que $n-q$ équations distinctes, on a $\Delta_k(\rho) = 0$ pour $k < q$ et $\Delta_q(\rho) \neq 0$.

Ces propriétés deviennent évidentes si l'on remarque que le déterminant des inconnues x_j dans Ω est précisément $\Delta_0(\rho)$.

En particulier, si les successifs relatifs à ρ sont simples, les δ_k sont nuls, $q = m$ [formule (1) du n° 5] et Ω contient $n-m$ équations distinctes. Réciproquement si Ω contient $n-m$ équations distinctes, les successifs sont tous simples, car les entiers δ ne peuvent être négatifs.

11. Lemme. — *Une matrice canonique* A_0 *a tous ses successifs simples.*

Soit

$$A_0(x, y) = \rho(x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m) + \rho'(x_{m+1} y_{m+1} + \ldots) + \ldots$$
$$(\rho' \neq \rho, \ldots).$$

La racine ρ de ω possède le degré m de multiplicité. Le système Ω contient les $n-m$ équations distinctes $x_{m+s} = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n-m$. Par suite (n° 10) tous les successifs sont simples dans la matrice A_0, ou, plus exactement, dans le faisceau caractéristique $r\mathrm{E} - A_0$ de A_0. C. Q. F. D.

12. La démonstration du théorème s'achève maintenant en quelques mots.

Pour qu'une matrice A soit canonisable, il faut et il suffit :

Ou bien que A soit semblable à une canonique A_0 (n^{os} 7 et 3);

Ou bien que les deux faisceaux (n° 7)

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents, c'est-à-dire (théorème de Weierstrass, n° 8) admettent les mêmes successifs.

Or (lemme du n° 11) le faisceau caractéristique $rE - A_0$ de la canonique A_0 a tous ses successifs simples et le théorème du n° 9 est démontré.

13. Si pour le faisceau caractéristique $rE - A$ on a tous les successifs simples et

$$|rE - A| = (r-\rho)^m(r-\rho')^{m'}(r-\rho'')^{m''}\cdots$$
$$(\rho \neq \rho' \neq \rho'' \neq \ldots),$$

on construira la canonique A_0

$$\begin{aligned} A_0(x, y) = \rho(x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m) \\ + \rho'(x_{m+1} y_{m+1} + \ldots + x_{m+m'} y_{m+m'}) \\ + \rho''(\ldots) + \ldots, \end{aligned}$$

et l'on sera sûr de l'équivalence des faisceaux $rE - A$ et $rE - A_0$, de la similitude de A avec la canonique A_0 et de la canonisabilité de A.

14. Voici quelques applications de ma proposition du n° 9.

Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 53) signale que dans le faisceau caractéristique d'une orthogonale R réelle, tous les successifs sont simples. Toutes les matrices R doivent donc être canonisables. C'est ce que j'ai effectivement établi, par voie directe, dans mon travail *Sur l'Hermitien* (*loc. cit.*, n^{os} 22, 35 et 36).

Pareillement, dans ce même travail, je montre que toute hermitienne ou toute unitaire (*loc. cit.*, n° 22) et même toute orthogonale (car la démonstration vaut aussi pour une orthogonale), est canonisable, donc : *le faisceau caractéristique d'une hermitienne, d'une unitaire ou d'une orthogonale a tous ses successifs simples*. Il en est de même pour une substitution d'ordre fini, toujours canonisable (M. Jordan).

15. Il me semblerait surprenant que ma proposition du n° 9, conséquence si immédiate du théorème de Weierstrass, eût échappé jusqu'à ce jour à la sagacité des algébristes. J'en publie néanmoins la démonstration et l'énoncé, n'ayant rien trouvé dans aucun Mémoire de Mathématiques, qui ressemblât au théorème du n° 9. Au surplus, si la proposition ne se trouvait pas nouvelle, la démonstration le serait peut-être.

[$M^3$5a]

SUR LA SPHÈRE OSCULATRICE A LA CUBIQUE GAUCHE;

Par M. STUYVAERT,

Professeur à l'Athénée royal de Gand.

J'ai donné ([1]) une construction de la sphère osculatrice à la cubique gauche. Je me permets de revenir sur ce sujet, parce que j'ai exposé la solution sous une forme trop concise; d'ailleurs, M. Servais m'a fait remarquer que le cas de la cubique circulaire doit être examiné à part; enfin, le théorème formant le point de départ de cette recherche peut se démontrer par une méthode plus simple que celle que j'ai employée; cette méthode plus simple est due à feu M. Fr. Deruyts.

([1]) *Note sur les cubiques gauches* (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1900).

Théorème de Reye. — *Toutes les quadriques passant par six points* A, B, C, D, E, F *sont coupées en des couples de points en involution, par toute bisécante d de la cubique gauche c_3 déterminée par les six points donnés* (¹).

Pour qu'il ne soit pas nécessaire de considérer à part le cas des imaginaires, il est désirable d'avoir une démonstration analytique. Voici celle de M. Deruyts.

L'équation du système de quadriques a la forme

$$\Sigma \equiv \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0.$$

Trois des surfaces S ne peuvent faire partie d'un même faisceau; elles ne peuvent pas appartenir, toutes les quatre, à un même réseau. Mais on peut supposer que S_3 et S_4 passent par c_3 et sa bisécante d.

Les coordonnées de tout point de d annulent S_3 et S_4. Donc, ceux de ces points qui appartiennent à Σ, appartiennent à $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ et inversement. Or, le faisceau $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ marque, sur d, une involution; par conséquent, il en est de même du système Σ.

Corollaire I. — Les points d'appui de d sur c_3 forment un couple de l'involution.

Corollaire II. — Si d est une tangente, le contact est un point double de l'involution; l'autre point double est sur le plan polaire du contact par rapport à toutes les quadriques Σ et, en particulier, par rapport aux couples de faces opposées de l'hexaèdre ABCDEF.

Théorème. — *Toutes les sphères passant par trois points* A, B, C *de c_3 coupent encore la courbe en des*

(¹) Reye, *Annali di matematica*, 2ᵉ série, t. II, p. 130.

triples de points D, E, F, *situés dans des plans parallèles* ([1]).

Soient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

les équations de c_3.

L'équation d'une sphère passant par trois points contient une constante arbitraire λ, au premier degré. Si l'on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par ω^3, ω^2, ω, 1, on a une relation du sixième degré en ω, satisfaite, quel que soit λ, par les paramètres ω_1, ω_2, ω_3 de A, B, C.

En divisant le premier membre de l'équation par $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)$, on a une relation cubique en ω, avec la constante λ au premier degré. Les racines de cette équation sont les paramètres des points D, E, F et l'équation du plan DEF s'obtient en remplaçant ω^3, ω^2, ω, 1 par x_1, x_2, x_3, x_4. Comme cette équation contient toujours λ au premier degré, le plan décrit un faisceau.

En d'autres termes, si l'on prend un point D quelconque sur la cubique, les quatre points A, B, C, D sont sur une sphère qui coupe la courbe en deux nouveaux points E, F, de sorte que chaque terne D, E, F est déterminé, de la même manière, par un quelconque de ses points.

Donc, ces ternes décrivent une involution cubique du premier rang et les plans D, E, F passent par un même axe.

Comme une des sphères du système considéré se compose du plan ABC et du plan de l'infini, l'axe du faisceau des plans DEF est à l'infini.

([1]) Théorème connu et facile à démontrer par la Géométrie.

Problème. — *Connaissant les trois points* A, B, C *de c_3 construire la direction du plan* DEF.

Soient : S une sphère quelconque par A, B, C, coupant encore c_3 en trois points inconnus D, E, F ; M un point de c_3 et t la tangente en ce point.

La droite t rencontre, en P le plan ABC, en Q le plan polaire de M relatif à S, et en X le plan inconnu DEF. Or, d'après le théorème de Reye, X est le conjugué harmonique de P sur MQ, et peut être construit.

Deux autres points M′ et M″ de la cubique donneront de même deux points X′ et X″ analogues à X ; le plan XX′X″ est le plan inconnu DEF.

Problème. — *Construire la sphère osculatrice en un point* A *de c_3.*

1° On suppose, dans le problème précédent, les points A, B, C coïncidents, c'est-à-dire que l'on commence par construire une sphère ayant, en A, un contact triponctuel avec la cubique. Pour cette opération, on projette c_3, d'un de ces points, sur le plan osculateur en A, puis on décrit le cercle osculateur c_2, en A, à la conique obtenue ; enfin, on mène par ce cercle une sphère quelconque S.

2° On détermine, comme dans le problème précédent, le plan DEF des trois autres intersections de S avec c_3.

3° Finalement, on mène, par A, un plan parallèle à DEF. Ce plan coupe c_3 en deux points qui appartiennent à la sphère osculatrice cherchée et achèvent de la déterminer.

Cas de la cubique circulaire. — 1° Ce qui précède permet, d'abord, de construire le plan qui contient les points circulaires à l'infini E, F de la cubique. Menons, comme ci-dessus, une sphère S ayant un contact triponctuel, en A, avec la cubique et passant par un point donné D de la courbe. Une tangente t au point M de la cubique perce en P le plan osculateur au point A, et en Q le plan polaire de M relatif à S; soit X le conjugué harmonique de P sur MQ. Un autre point M′ de la courbe donne, de même, un point X′ analogue à X; le plan DXX′ est le plan cherché DEF. Ce plan reste parallèle à lui-même si l'on fait varier D.

2° Cela étant, faisons coïncider D avec A; soit AEF un plan parallèle à la direction DEF trouvée à l'instant.

La tangente t au point M de la courbe perce, en P_1, le plan AEF, en P le plan osculateur au point A; soit Q_1 le conjugué harmonique de M relatif à P et P_1; M et Q_1 sont conjugués par rapport à la sphère osculatrice, ce qui suffit pour la déterminer.

[H5jα]

SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS ET AVEC SECOND MEMBRE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR

Docteur ès sciences.

1. On sait que toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants peut s'intégrer par des quadratures. Je me propose dans cette Note de donner l'intégrale générale à l'aide d'une interprétation géométrique. Nous allons d'abord rappeler quelques résultats connus.

Soient

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une courbe plane, et

$$p = \varphi(\alpha) \tag{2}$$

l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. On sait que l'équation de la tangente à (1) peut se mettre sous la forme

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = p, \tag{3}$$

et l'équation de la normale à la même courbe sera

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \frac{dp}{d\alpha}; \tag{4}$$

or p et $\frac{dp}{d\alpha}$ sont les distances de l'origine des axes aux droites (3) et (4), il s'ensuit que la distance r au point de contact de (1) avec (3) est la diagonale d'un rectangle construit sur p et $\frac{dp}{d\alpha}$, on aura donc

$$r^2 = \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 + p^2, \tag{5}$$

d'où on obtiendra par dérivation

$$r\frac{dr}{dp} = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + p;$$

or chacun de ses membres représente, comme il est bien connu, le rayon de courbure à la courbe (1) en un point de coordonnéees x et y. Nous aurons donc

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + p. \tag{6}$$

2. On sait que toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, et avec second membre, peut toujours se ramener à la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2 v}{du^2} + v = f(u).$$

Or, dans cette équation, nous pouvons évidemment regarder v et u comme étant les coordonnées tangentielles d'un point dont les coordonnées cartésiennes sont x et y. Le second membre de cette équation sera, d'après (6), l'expression du rayon de courbure au point de coordonnées x et y, exprimé en fonction de l'angle de la tangente à la courbe avec une droite fixe ; et l'intégrale générale de (7) sera, par conséquent, l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. On aura alors, comme il est bien connu,

$$x = \int f(u) \cos u \, du + a,$$
$$y = \int f(u) \sin u \, du + b,$$

où a et b sont des constantes. Portons ces valeurs dans l'équation de la tangente

$$x \sin u - y \cos u = v,$$

on obtiendra l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles, et par conséquent, l'intégrale générale de (7).

3. Nous allons terminer par une application à un problème de Mécanique dans le cas d'un point matériel sollicité par une force centrale et dont la loi est de la forme $\frac{\varpi(\theta)}{r^2}$, indiquée par Jacobi. On sait, d'après Binet, que l'équation différentielle de la trajectoire est de la forme

$$(8) \qquad -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = F = \frac{\varpi(\theta)}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = - \frac{\varpi(\theta)}{C^2}. \tag{9}$$

Le théorème des aires peut se mettre sous la forme

$$r.v \sin\varphi = C, \tag{10}$$

où r est le rayon vecteur d'un point matériel M, que nous supposons de masse égale à 1, v sa vitesse et φ l'inclinaison de la vitesse sur le rayon vecteur. On sait que si, par l'origine des axes qui est le centre de la force, on mène un segment OM_1 égal et parallèle à la vitesse v, le lieu de M_1 est une courbe appelée *hodographe* par Hamilton et qui jouit de la propriété que la tangente en M_1 à cette courbe est parallèle au rayon vecteur OM, de sorte que si cette courbe est rapportée aux mêmes axes que la trajectoire du point M, l'angle de la tangente à l'*hodographe* avec l'axe polaire est l'angle polaire θ. Il s'ensuit que l'inclinaison de cette tangente sur le rayon vecteur OM_1 est égale à φ ou à $\pi - \varphi$. Si donc p est la distance du point O à la tangente M et p_1 la distance à la tangente en M_1, la formule (10) nous donne pour le théorème des aires les deux formules

$$pv = p_1 r = C, \tag{11}$$

et la formule (9) nous donne

$$\frac{d^2 p_1}{d\theta^2} + p_1 = - \frac{\varpi(\theta)}{C}.$$

Il résulte donc, d'après ce qui précède, que le rayon de courbure ρ_1 au point M_1 de la courbe hodographe a pour expression

$$\rho_1 = - \frac{\varpi(\theta)}{C}. \tag{12}$$

Si, en particulier, la loi de la force F est celle trouvée par MM. Darboux et Halphen à la suite d'un problème proposé par Bertrand ([1]), à savoir

$$(13)\qquad F = \frac{\mu_1}{r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

on aura, d'après (12), pour le rayon de courbure, en un point de la courbe hodographe exprimé en fonction de l'angle de la tangente avec l'axe polaire,

$$\rho_1 = \frac{K}{(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

où nous avons posé $K = -\frac{\mu}{C}$. Dans une Note publiée dans les *Nouvelles Annales* (mars 1902), nous avons démontré que si, sous l'action d'une force centrale, un point matériel décrit une conique quelles que soient les conditions initiales, la courbe hodographe correspondante est aussi une conique. La loi de force donnée par la formule (13) donne pour trajectoires des coniques, il s'ensuit que si, d'une manière générale, nous désignons par α l'angle de la tangente à une conique avec une droite fixe, on aura pour le rayon de courbure de la conique exprimé en fonction de α

$$\rho = \frac{K}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est facile d'interpréter les constantes A, B et C. On remarque que si $B = 0$, $A = C$, la courbe est un cercle; donc ces constantes sont, à un coefficient constant près

---

([1]) Bertrand, *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

qui est le même, les coefficients de la forme quadratique d'une conique dont l'équation générale est mise sous la forme habituelle.

4. Une dernière remarque intéressante est la suivante :

Il résulte par analogie de la formule (5),

$$r^2 = \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 + p^2,$$

la formule

$$v^2 = \left(\frac{dp_1}{d\theta}\right)^2 + p_1^2,$$

d'où, en ayant égard à (11),

$$r^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{v}}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{v^2}\right],$$

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Différentions ces formules et multiplions la première par v, nous aurons

$$v.r\,dr = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right)v\,dv,$$

$$v\,dv = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right)dr,$$

où, en ayant égard à la formule

$$v\,dv = F\,dr,$$

qui est la différentielle des forces vives, nous aurons finalement

$$\frac{rv}{F} = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right),$$

$$F = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right).$$

On obtient ainsi la formule de Binet et une nouvelle formule d'un intérêt facile à comprendre (¹).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PROPOSÉE EN 1902 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR UN ANONYME.

I. *Un corps homogène pesant de révolution est suspendu par un point O de son axe : étudier son mouvement, sachant que l'axe est assujetti par une liaison sans frottement à rester dans un plan P passant par la verticale du point O et tournant autour de cette verticale avec une vitesse angulaire constante ω. Dans quelles conditions le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit-il à une rotation permanente autour de son axe?*

I. Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois axes rectangulaires fixes passant par O, Oz_1 étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires inva-

(¹) SUCHAR, *Sur un exemple de transformation corrélative en Mécanique* (*Comptes rendus*, 27 octobre 1902).

riablement liés au corps et orientés comme les précédents, Oz étant l'axe de révolution du corps. Ox, Oy, Oz sont trois axes principaux d'inertie pour le corps, relativement au point O, et si A, B, C sont les moments d'inertie correspondants, on a

$$A = B.$$

La position du corps dans l'espace est complètement définie par la connaissance des angles d'Euler ψ, φ, θ comptés comme d'habitude; OI étant l'intersection des plans Oxy et Ox_1y_1, on a

$$\psi = \widehat{Ox_1, OI}, \qquad \varphi = \widehat{OI, Ox}, \qquad \theta = \widehat{Oz_1, Oz}.$$

Ici d'ailleurs, le plan z_1Oz tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire constante ω, on a, en appelant t le temps, et désignant par ψ_0 une constante,

$$\psi = \omega t + \psi_0.$$

Il en résulte que si p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée du corps suivant Ox, Oy, Oz on a, d'après les formules connues,

$$p = \omega \sin\theta \sin\varphi + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \omega \sin\theta \cos\varphi - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \omega \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Puisque l'on demande d'étudier le mouvement du corps, sans parler des réactions qui s'exercent sur lui; puisqu'en outre, les liaisons auxquelles il est soumis sont sans frottement, la voie la plus rapide consiste manifestement à se servir des équations de Lagrange.

Si T est la demi-force vive du corps, on a, comme l'on sait,

$$\begin{aligned}2\mathrm{T} &= \mathrm{A}(p^2+q^2)+\mathrm{C}r^2\\ &= \mathrm{A}\left(\omega^2\sin^2\theta+\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)+\mathrm{C}\left(\omega\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\end{aligned}$$

Il y a d'ailleurs une fonction des forces $-\mathrm{M}gl\cos\theta$, en désignant par M la masse du corps, par g l'intensité de la pesanteur, et par l la distance OG du point de suspension O au centre de gravité G, distance comptée dans le sens Oz.

Cela étant, on a immédiatement, par les équations de Lagrange

$$r=\omega\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}=r_0,$$

où r_0 est une constante arbitraire; puis :

$$\mathrm{A}\frac{d^2\theta}{dt^2}-\mathrm{A}\,\omega^2\sin\theta\cos\theta+(\mathrm{C}\omega r_0-\mathrm{M}gl)\sin\theta=0;$$

il faut d'ailleurs bien observer qu'il n'y a pas lieu d'appliquer le théorème des forces vives, puisque les liaisons ne sont pas indépendantes du temps.

L'équation précédente s'intègre immédiatement une fois, et donne

$$\mathrm{A}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\mathrm{A}\,\omega^2\cos^2\theta-2(\mathrm{C}\omega r_0-\mathrm{M}gl)\cos\theta-\mathrm{A}h=0,$$

h étant une nouvelle constante arbitraire.

Les inconnues du problème sont donc déterminées finalement par les deux quadratures

$$dt=\frac{d\theta}{\sqrt{h+2\dfrac{\mathrm{C}\omega r_0-\mathrm{M}gl}{\mathrm{A}}\cos\theta-\omega^2\cos^2\theta}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=r_0-\omega\cos\theta.$$

On pourrait exprimer θ et φ en fonction elliptique du temps; mais c'est inutile pour se rendre compte de la variation de ces angles. L'étude de cette variation est d'ailleurs immédiate, suivant l'ordre de grandeur des racines du trinome en $\cos\theta$ qui figure sous le radical, relativement aux quantités -1 et $+1$. Il ne semble donc pas utile d'insister davantage sur ce point.

Le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit à une rotation permanente autour de son axe, lorsqu'on a constamment $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ainsi qu'on le voit immédiatement. L'angle θ doit donc conserver une valeur constante θ_0, et puisque $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, on doit avoir, soit

$$\sin\theta_0 = 0,$$

soit

$$A\,\omega^2 \cos\theta_0 = C\omega r_0 - Mgl,$$

si toutefois c'est possible.

La valeur de h en résulte, puisque $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

L'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$ est constante, et par suite φ varie proportionnellement au temps.

Dans l'un comme dans l'autre cas, tout se passe comme si la liaison n'existait pas entre l'axe du corps et le plan P.

II. *Un disque circulaire homogène, infiniment mince, de masse* M *et de rayon* R, *se meut, assujetti à rester dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires fixes* Ox, Oy. *A un certain moment, le centre du disque est en* O; *la vitesse* v *de ce centre est dirigée suivant* Ox, *et la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son centre est* ω. *Au même instant, on rend immobile, par une liaison sans frottement, un point* A *du disque, défini par ses coordon-*

nées polaires $OA = \rho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. *Déterminer la percussion que subit le disque, le nouvel état des vitesses des points du disque après la percussion, et la variation de force vive qui se produit.*

II. Le point A étant fixé, le disque ne peut plus que tourner autour de ce point, avec une vitesse de rotation ω', immédiatement après la percussion. Cette percussion est d'ailleurs appliquée en A, et ses composantes suivant Ox et Oy sont X et Y.

La rotation ω' autour de A peut être transportée au point O avec adjonction d'une translation qui a pour projections sur Ox et Oy les quantités $\omega'\rho\sin\alpha$ et $-\omega'\rho\cos\alpha$.

Les théorèmes généraux donnent, par suite, immédiatement les relations

$$\begin{aligned} M(\omega'\rho\sin\alpha - v) &= X, \\ M(-\omega'\rho\cos\alpha) &= Y, \\ \frac{MR^2}{2}(\omega' - \omega) &= \rho(Y\cos\alpha - X\sin\alpha), \end{aligned}$$

le moment d'inertie du disque par rapport à son centre étant $\frac{MR^2}{2}$. On en tire

$$\omega' = \frac{\frac{R^2}{2}\omega + v\rho\sin\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2},$$

$$X = M\,\frac{\frac{R^2}{2}(\omega\rho\sin\alpha - v) - v\rho^2\cos^2\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2},$$

$$Y = -M\,\frac{\left(\frac{R^2}{2}\omega + v\rho\sin\alpha\right)\rho\cos\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2}.$$

La perte de force vive subie par le disque est évidemment :

$$M(v^2 - \omega'^2\rho^2) + \frac{MR^2}{2}(\omega^2 - \omega'^2)$$

$$= M \frac{\frac{R^2}{2}(\omega^2\rho^2 - 2\omega v\rho \sin\alpha + v^2) + v^2\rho^2\cos^2\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2}.$$

Le théorème de Carnot aurait d'ailleurs donné pour cette perte de force vive l'expression

$$M[(v - \omega'\rho\sin\alpha)^2 + \omega'^2\rho^2\cos^2\alpha] + \frac{MR^2}{2}(\omega - \omega')^2,$$

et en égalant cette expression au premier membre de l'équation précédente, on retrouve la valeur de ω' donnée ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE.

I Complementi di Geometria elementare; par M. le professeur *C. Alasia*. — 1 vol. in-16 de xv-243 pages avec 117 figures. Milan, U. Hœpli, 1903 (n° 326 des *Manuali*).

Le Ministre de l'Instruction publique en Italie, M. le professeur N. Nasi, a modifié presque complètement les programmes d'enseignement pour les mettre plus convenablement en relation les uns avec les autres et avec ceux des cours universitaires. Dans cette belle réforme, proposée à M. le Ministre par l'Association des Professeurs de Mathématiques, les Instituts techniques aussi sont compris et plus particulièrement les deux dernières années du cours : aux anciens programmes on a ajouté une nouvelle partie comprise sous la dénomination générale de *Compléments de Géométrie*.

Dès lors, la publication de nouveaux livres de texte s'imposait; les auteurs devaient s'inspirer des idées modernes pour mettre en juste relation les anciens cours et les nouveaux et en particulier les *Compléments* des deux dernières années de cours avec les cours universitaires. Le Volume de M. le professeur Alasia est rédigé d'après ces idées et il enrichit la collection de *Manuels* de l'éditeur U. Hœpli, l'une des plus belles en Italie. Il est bien à sa place à côté des autres Volumes publiés par M. Alasia, savoir : *La Geometria del triangolo,* qui a été l'objet des éloges les plus mérités; ses beaux Ouvrages sur le *Calcolo grafico,* les *Esercizi ed Applicazioni di Calcolo integrale e infinitesimale,* les *Elementi della Teoria delle equazioni,* etc.; ses nombreux Mémoires sur toutes les branches de la Science; sa *Poligeometrognomia,* où, sous ce nom un peu compliqué, créé par lui, on trouve la plus grande érudition et une très belle exposition, comme l'a écrit l'éminent professeur George Bruce Halsted, Président de l'Association mathématique américaine, dans la *Biographie de M. C. Alasia* que ce savant a insérée dans le Volume IX de l'*American mathematical Monthly.*

L'Auteur expose d'abord (Chap. I), de la théorie des vecteurs, ce qui est nécessaire pour en montrer aux élèves les principes et en faire apercevoir la grande richesse d'applications. Il passe ensuite (Chap. II et III) aux généralités sur les polyèdres et la mesure des polygones et polyèdres; mais, et avec raison, il n'est pas resté dans les limites que presque tous les Traités s'imposent et a voulu mettre sous les yeux des élèves, après les théorèmes de Varignon, les théorèmes de la puissance des polygones, en particulier des triangles et des polyèdres. Dans les Chapitres IV et V, il étudie respectivement la symétrie et les mouvements des figures avec une grande simplicité d'exposition. Le Chapitre VI contient la théorie élémentaire de l'homothétie et le Chapitre VII celle de la similitude, avec deux des plus importants théorèmes sur les points antihomologues. L'une des parties les plus intéressantes du Livre est l'étude des maxima et minima en Géométrie (Chap. VIII). L'Auteur porte doucement l'élève à étudier cette question si utile, ordinairement négligée en Géométrie parce qu'elle est exposée dans les traités d'Algèbre; il ne laisse pas échapper l'occasion de mettre sous les yeux des lecteurs quelques-uns des points très intéressants de la Nouvelle Géométrie du triangle qu'il cultive passionnément et dont il a publié un très savant *Essai de Terminologie bibliographique;* il détermine le point du plan d'un triangle dont la somme des carrés des distances à ses trois côtés est minima (point de Lemoine); le point du plan d'un triangle dont la somme des carrés des distances à ses trois sommets est minima, etc. Dans le Chapitre IX M. Alasia expose la théorie des transversales; on y trouve de belles démonstrations du théorème dit *de Stewart,* du théorème d'Euler, des applications très intéressantes du théorème de Pascal, de Ménélaüs, de Ceva, et la détermination de certains points remarquables du plan du triangle; la division harmonique, le rapport anharmonique, les figures homologiques et homographiques, etc. Dans le Chapitre X se trouvent la puissance d'un point par rapport à un cercle et la théorie de l'axe radical. Dans le Chapitre XI est exposée la théorie élémentaire de l'involution dans le plan. Ce Chapitre, très important, est le résumé d'un essai très bien fait d'exposition élémentaire de l'involution dans le plan que M. Alasia a déjà publié et qui est très apprécié. Le Chapitre XII traite du Pôle et de la Polaire dans le plan et dans l'espace, donne la démonstration du théorème de Salmon, etc. Le Chapitre XIII contient les points importants de la transformation dite *inversion,* présentés simplement, comme il convient, quand on s'adresse à des élèves. Le Chapitre XIV et dernier contient la théorie géométrique des sections coniques. L'Auteur se sert exclusivement des notions géométriques pour démontrer les théorèmes; il évite la notion de coordonnée, car cette notion ne se trouve pas dans les programmes des Instituts. Après les notions générales et communes à toutes ces sections, il expose progressivement les propriétés caractéristiques et les constructions des courbes, celles de leurs tangentes, normales, etc. Mais il a raison d'introduire la notion de coordonnée pour déduire avec simplicité l'équation de chacune des courbes.

Nous sommes persuadés que ce Traité, très bien écrit, très concis et très précis, indispensable aux élèves comme Livre de texte, sera accueilli par MM. les Professeurs avec toute la faveur qu'il mérite. ERNEST LEBON.

LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE à l'usage des élèves des classes de première; par MM. *P. Appell,* membre

de l'Institut, et *J. Chappuis,* professeur à l'École centrale. — 1 vol. in-16 de VIII-176 pages avec 76 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Dans la série des nouveaux programmes scientifiques de l'Enseignement secondaire, celui de Mécanique détonne. Tandis que la tendance générale de la réforme est de rendre l'enseignement plus concret, plus accessible, plus *pratique;* le programme de Mécanique au contraire, malgré les apparences, est éminemment *théorique.* Ce n'est pas un programme d'enseignement secondaire, c'est un programme d'enseignement supérieur qui impose une méthode, à coup sûr fort élégante et rapide, mais peu propre à familiariser les jeunes esprits avec la *vraie* mécanique, celle qu'on applique ailleurs qu'aux examens.

C'est sur ce programme que MM. Appell et Chappuis ont essayé d'écrire un Livre qui soit *dans l'esprit du jour.* Faire, dans le cadre d'un programme *théorique,* un enseignement *pratique* n'est pas chose facile! Je n'ose pas encore dire que les Auteurs y ont pleinement réussi, puisqu'ils n'ont rempli que la moitié de leur tâche, et la plus facile, mais, en tout cas, cette première Partie, fort remarquable, prouve une fois de plus que les programmes ne valent que par ceux qui les appliquent.

L'Ouvrage est en deux parties : la Théorie géométrique des vecteurs et la Cinématique.

La partie géométrique relative aux vecteurs a été exposée uniquement par des méthodes élémentaires fort claires et simples.

En Cinématique la partie *physique* a surtout été développée et, il faut bien le noter, l'usage très restreint que l'on y fait de la théorie des vecteurs ne semble pas, malgré tout, justifier sa dislocation de la Statique, au risque d'empêcher à tout jamais l'élève de savoir de la *vraie Statique.* Mais, je le répète, les Auteurs n'ont fait là que suivre le programme et il faut admirer le parti qu'ils en ont tiré en insistant sur le côté pratique, sur la notion de temps, sur la réalisation effective des mouvements élémentaires par glissières, arbres, coussinets, pivots, crapaudines, etc.

MM. Appell et Chappuis ont donc fait là une belle œuvre, car non seulement ils ont écrit un bon Livre, mais ils ont montré, avec l'autorité qui s'attache à leurs noms, la voie à suivre et cela en dépit des programmes officiels. C. B.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x \sin x + (a + bx^2)\cos x,$$

a et b étant des constantes données.

Quelle relation doit-il y avoir entre a et b pour que l'intégrale générale soit une fonction uniforme de x? Montrer que, dans ce cas, on peut obtenir l'expression de cette intégrale sous forme entièrement explicite, sans aucun signe de quadrature.

II. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un point d'une surface* (S), N *la projection de* M *sur le plan* xOy, P *et* Q *les points de rencontre du plan tangent en* M *à la surface* (S) *avec les axes* Ox *et* Oy *respectivement. On demande de trouver l'équation générale des surfaces* (S) *telles que l'on ait*

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{MN}}{a},$$

a étant une longueur donnée.

Déterminer les lignes asymptotiques de ces surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int x^2 y \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx\, dy,$$

étendue à la région du plan définie par les inégalités

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x^3 + y^3 \leqq 1.$$

(Octobre 1901.)

Marseille.

Épreuve écrite. — I. *On joint un point mobile* M *à deux points fixes* A_1 *et* A_2, *et l'on suppose que les directions* A_1M *et* A_2M *fassent avec une direction donnée* Ox *des angles* φ_1 *et* φ_2 *liés entre eux par la relation à coefficients constants*

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = C.$$

On demande les trajectoires orthogonales des courbes que peut décrire le point M *quand le paramètre* C *varie.*

Étudier les cas particuliers où l'on a

$$k_1 + k_2 = 0 \qquad ou \qquad k_1 - k_2 = 0.$$

II. *On trace un axe quelconque* Oy *perpendiculaire à* Ox, *et l'on figure les points*

$$z = x + y\sqrt{-1}, \qquad a_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \qquad a_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1},$$

dont les deux derniers sont fixes. On demande de mettre l'expression à coefficients constants

$$u = k_1 \log(z - a_1) + k_2 \log(z - a_2),$$

sous la forme $X + Y\sqrt{-1}$, *où* X *et* Y *sont des fonctions réelles de* x *et de* y.

Expliquer comment les équations

$$X = \lambda, \qquad Y = \mu,$$

où λ *et* μ *sont des paramètres arbitraires, sont en relations avec le problème de Géométrie qui fait l'objet de la première question.*

Solution.

La relation

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = C,$$

est équivalente à la relation

$$k_1 \operatorname{arc\,tang}\frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1} + k_2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y-\beta_2}{x-\alpha_2} = C.$$

La différentiation élimine C. Échangeant ensuite

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad -\frac{dx}{dy},$$

on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

L'intégration facile donne

$$\rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2} = C'.$$

Pour $k_1 - k_2 = 0$, on a

$$\rho_1\rho_2 = C'' \qquad \text{(ovales)}.$$

Pour $k_1 + k_2 = 0$, on a

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = C'' \qquad \text{(cercles)}.$$

Quant à la fonction $u = X + Y\sqrt{-1}$, on a

$$X = \rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2},$$
$$Y = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2.$$

Épreuve pratique. — *Une hyperbole équilatère, dont le centre est le point* O, *tourne autour d'une de ses asymptotes* Oz.

Soit S *la surface de révolution qu'elle engendre.*

Soit P *le plan mené au point* O *perpendiculairement à* Oz.

1° *On propose d'effectuer la cubature du solide compris entre la surface* S, *le plan* P *et un cylindre ayant pour section droite une courbe* C, *donnée dans le plan* P.

On ramènera le problème au calcul d'une intégrale simple.

2° *Si la courbe* C *est une courbe entourant une fois le point* O, *ce solide a des points à distance infinie; démontrer que son volume est fini.*

3° *Appliquer le résultat qui précède au cas où* C *est une ellipse ayant un foyer au point* O.

Solution.

$\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$ étant l'équation polaire de l'ellipse, et

$$zx = a^2$$

étant l'équation de l'hyperbole, on a

$$V = \frac{2\pi a^2 p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

(Juillet 1901.)

Épreuve écrite. — 1° *Montrer que, si y_1 et y_2 satisfont aux équations différentielles*

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2,$$

le rapport

$$u = \frac{y_2}{y_1}$$

dépend d'une équation dite de Riccati, *c'est-à-dire d'une équation de la forme*

$$\frac{du}{dx} + A + Bu + Cu^2 = 0.$$

Les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sont des fonctions données de x, et A, B, C *sont des fonctions à calculer.*

Démontrer que, réciproquement, on peut faire correspondre à l'équation en u un système en y_1 et y_2 formé d'une infinité de manières différentes.

2° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x} y_1 + y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{x^2} y_1 + \frac{2}{x} y_2,$$

au moyen de la substitution $y_1 = x z_1$, $y_2 = z_2$; former et intégrer l'équation en $u = \dfrac{y_2}{y_1}$.

Épreuve écrite. — *Déterminer les diverses valeurs de la fonction de variable imaginaire*

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Développer cette fonction en série de Maclaurin.
Cette série de Maclaurin peut-elle être intégrée ?
Quelle fonction usuelle représente la série intégrée ?

(Novembre 1901.)

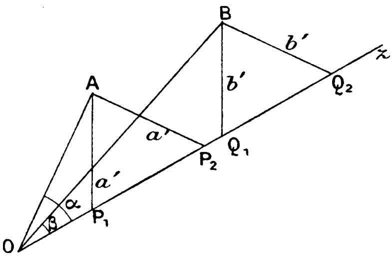
CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un plan* π' *se meut sur un plan* π *de manière qu'une droite* d' *fixe dans le plan* π' *passe constamment par un point fixe* P *de* π *et qu'un point* P' *fixe sur* d' *décrive une droite fixe* d *de* π.

Trouver les équations de la base et de la roulette de ce mouvement, construire ces courbes et indiquer les branches de ces courbes qui servent à engendrer le mouvement continu de π' *sur* π.

II. Oz, OA *et* OB *sont trois tiges pouvant librement tourner dans le plan de la figure autour du point fixe* O.



En A *sont articulées deux tiges égales* AP_1, AP_2 *dont les extrémités* P_1 *et* P_2 *peuvent librement glisser sur* Oz. *En* B *on a deux tiges analogues* BQ_1, BQ_2 :

1° *Établir la relation* $F(\alpha, \beta) = 0$ *qui exprime que l'un des points* P *et l'un des points* Q *décrivent des figures inverses par rapport à* O ;

2° *Établir la relation analogue pour que la transformation soit une homothétie;*

3° *En conclure que l'appareil réalise simultanément deux inversions et deux homothéties. Retrouver ces résultats par un raisonnement géométrique;*

4° *Réaliser la liaison* $F(\alpha, \beta) = 0$ *entre les trois tiges* Oz, OA, OB *au moyen de tiges articulées;*

5° *Trouver les cas dans lesquels cette liaison se réalise simplement en reliant invariablement les deux tiges* OA *et* OB. *Relation entre* a, b, a', b'. *Inversions et homothéties réalisées dans ce cas.*

NOTA. — *On posera*

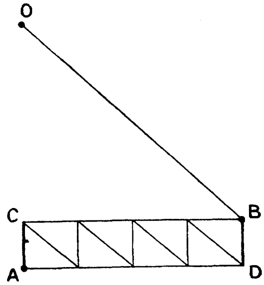
$$OA = a, \qquad AP_1 = a',$$
$$OB = b, \qquad BQ_1 = b';$$

$$a^2 - a'^2 = u \qquad et \qquad 2\lambda = K + \frac{uv}{K},$$

$$b^2 - b'^2 = v \qquad et \qquad 2\mu = Hu + \frac{v}{H},$$

K *et* H *désignant respectivement la puissance d'inversion et le rapport d'homothétie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une poutre articulée* ABCD *composée de triangles rectangles est placée horizontalement.*



Le sommet A *est fixe et le sommet* B *est relié par une tige articulée inclinée à* 45° *à un point fixe* O.

La partie supérieure CB *supporte une charge totale de* 1600^{kg} *répartie uniformément.*

Construire le diagramme des tensions en négligeant le poids des barres. Distinguer les barres tendues et les barres comprimées.

Échelle des forces 1^{cm} *par* 100^{kg}. (Juillet 1901.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1916.

(1901, p. 336.)

Le sommet A *d'un triangle* ABC *et le pied* H *de la hauteur issue de* A *sont fixes. Les autres sommets* B *et* C *sont tels que* $\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \text{const.}$

1° *Le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC *parcourent chacun une parabole;*

2° *L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une conique.* (Barisien.)

SOLUTION

Par M. E. Lugaro.

Prenons pour axe des x, BC et pour axe des y AH.

Soient o, a; b, o; c, o les coordonnées respectives des trois points A, B, C. On a

$$b^2 + c^2 = \text{const.} = 2k^2.$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, dont les coordonnées sont $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{a^2+bc}{2}$, se déplace sur une parabole dont l'équation est $x^2 = ay - \frac{a^2-k^2}{2}$.

Le centre du cercle de neuf points ayant pour coordonnées

$$x = \frac{b+c}{4}, \qquad y = \frac{a^2-bc}{4a},$$

se déplace sur une partie de la parabole dont l'équation est

$$x^2 = -\frac{a}{2}y + \frac{a^2+k^2}{8}.$$

Les équations des deux cercles considérés sont respectivement

$$a(x^2+y^2)-a(b+c)x-(a^2+bc)y+abc=0,$$
$$2a(x^2+y^2)-a(b+c)x-(a^2-bc)y \qquad =0,$$

Leur axe radical, dont l'équation est

$$a(b+c)x+(a^2+3bc)y-2abc=0,$$

enveloppe une partie de la courbe conique dont l'équation est

$$(1)\quad 2a^4u^2-4a^2k^2v^2-2a(6k^2-a^2)v-3(3k^2-a^2)=0$$

en tangentielles, ou

$$(1)\quad a^2x^2+6(3k^2-a^2)y^2-4a(6k^2-a^2)y+8a^2k^2=0,$$

en coordonnées de points.

L'un des axes de symétrie de cette conique est l'axe des y, l'autre la droite d'équation

$$y=\frac{a(6k^2-a^2)}{3(3k^2-a^2)}.$$

Les sommets ont les points $\left(0, \dfrac{3ak^2}{3k^2-a^2}\right)$ et $\left(0, \dfrac{2}{3}a\right)$; ce dernier n'appartient pas à l'enveloppe.

Dans le cas de $3k^2>a^2$, l'équation (1) représente une ellipse et l'enveloppe est constituée par la portion de celle-ci comprise entre les droites

$$y=\frac{2ak^3}{3k^2-a^2} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{6ak^2}{9k^2-a^2}.$$

Si l'on a $3k^2<a^2$, l'équation (1) représente une hyperbole et l'enveloppe est constituée par la partie de celle-ci se trouvant dans celle des deux régions limitées par les droites susdites, qui ne renferme pas le point $\left(0, \dfrac{2}{3}a\right)$. Finalement, si $3k^2=a^2$, l'équation (1) représente une parabole, et l'enveloppe est constituée par la portion de celle-ci comprise entre la droite de l'infini et la droite $y=a$.

Autres solutions par MM. Couvert, Frizac et Lez.

1919.

(1902, p. 44.)

Le produit du rayon de courbure en un point d'une conique par le cube de la distance du centre à la tangente correspondante est constant pour tous les points de la conique.

Corollaire. — *Les centres de courbure répondant aux points de déviation maxima d'une ellipse sont les projections du centre sur les normales en ces points.*

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. S. Chassiotis.

Soit l'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + Cy^2 - 1 = 0,$$

de la conique; différentions-la par rapport à x deux fois successivement, nous aurons

$$(2) \qquad Ax + Cyy' = 0,$$

$$(3) \qquad A + Cy'^2 + Cyy'' = 0;$$

en éliminant y' entre les équations (2) et (3), on a

$$\frac{A(Ax^2 + Cy^2)}{Cy^2} + Cyy'' = 0,$$

qui s'écrit à cause de (1),

$$(4) \qquad y^3 y'' = -\frac{A}{C^2}.$$

Soient R le rayon de courbure en un point; d la distance de la tangente à la conique à son centre; formons, Rd^3, nous aurons

$$(5) \qquad Rd^3 = -\frac{(y - xy')^3}{y''}$$

ou

$$y - xy' = y + \frac{Ax^2}{Cy} = \frac{Ax^2 + Cy^2}{Cy} = -\frac{1}{Cy},$$

d'où

$$R d^3 = -\frac{1}{C^3 y^3 y''} = -\frac{1}{C^3}\,\frac{-C^2}{A} = +\frac{1}{AC} = \text{const.};$$

on a donc bien en tous les points de la conique

$$(6) \qquad R d^3 = +\frac{1}{AC} = a^2 b^2,$$

en désignant par a et par b les demi-axes de la conique.

C. Q. F. D.

Pour démontrer le corollaire, faisons dans l'égalité (6) $R = d$, on a alors

$$(7) \qquad R = \pm\sqrt{ab};$$

et l'on reconnaît là les rayons de courbure des points de déviation maximum, ainsi que l'a démontré M. M. d'Ocagne (*Nouv. Ann.*, 1886, p. 377).

La propriété signalée dans cette question n'appartient pas aux coniques seulement.

Proposons-nous en effet de :

Trouver toutes les courbes planes telles que le rayon de courbure R *et la distance* d *de l'origine des coordonnées à la tangente en un point* M *de la courbe soient liés par la relation*

$$R d^3 = \frac{k^2}{4} = \text{const.}$$

La solution de ce problème est très simple en coordonnées tangentielles polaires. Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0,$$

une tangente à la courbe, on a

$$R = p + p'', \qquad d = p(\alpha),$$

d'où l'équation du problème

$$p^4 + p^3 p'' = \frac{k^2}{4},$$

qui s'intègre facilement et l'intégrale est de la forme

$$p^2 = a \cos\alpha + b \sin\alpha + c.$$

Autres solutions par MM. Barisien et Frizac.

1931.

(1902, p. 288.)

Lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et tangentes à une conique fixe. (Alpha.)

1933.

(1902, p. 336.)

Lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et passant par un point fixe. (Alpha.)

SOLUTIONS

Par M. R. Gilbert.

Une transformation tangentielle de seconde classe fait correspondre à un point, M, une conique, μ, inscrite au triangle fondamental OAB. On peut, par un choix des coordonnées, écrire l'équation tangentielle de cette conique

$$avw + bwu + cuv = 0,$$

a, b, c désignant les coordonnées du point M rapporté au triangle ABC.

Cela étant :

1° Considérons une droite fixe, D, (u_0, v_0, w_0). Son pôle, M', par rapport à μ est

$$\left|\begin{aligned} x &= bw_0 + cv_0, \\ y &= cu_0 + aw_0, \\ z &= av_0 + bu_0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent que M′ correspond à μ dans une transformation quadratique tangentielle.

En particulier, si D est la droite de l'infini, M′ est le centre de μ. D'après cela on obtient facilement les résultats suivants :

Si μ est tangente à une droite fixe, M′ décrit une droite.

Si μ passe par un point fixe, M′ décrit une conique.

Si μ est tangente à une conique fixe, M′ décrit une courbe de quatrième classe à trois tangentes doubles. Si la conique donnée est tangente à deux côtés du triangle OAB, M′ décrit une conique, etc.

2° Considérons deux points fixes P, Q, sur le côté AB ; leur équation tangentielle est

$$(1) \qquad \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 = 0,$$

Les coordonnées du point de rencontre M″ des tangentes menées de P, Q à la conique a sont données par l'identification de l'équation (1) avec la suivante

$$(av + bu)(ux + vy) - czuv = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{bx + ay - cz}{2\beta} = \frac{ax}{\alpha} = \frac{by}{\gamma}.$$

Ces équations montrent que M″ correspond à M dans une transformation ponctuelle quadratique dont les pôles sont O, P, Q.

En particulier, supposons que P et Q soient les points cycliques ; la conique μ est une parabole de foyer M″. On obtient facilement d'après cela les résultats suivants :

Si M décrit une droite, les paraboles μ sont tangentes à trois droites fixes, M″ décrit un cercle.

Si M décrit une conique C, tangente à OA, OB, les paraboles μ sont tangentes à une conique Γ, tangente à OA, OB, et M″ décrit une courbe du quatrième ordre, C″, ayant trois points doubles en O, P, Q.

En particulier, si C est une parabole, Γ se réduit à un point (outre le point O) et C″ a un rebroussement en O.

Si M décrit une parabole C quelconque, les paraboles μ sont tangentes à une courbe de troisième classe, Γ tangente à OA, OB et tangente double à la droite de l'infini; le point M″ décrit une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles en P, Q et un rebroussement en A.

Les résultats obtenus ci-dessus se modifient facilement lorsque les deux côtés OA, OB viennent à se confondre. La conique μ est alors tangente à une droite fixe en un point fixe. On trouve par exemple que le lieu des foyers d'une parabole tangente à une conique en un point fixe et en un point variable est une podaire de parabole, etc.

Autres solutions : Question 1931 par M. Frizac; question 1933 par MM. Audibert, Barisien, Couvert, Frizac.

QUESTIONS.

1962. Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 1,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

les équations de deux quadriques rapportées à un système quelconque d'axes rectangulaires passant par leur centre commun; on demande de démontrer les propositions suivantes :

1° Les conditions qui expriment que ces deux quadriques ont les mêmes axes de figure sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0,\\ V &= (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0,\\ W &= (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$Hg - Gh = (Hg), \qquad Bf - Fb = (Bf), \qquad \ldots.$$

2° La condition qui exprime que le plan ayant pour équation

$$lx + my + nz = 0$$

coupe les deux quadriques données suivant deux coniques ayant les mêmes axes de figure est

$$(l^2+m^2+n^2)(lU+mV+nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA+mH+nG & lH+mB+nF & lG+mF+nC \\ la+mh+ng & lh+mb+nf & lg+mf+nc \end{vmatrix} = 0.$$

Si les axes sont obliques et font entre eux des angles λ, μ et ν, les conditions (1) prennent la forme

$$\begin{aligned}
&(Hg)\sin^2\lambda + (Bf)\sin^2\mu + (Fc)\sin^2\nu \\
&\quad + (Bc)(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\
&\quad + [(Fg)+(Hc)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\
&\quad + [(Hf)+(Bg)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \\
&(Ga)\sin^2\lambda + (Fh)\sin^2\mu + (Cg)\sin^2\nu \\
&\quad + [(Fg)+(Ch)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\
&\quad + (Ca)(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\
&\quad + [(Gh)+(Fa)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \\
&(Ah)\sin^2\lambda + (Hb)\sin^2\mu + (Gf)\sin^2\nu \\
&\quad + [(Hf)+(Gb)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\
&\quad + [(Gh)+(Af)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\
&\qquad + (Ab)(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0.
\end{aligned}$$

(GENTY.)

1963. Rectifier la courbe représentée par

$$x^4\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right) - y^4\left(\frac{b^2+2x^2}{y^2}+1\right) = 0.$$

(G. FLEURI.)

1964. Rectifier la courbe déterminée par l'intersection de

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \text{et de} \qquad \frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

(G. FLEURI.)

1965. Rectifier la courbe représentée par

$$(x^2+y^2)^4 - k^2a^2b^2x^2y^2[(a^2-b^2)+(x^2-y^2)] = 0.$$

(E. RENAUD.)

NÉCROLOGIE.

ERNEST DUPORCQ.

La Rédaction des *Nouvelles Annales* semble poursuivie par une véritable fatalité. Antomari succombait prématurément l'année dernière. Duporcq, son élève, vient à son tour de nous être enlevé, à l'âge de 30 ans environ, atteint par une maladie dont la marche a été foudroyante et qui l'a emporté le 1er avril ([1]).

Véritablement atterré par cette stupéfiante nouvelle, je ne me sens la force que de déplorer un tel malheur, et d'envoyer à la famille désolée l'expression de notre profonde affliction. Je connaissais Duporcq depuis d'assez longues années ; je l'avais rencontré comme élève à l'école Monge, et j'avais été frappé par ses aptitudes géométriques exceptionnelles.

Le jeune savant avait tenu déjà les promesses du candidat à l'École Polytechnique, où il avait été admis en 1892. C'est sur mes instances qu'il était devenu

([1]) Nous devons faire remarquer que le présent numéro, portant l'indication de mars, est publié avec un peu de retard.

rédacteur de ce journal, où je considérais son entrée comme une bonne fortune. Plus encore que son talent, s'il est possible, j'appréciais ses qualités de cœur, sa droiture de caractère. Tout semblait lui sourire dans la vie; son avenir scientifique s'annonçait de la façon la plus brillante; le 21 février, il avait épousé une jeune fille qui reste veuve aujourd'hui au bout de cinq semaines de mariage! La dernière fois que j'ai eu le bonheur de lui serrer la main, il me parlait de cette union prochaine, de ses projets d'avenir avec un enthousiasme raisonné qui était l'une des marques spéciales de son esprit.

En 1900, Duporcq, Secrétaire général du Congrès international des Mathématiciens, à Paris, avait montré à cette occasion des qualités remarquables d'organisateur. Personne n'a perdu le souvenir de son zèle et de son amabilité; et la publication du Volume contenant les Comptes rendus de ce Congrès fait grand honneur à sa mémoire.

La science mathématique, la Géométrie surtout, font en lui une perte irréparable.

Mais on ne sait qui l'on doit plaindre le plus, dans cet écroulement inattendu et si cruel de tant d'espérances.

C.-A. LAISANT.

[O5i]

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX SURFACES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Soient (S) et (S′) deux surfaces inverses par rapport à un point O. On sait que deux points m et m', appartenant respectivement à (S) et (S′) et se correspondant dans l'inversion, satisfont aux conditions suivantes, que j'appellerai conditions [C] :

1° La droite mm' passe par le point O.

2° La normale à (S) en m et la normale à (S′) en m' se rencontrent.

3° Si m décrit une ligne de courbure de (S), m' décrit une ligne de courbure de (S′).

On peut se demander si ces propriétés caractérisent deux surfaces inverses. Nous verrons qu'il n'en est pas ainsi, en cherchant à résoudre la question suivante :

Déterminer de la manière la plus générale un couple de surfaces (S) *et* (S′) *entre lesquelles on puisse établir une correspondance telle que deux points correspondants quelconques* m *et* m' *satisfassent aux conditions* [C] *énoncées plus haut,* O *étant un point convenablement choisi.*

J'indique dès maintenant les résultats auxquels mène l'étude de ce problème.

On obtient des couples de surfaces satisfaisant aux conditions [C] dans les cinq cas suivants, et seulement dans ces cas :

I. (S) *et* (S′) *sont confondues en un même cône de sommet* O.

II. *L'une des surfaces* (S) *et* (S') *est une sphère de centre* O, *l'autre surface est quelconque.*

III. (S) *et* (S') *sont deux surfaces homothétiques par rapport au point* O.

IV. (S) *et* (S') *sont deux surfaces inverses par rapport au point* O.

V. (S) *et* (S') *sont engendrées simultanément de la manière suivante : on se donne un cône* (G) *quelconque de sommet* O; *dans l'un des plans tangents de* (G) *on trace deux courbes arbitraires* K *et* K'. *Lorsque ce plan tangent roule sur* (G), K *engendre* (S) *et* K' *engendre* (S').

Tous ces systèmes satisfont bien aux conditions [C]. Le fait est évident pour les systèmes I, II, III. Pour le système IV, il résulte des propriétés de l'inversion rappelées au début. Enfin, pour reconnaître qu'il en est de même pour le système V, remarquons que les surfaces (S) et (S') définies de la manière indiquée sont des *surfaces-moulures* particulières. D'après les propriétés connues de ces surfaces, les lignes de courbure de (S) sont, dans un système, les diverses positions de la courbe K, et, dans l'autre système, les lignes sphériques trajectoires des divers points de K dans le mouvement de cette courbe. De cette remarque qui s'applique à (S'), *mutatis mutandis,* résulte immédiatement que les conditions [C] sont bien satisfaites par les surfaces du système V ([1]).

Voici maintenant par quelle analyse on peut établir que le problème proposé n'admet pas de solutions, en dehors des précédentes.

([1]) On peut remarquer que le cas I est un cas particulier du cas V.

2. Supposons réalisé un couple de surfaces (S) et (S′) satisfaisant aux conditions [C]. Soient (P) le plan tangent à (S) en m, (P′) le plan tangent à (S′) en m'. Il y a lieu de distinguer trois cas.

1° *Les plans* (P) *et* (P′) *sont constamment confondus.*

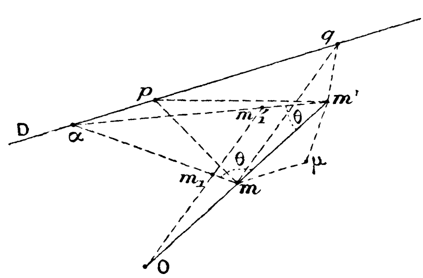
Cela exige que (P) passe par le point m' et par suite par le point O. (S) est donc un cône de sommet O et (S′) est visiblement confondue avec (S). Nous sommes ainsi conduits à la solution I.

2° *Les plans* (P) *et* (P′) *sont constamment parallèles.*

Les surfaces (S) et (S′) sont homothétiques par rapport au point O. (Solution II.)

3° *Les plans* (P) *et* (P′) *sont distincts et se coupent suivant une droite* D *située à distance finie.*

Cette droite D ne peut passer ni par le point m ni par le point m'. Supposons, en effet, qu'elle passe par le



premier de ces points. Alors le plan (P′) passera par le point O, d'où nous conclurons comme tout à l'heure que (S′) est un cône, avec lequel (S) est nécessairement confondue. Les plans (P) et (P′) coïncideront, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse actuelle.

Cela posé, menons dans le plan (P) les directions principales relatives à la surface (S) et au point m. Opérons de même dans le plan (P′), relativement à la surface (S′) et au point m'. On obtient ainsi quatre droites qui, d'après la troisième des conditions [C], se coupent deux à deux en deux points p et q, situés nécessairement sur D.

[Si pour l'une des surfaces, (S) par exemple, les directions principales sont indéterminées en chaque point, tous les points de (S) sont des ombilics, et cette surface est, comme on sait, une sphère. On obtient ainsi la solution II. Je supposerai dorénavant ce cas écarté.]

3. Il faut maintenant encore traiter séparément deux cas qui peuvent se présenter :

1° *Les deux points p et q sont (en général) à distance finie.*

Décrivons la sphère (Σ) ayant pour diamètre pq; elle passe par les points m et m', puisque les angles $\widehat{pmq}$ et $\widehat{pm'q}$ sont droits. Menons la normale en m à (S) et la normale en m' à (S′). Elles se coupent en un point μ (deuxième des conditions [C]). μm et $\mu m'$ sont deux tangentes à (Σ). On en conclut que les deux points m et m' sont symétriques par rapport au plan (μpq).

Imaginons maintenant que le point m se déplace infiniment peu sur (S) dans une direction *quelconque* et vienne en m_1. Le point m' viendra en m'_1, sur la surface (S′). Les droites mm_1, $m'm'_1$ se coupent sur D; soit α leur point de rencontre. Les angles $\widehat{\alpha mm'}$, $\widehat{\alpha m'm}$ sont égaux; désignons par θ leur valeur commune.

Le triangle $\alpha m m'$, coupé par la transversale $O m_1 m'_1$, donne la relation

$$\frac{m_1 m}{m_1 \alpha} \frac{m'_1 \alpha}{m'_1 m'} \frac{O m'}{O m} = 1,$$

d'où

$$\frac{m_1 m}{m'_1 m'} = \frac{O m}{O m'} \frac{m_1 \alpha}{m'_1 \alpha} = \frac{O m}{O m'},$$

en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur. Mais on a

$$m_1 m = \frac{d(O m)}{\cos\theta}, \qquad m'_1 m' = -\frac{d(O m')}{\cos\theta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d(O m)}{d(O m')} = -\frac{O m}{O m'}$$

ou

$$O m' \, d(O m) + O m \, d(O m') = 0,$$

et, en intégrant,

$$O m . O m' = \text{const.}$$

Ainsi, dans l'hypothèse actuelle, (S) et (S') sont des surfaces inverses par rapport au point O. C'est la solution IV.

2° *L'un des points p et q, le point q par exemple, est constamment rejeté à l'infini sur* D.

S'il en est ainsi, les droites mq, $m'q$ et D sont parallèles, et le point p est la projection commune des points m et m' sur D. En désignant toujours par μ le point de rencontre des normales aux deux surfaces, respectivement en m et en m', les quatre points m, m', p, μ sont dans un même plan perpendiculaire à D.

Soit Γ_p la ligne de courbure de (S) qui passe en m et qui est tangente à mp. Cette courbe est la directrice d'une normalie développable, dont le plan tangent le long de $m\mu$ est le plan $(pm\mu)$. Mais ce plan contient le point m' et par suite le point O. Il est donc nécessaire que la normalie développable en question se réduise à un plan contenant le point O et la courbe Γ_p est tracée dans ce plan. *Ainsi la ligne de courbure* Γ_p *et, naturellement, toutes celles du même système sont tracées dans des plans qui contiennent le point* O.

Ces divers plans enveloppent un cône (G) de sommet O. Considérons maintenant sur (S) la seconde ligne de courbure Γ_q qui passe au point m. $m\mu$ et mO sont deux normales à cette courbe. Son plan normal en m est par suite le plan $(\mathrm{O}m\mu)$, tangent au cône (G). *On voit donc que* (G) *est la surface polaire de* Γ_q, *et naturellement de toutes les lignes de courbure du même système.*

Or on sait qu'une courbe gauche peut être considérée comme la trajectoire d'un point, convenablement choisi, appartenant à un plan qui roule sur la surface polaire de cette courbe. Les courbes Γ_q sont donc les trajectoires des divers points de l'une des courbes Γ_p, quand on fait rouler sur le cône (G) le plan qui contient cette courbe (¹).

Tous ces raisonnements peuvent se répéter pour la surface (S'), et nous sommes ainsi amenés à la solution V, par laquelle le problème est définitivement épuisé.

(¹) On remarquera que le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi, sous une autre forme : *Si les lignes de courbure d'une surface appartiennent, dans un système, à des sphères concentriques, cette surface est engendrée par une courbe plane de grandeur invariable, dont le plan roule sur un cône d'ailleurs quelconque.*

[M²4iδ]

SUR LE THÉORÈME DE SCHŒLCHER;

Par M. A. MANNHEIM.

A Marseille, en 1891, le colonel Schœlcher a présenté, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, un Mémoire intitulé : *Théorie générale des hélices*. Ce travail ne figure au *Compte rendu* du Congrès que par une très courte analyse; malgré cela, on y trouve la « propriété de la troisième section circulaire du tore de couper tous les méridiens suivant un angle constant ».

Cette troisième section circulaire du tore a été découverte en 1848 par Yvon Villarceau (voir *Comptes rendus*). A ma connaissance, depuis cette époque, on n'avait pas remarqué le joli théorème de Schœlcher (1) qu'on peut énoncer ainsi :

Sur un tore les cercles de Villarceau sont des loxodromies.

Par un point M d'un tore passent deux cercles de Villarceau, symétriques par rapport au plan méridien mené par M; l'angle de ces deux cercles est alors double de l'angle que fait l'un deux avec le cercle méridien en M, par suite :

L'angle compris entre les deux cercles de Villar-

---

(1) A la page 161 du *Bulletin des Sciences mathématiques* pour 1902, on trouve l'énoncé de ce théorème extrait d'un travail de M. Holzmüller publié dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, mais il faut remarquer que ce travail n'a paru qu'en 1899.

ceau, qui passent par un point M *d'un tore, est toujours le même, quelle que soit la position de* M.

La démonstration de ce théorème, d'après ce qui précède, entraîne celle du théorème de Schœlcher; elle est très simple comme on va le voir.

La sphère, qui contient les deux cercles de Villarceau qui passent par M, est doublement tangente au tore; appelons O le point où elle coupe l'axe de révolution de cette surface. Prenons O comme pôle d'inversion et choisissons la puissance d'inversion de façon que le tore se transforme en lui-même. La sphère a pour transformée un plan doublement tangent au tore, et les deux cercles de Villarceau qu'elle contient ont pour transformés les cercles résultant de l'intersection du tore par ce plan tangent. L'angle de ces derniers cercles est constant, quel que soit le plan doublement tangent au tore, il en est alors de même de l'angle des deux cercles de Villarceau qui passent par un point arbitraire M.

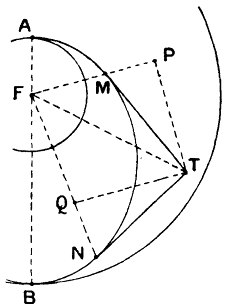
On peut aussi énoncer le théorème de Schœlcher en disant :

Les cercles d'intersection d'un tore par des plans bitangents coupent sous des angles égaux les lignes de courbure d'un même système de cette surface.

Sous cette forme, le théorème de Schœlcher s'étend immédiatement par inversion à la cyclide de Dupin. Je ne m'arrête pas à cette extension, n'ayant en vue ici que le théorème de Schœlcher, dont je vais donner maintenant une démonstration directe.

Faisons une projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution du tore. Soit AMNB une ellipse projection d'un cercle de Villarceau. La projection F de l'axe du tore est un foyer de cette ellipse.

Sur cette courbe, prenons les points arbitraires M, N, projections des points M′, N′, et menons les tangentes MT, NT. La droite FT étant la bissectrice de l'angle MFN, il en résulte que les distances TP, TQ du point P aux



côtés de cet angle sont égales. Remarquons tout de suite que les segments de l'espace T′P′, T′Q′, parallèles au plan de projection et qui se projettent en TP, TQ, sont parallèles aux tangentes en M′, N′ aux cercles qui sont des parallèles du tore.

Les tangentes T′M′, T′N′ au cercle de Villarceau sont égales. Les segments T′P′, T′Q′ sont égaux. Par suite, les triangles rectangles de l'espace T′M′P′, T′N′Q′ sont égaux et leurs angles en T′ sont alors égaux. D'après la remarque qui vient d'être faite, le cercle de Villarceau coupe donc les parallèles du tore en M′ et N′ sous des angles égaux.

Si l'on fait varier l'un de ces points, l'autre restant fixe, on voit qu'au point variable l'angle du cercle de Villarceau avec le parallèle du tore est toujours de même grandeur, puisqu'il est constamment égal à un angle fixe. Le théorème est ainsi démontré.

J'espère que cette courte Note appellera l'attention sur le très intéressant théorème de Schœlcher.

[15a]

CORRESPONDANCE (1, 1) ENTRE LES DEUX DÉCOMPOSITIONS $N = A \times B$ ET $N = P^2 + Q^2$;

PAR M. G. FONTENÉ.

§ I. — DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS.

1. Soit
$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

les facteurs a, b, c, ... étant premiers. Le nombre des décompositions de N en un produit de deux facteurs est
$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2},$$

si N n'est pas carré parfait; lorsque N est un carré, le nombre des décompositions est
$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots-1}{2}+1$$
ou
$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots+1}{2}.$$

2. Le nombre des décompositions de N en un produit de deux facteurs premiers entre eux est égal au nombre des décompositions de $abc\ldots$ en un produit de deux facteurs, soit
$$2^{k-1},$$

en appelant k le nombre des facteurs premiers distincts. Les facteurs en question sont d'ailleurs les termes du produit

$$(1+a^\alpha)(1+b^\beta)(1+c^\gamma)\ldots,$$

c'est-à-dire les termes du polynome

$$1+(a^\alpha+b^\beta+\ldots)+(a^\alpha b^\beta+\ldots)+(a^\alpha b^\beta c^\gamma+\ldots)+\ldots,$$

chaque facteur s'associant avec un autre pour donner le produit N. On suppose N différent de 1.

3. Soit $N = A \times B$, A et B ayant Δ pour plus grand commun diviseur; on a

$$N = \Delta^2 ab,$$

a et b étant premiers entre eux. Les décompositions de N en un produit de deux facteurs ayant Δ comme plus grand commun diviseur, correspondent donc aux décompositions du quotient $N : \Delta^2$ en deux facteurs premiers entre eux.

4. On peut classer les décompositions de N en un produit de deux facteurs d'après le plus grand commun diviseur Δ de ces facteurs : il faudra prendre pour Δ^2 tous les diviseurs carrés de N. Soit

$$N = a^\alpha b^\beta \ldots r^\rho s^\sigma \ldots,$$

les exposants α, β, ... étant impairs, les exposants ρ, σ, ... étant pairs; soit k le nombre des facteurs premiers distincts. Les diviseurs carrés Δ^2 sont les termes du produit

$$\begin{aligned}
&(1+a^2+a^4+\ldots+a^{\alpha-1})\\
\times&(1+b^2+b^4+\ldots+b^{\beta-1})\\
\times&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\times&(1+r^2+r^4+\ldots+r^{\rho-2}+r^\rho)\\
\times&(1+s^2+s^4+\ldots+s^{\sigma-2}+s^\sigma)\\
\times&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans les premiers facteurs, le nombre des termes est $\frac{\alpha+1}{2}$, $\frac{\beta+1}{2}$, ...; dans les derniers facteurs, en comptant à part le dernier terme, le nombre des termes est $\frac{\rho}{2}+1$, $\frac{\sigma}{2}+1$, ... Si, pour former un diviseur carré Δ^2, on n'emploie, comme facteur, aucun des termes r^ρ, s^σ, ..., où l'exposant est celui qui entre dans N, le quotient $\frac{N}{\Delta^2}$ a des facteurs premiers distincts en nombre k, et donne des décompositions en nombre 2^{k-1}; pour chaque facteur r^ρ, s^σ, ... introduit dans Δ^2, le nombre des facteurs premiers distincts du quotient $\frac{N}{\Delta^2}$ diminue d'une unité, et le nombre des décompositions, au lieu d'être 2^{k-1}, est seulement alors $2^{k-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots$. On trouve ainsi que le nombre total des décompositions de N est

$$n = 2^{k-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdots;$$

les derniers facteurs, s'il y en a trois, par exemple, ont pour produit

$$\frac{\rho}{2}\frac{\sigma}{2}\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\sum\frac{\rho}{2}\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{4}\sum\frac{\rho}{2}+\frac{1}{8},$$

ce qui rend compte de la formule. On a donc

$$n = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\rho+1)(\sigma+1)\ldots}{2}.$$

Toutefois, si le nombre N est un carré, quand on prend $\frac{N}{\Delta^2}=1$, le calcul précédent donne $2^{k-1}\times\frac{1}{2^k}$ ou $\frac{1}{2}$ comme nombre des solutions, au lieu de 1 qui est le nombre exact; le nombre total des décompositions est donc, pour ce cas exceptionnel,

$$n = \frac{(\rho+1)(\sigma+1)\ldots+1}{2}.$$

On retrouve bien le résultat indiqué au n° 1.

§ II. — Décomposition d'un nombre en une somme de deux carrés.

5. On appelle entiers imaginaires de Gauss les nombres de la forme $x+yi$, x et y étant entiers; ces entiers imaginaires ont les mêmes lois de divisibilité que les entiers ordinaires.

Sont premiers absolus dans le domaine considéré :

1° Les nombres premiers réels de la forme $4h-1$;

2° Le nombre $1+i$ dont la norme est égale à 2;

3° Les nombres $x+yi$, dont les normes sont les nombres premiers ordinaires de la forme $4h+1$.

6. La norme d'un nombre du domaine peut s'écrire

$$N = P^2 \times 2^p \times (a+a'i)^\alpha (a-a'i)^\alpha \times \ldots,$$

P étant un produit de facteurs premiers de la forme $4h-1$, les facteurs $a+a'i$, ... étant premiers, ou encore

$$N = P^2 \times 2^p \times A^\alpha \times B^\beta \times \ldots,$$

les nombres premiers A, B, ... étant de la forme $4h+1$.

Quand on cherche les solutions de l'équation

$$X^2 + Y^2 = N,$$

si l'on fait

$$p = 2p' + \pi \qquad (\pi = 0 \text{ ou } 1),$$

il faudra prendre

$$X = P \times 2^{p'} \times x, \qquad Y = P \times 2^{p'} \times y,$$

de sorte que l'on est ramené à résoudre

$$x^2+y^2 = N' = A^\alpha B^\beta \ldots \times 1 \quad \text{ou} \quad 2.$$

En ce qui concerne la présence du facteur 2, si l'on pose

$$N'' = A^\alpha B^\beta \ldots,$$

et si l'on a

$$N'' = x^2+y^2 = (x+yi)(x-yi),$$

on aura

$$\begin{aligned} 2N'' &= (x+yi)(1+i) \times (x-yi)(1-i) \\ &= (x-y)^2+(x+y)^2; \end{aligned}$$

à cause de

$$1-i = (1+i) \times -i, \qquad 1+i = (1-i)i,$$

on aura le même résultat en écrivant

$$2N'' = (x+yi)(1-i) \times (x-yi)(1+i);$$

il y a donc autant de décomposition du nombre $2N''$ que du nombre N'', et il suffit de considérer l'équation

$$x^2+y^2 = N'' = A^\alpha B^\beta \ldots.$$

7. Chacun des nombres premiers A, B, ... est d'une seule façon, somme de deux carrés; soit

$$N'' = (a^2+a'^2)^\alpha (b^2+b'^2)^\beta (c^2+c'^2)^\gamma;$$

on suppose a, a', ... positifs. Il sera entendu que l'on a fixé, *arbitrairement d'ailleurs,* l'ordre des deux carrés qui composent chaque facteur, et l'on s'interdira de modifier cet ordre; on doit, en effet, dans ce qui suit, remplacer $a^2+a'^2$ par $(a+a'i)(a-a'i)$, et faire jouer des rôles différents aux deux facteurs de ce produit; or, si l'on prenait a'^2+a^2, on aurait

$$(a'+ai)(a'+ai),$$

ce qui équivaudrait à échanger les rôles des deux facteurs.

Soit une décomposition du nombre N'' en un produit de deux facteurs; en désignant par Δ le plus grand commun diviseur des deux facteurs, on peut écrire, par exemple,

$$N'' = \Delta(a^2 + a'^2)^\lambda (b^2 + b'^2)^\mu \times \Delta(c^2 + c'^2)^\nu.$$

Écrivons alors, d'après une loi facile à saisir :

$$\begin{aligned} N'' = {} & \Delta(a + a'i)^\lambda (b + b'i)^\mu (c - c'i)^\nu \\ & \times \Delta(a - a'i)^\lambda (b - b'i)^\mu (c + c'i)^\nu; \end{aligned}$$

nous aurons

$$N'' = \Delta(p + qi) \times \Delta(p - qi) = (\Delta p)^2 + (\Delta q)^2 = P^2 + Q^2,$$

les deux nombres P et Q ayant Δ pour plus grand commun diviseur.

On a ainsi établi, entre les décompositions du nombre N'' *en produit de deux facteurs et les décompositions de ce nombre en somme de deux carrés, une correspondance* (1, 1), dépendant à la vérité de la façon dont on a fixé l'ordre des deux carrés, dans chacun des facteurs premiers $a^2 + a'^2$, ..., mais bien déterminée dès que cet ordre est fixé. Et cette correspondance est telle que *le plus grand commun diviseur des deux facteurs qui forment le produit* N'' *est aussi celui des deux nombres* P *et* Q, *dont les carrés ont pour somme* N''.

8. Pour $\Delta = 1$, on a les décompositions propres de N''. Si l'on se donne Δ, Δ^2 étant un diviseur de N'' (1^2 compris, N'' compris s'il y a lieu), on veut avoir

$$p^2 + q^2 = \frac{N''}{\Delta^2},$$

p et q premiers entre eux, c'est-à-dire que l'on a à chercher les décompositions du nombre $\frac{N''}{\Delta^2}$. Ce classement des solutions d'après Δ correspond au classement analogue des solutions du problème considéré tout d'abord.

9. Le nombre total des décompositions du nombre N'' en somme de deux carrés est égal, d'après ce qui précède, au nombre des décompositions du même nombre en un produit de deux facteurs, soit

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2},$$

si N'' n'est pas un carré, et

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots+1}{2},$$

si N'' est un carré, en acceptant la décomposition

$$N'' = (\sqrt{N''})^2 + 0^2.$$

Ces formules ont été données par Gauss. Lejeune-Dirichlet a donné, je crois, une autre forme au résultat, en considérant directement le nombre N. J'ignore si la correspondance établie ici a déjà été observée.

En supposant N'' différent de 1, le nombre des décompositions propres est 2^{k-1}, k étant le nombre des facteurs premiers distincts A, B, ...; par $N = 1$, on a la décomposition $1 = 1^2 + 0^2$. Le nombre des décompositions impropres, avec une valeur donnée de Δ, s'obtient d'une manière analogue, en considérant $\frac{N''}{\Delta^2}$, etc.

10. Voici un exemple de calcul numérique. Soit trouvé

$$5^n = p^2 + q^2;$$

on a

$$\begin{aligned}5^{n+1} &= (p+qi)(p-qi)(2+i)(2-i)\\ &= [(2p-q)+(p+2q)i]\times\ldots\\ &= (2p-q)^2+(p+2q)^2.\end{aligned}$$

En partant de $5 = 2^2 + 1^2$, on obtient les décompositions propres des puissances successives de 5, soit

$$2^2+1^2,\quad 3^2+4^2,\quad 2^2+11^2,\quad (-7)^2+24^2,\quad \ldots;$$

en ayant soin de garder le signe —, on aura ensuite

$$(-38)^2+(41)^2.$$

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE EN 1902 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. A. CAUSSÉ.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox *et* Oy, *on considère une courbe* C *telle que la tangente* MT *et la normale* MN *menées à cette courbe en un point* M *forment avec l'axe* Ox *un triangle* MNT *dont l'aire reste constante* (*et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné* a) *lorsque* M *décrit* C.

1° *Exprimer les coordonnées* x *et* y, *par rapport à* Ox *et* Oy, *d'un point* M *de la courbe* C *en fonction du coefficient angulaire* t *de la tangente en* M; *construire la courbe.*

2° *Exprimer ensuite les coordonnées* x *et* y *considérées en fonction* UNIFORME *d'un paramètre à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.*

3° *Calculer en fonction de* u *le rayon de courbure* *relatif au point* M *de la courbe* C *et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de* u.

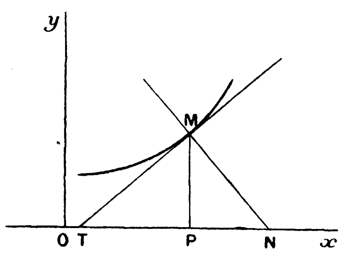
4° *Démontrer que, si l'on désigne par* M' *le centre de courbure de la courbe* C *relatif au point* M *et par* P *la projection de* M *sur* Ox, *l'aire du triangle* $M'NP$ *ne varie pas avec le point* M; *indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.*

5° *Calculer en fonction de* u *la longueur de l'arc de la courbe* C *compris entre un point donné* M_0 *et le point* M *correspondant à la valeur* u *du paramètre.*

6° *Soit* M *un point de la courbe* C *correspondant à la valeur* u *du paramètre et situé du même côté de l'axe* Ox *qu'un point donné* M_0 *de cette courbe; on suppose de plus que l'arc de la courbe* C *qui joint* M_0 *et* M *n'est pas rencontré, entre* M_0 *et* M, *par les portions* MP, M_0P_0 *des ordonnées de* M *et de* M_0 *limitées à l'axe* Ox; *calculer en fonction de* u *l'aire dont le contour est formé par la portion* PP_0 *de l'axe* Ox, *par les portions* MP, M_0P_0 *des ordonnées de* M *et de* M_0 *et par l'arc de la courbe* C *joignant les points* M_0 *et* M.

1. Soit P la projection de M sur Ox (*fig.* 1); en pre-

Fig. 1.



nant les points de rencontre avec Ox de la tangente en M,

$$Y - y = t(X - x),$$

et de la normale $Y - y = -\frac{1}{t}(X - x)$, on trouve

$$\overline{PT} = -\frac{y}{t}, \qquad \overline{PN} = ty,$$

$$\overline{TN} = \overline{PN} - \overline{PT} = ty + \frac{y}{t} = y\,\frac{t^2+1}{t}.$$

On a

$$\text{aire TMN} = \frac{1}{2}\,\text{TN} \times \text{PM} = \pm\frac{y^2}{2}\,\frac{t^2+1}{t};$$

l'équation du problème est

$$\pm y^2\,\frac{t^2+1}{t} = a^2.$$

On en déduit

$$\frac{y}{a} = \varepsilon\sqrt{\varepsilon'\,\frac{t}{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{a} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{dt}{\sqrt{4\varepsilon' t(t^2+1)}}$$

$$(\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1);$$

puis

$$dx = \frac{dy}{t}, \qquad \frac{dx}{a} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4\varepsilon' t(t^2+1)}}.$$

Premier cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$. — La réalité de x et y exige que t ne prenne que des valeurs positives.

Quand t augmente indéfiniment, $\frac{dx}{dt}$ tend vers o comme $\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$; donc x a une limite; choisissons la constante d'intégration de sorte que cette valeur limite soit nulle

$$\frac{x}{a} = \int_{\infty}^{t} \frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}.$$

Quand t tend vers o, $\frac{dx}{dt}$ augmente indéfiniment comme $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$; donc x augmente indéfiniment.

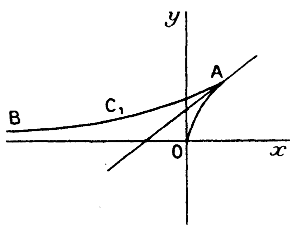
Voici le Tableau des variations de x et y quand t varie de $0 + \infty$:

$\dfrac{dy}{dx} = t \ldots$	0		1		$+\infty$
$\dfrac{dy}{dt} \ldots\ldots$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0
$y \ldots\ldots\ldots$	0	croît	$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	décroît	0
$\dfrac{dx}{dt} \ldots\ldots$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0
$x \ldots\ldots\ldots$	$-\infty$	croît	»	décroît	0

La branche de courbe représentative C_1 est asymptote à Ox et présente un rebroussement pour $t = 1$.

Les branches de courbe correspondant aux différentes valeurs de la constante d'intégration se déduisent de C_1 par des translations parallèles à Ox (*fig.* 2).

Fig. 2.



Deuxième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$. — En choisissant encore la constante d'intégration de sorte que $x = 0$ pour $t = +\infty$, on trouve pour x et y des expressions égales et de signes contraires à celles du premier cas; donc la branche représentative C_2 est symétrique de C_1 par rapport à l'origine.

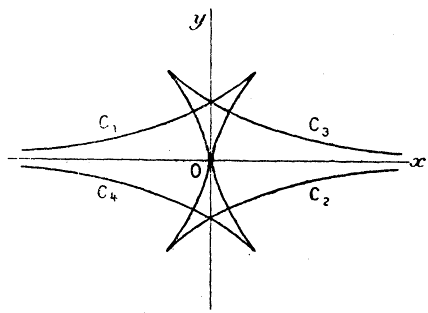
Troisième cas : $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$. — La variable t ne peut prendre que des valeurs négatives; par un choix convenable de la constante d'intégration, il vient

$$\frac{x}{a} = -\int_{-\infty}^{t} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{-4t(t^2+1)}},$$

$$\frac{y}{a} = \sqrt{-\frac{t}{t^2+1}}.$$

Je dis que la branche représentative C_3 est symétrique de C_1 par rapport à Oy (*fig.* 3). En premier lieu, le

Fig. 3.



point M_1 de C_1 correspondant à $t = t_0$ et le point M_3 de C_3 correspondant à $t = -t_0$ ont la même ordonnée

$$\sqrt{\frac{t_0}{t_0^2+1}};$$

en second lieu, si l'on fait dans l'intégrale définie qui donne l'abscisse de M_3,

$$-a\int_{-\infty}^{-t_0} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{4t(t^2+1)}},$$

le changement de variable de t en $-t$, on obtient

$$-a\int_{\infty}^{t_0} \frac{(1-t^2)\,dt}{t(1+t^2)\sqrt{4t(t^2+1)}},$$

c'est-à-dire l'abscisse de M_1 changée de signe.

Quatrième cas : $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$. — La branche représentative C_4 est symétrique de C_3 par rapport à l'origine.

Finalement, les quatre branches C_1, C_2, C_3, C_4 forment une courbe C admettant Ox et Oy pour axes de symétrie et toutes les courbes de l'énoncé se déduisent de C par des translations parallèles à Ox.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que la branche C_1.

2. Posons

$$u = -\int_{+\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}};$$

la quantité sous le radical étant de la forme

$$4t^3 - g_2 t - g_3$$

($g_2 = -4$, $g_3 = 0$; racines $e_1 = i$, $e_2 = 0$, $e_3 = -i$), l'inversion de cette intégrale elliptique donne

$$t = \wp(u; -4, 0);$$

quand t varie de 0 à $+\infty$, u décroît de

$$u + \omega + \omega' = u + \omega_2 \quad \text{à} \quad 0.$$

y et x s'expriment en fonction uniforme de u :

$$\frac{y}{a} = \sqrt{\frac{t}{t^2+1}} = \sqrt{\frac{\wp u - e_2}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)}} = \frac{\dfrac{\sigma_2}{\sigma}}{\dfrac{\sigma_1}{\sigma}\,\dfrac{\sigma_3}{\sigma}} = \frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3},$$

ou encore

$$\frac{y}{a} = \frac{2t}{\sqrt{4t(t^2+1)}} = 2\,\frac{\wp u}{-\wp' u}.$$

En décomposant $\dfrac{1-t^2}{t(1+t^2)}$ en fractions simples, il vient

$$\frac{dx}{a} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right) \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}$$
$$= \left(\frac{1}{pu - e_2} + \frac{1}{pu - e_1} + \frac{1}{pu - e_3}\right) du.$$

Or, la formule

$$p(u + \omega_\lambda) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{pu - e_\lambda},$$

où λ, μ, ν représentent les nombres 1, 2, 3 rangés dans un ordre quelconque, donne

$$\int \frac{du}{pu - e_\lambda} = -\frac{\zeta(u + \omega_\lambda) + e_\lambda u}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} + \text{const.}$$

Appliquons aux trois cas différents :

$$\int \frac{du}{pu - e_1} = \frac{\zeta(u + \omega) + iu}{2} + \text{const.},$$
$$\int \frac{du}{pu - e_2} = -\zeta(u + \omega + \omega') + \text{const.},$$
$$\int \frac{du}{pu - e_3} = \frac{\zeta(u + \omega') - iu}{2} + \text{const.}$$

Il en résulte

$$\frac{x}{a} = \left(\zeta(u + \omega + \omega') + \frac{\zeta(u + \omega) + \zeta(u + \omega')}{2}\right)_0^u$$
$$= -\zeta(\omega + \omega') + \zeta(u + \omega + \omega')$$
$$+ \frac{-\zeta(\omega) + \zeta(u + \omega)}{2} + \frac{-\zeta(\omega') + \zeta(u + \omega')}{2}.$$

On peut transformer cette expression à l'aide de la formule

$$\zeta(u + v) - \zeta v = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

où l'on fait $v = \omega_\lambda$,

$$\zeta(u + \omega_\lambda) - \zeta(\omega_\lambda) = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_\lambda};$$

il vient

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= 2\zeta u + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u}{pu - e_1} + \frac{p'u}{pu - e_3} + 2\frac{p'u}{pu - e_2}\right)\\ &= 2\zeta u + \frac{2p'u(2p^2u + 1)}{4pu(p^2u + 1)}\\ &= 2\zeta u + \frac{2(2p^2u + 1)}{p'u}.\end{aligned}$$

Les expressions définitives de x et y en fonction uniforme de u sont, débarrassées de tout symbole imaginaire,

$$x = 2a\left(\zeta u + \frac{2p^2u + 1}{p'u}\right) \quad (^1),$$

$$y = a\frac{\sigma\sigma_2}{\sigma_1\sigma_3} = -2a\frac{pu}{p'u};$$

de plus y est une fonction elliptique de u.

3. Soit R le rayon de courbure relatif au point M

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dt}{dx}} = (1 + t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}\,\frac{1 - t^2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçons, dans cette expression, t par

$$pu - e^2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2:$$

$$R = \frac{a}{2}\,\frac{1 - \frac{\sigma_2^4 u}{\sigma^4 u}}{\frac{\sigma_2^3 u}{\sigma^3 u}} = \frac{a}{2}\,\frac{\sigma^4 - \sigma_2^4}{\sigma\sigma_2^3}.$$

---

(1) L'expression

$$\frac{x}{2a} = \zeta u + \frac{2pu\,p'u}{4(p^2u + 1)} + \frac{p'u}{2pu},$$

est toute préparée pour l'intégration.

Si l'on veut mettre les zéros en évidence au numérateur, on détermine un argument u_1 tel que $\wp u_1 = 1$, et un autre u_2 tel que $\wp u_2 = -1$, et l'on exprime $\wp u - \wp u_1$ et $\wp u - \wp u_2$ au moyen de la fonction σ

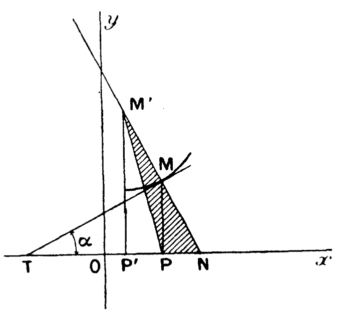
$$R = \frac{a}{2} \frac{1 - \wp^2 u}{\dfrac{\sigma_2^3 u}{\sigma^3 u}}$$

$$= -\frac{a}{2} \frac{\sigma(u - u_1)\,\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_2)\,\sigma(u + u_2)}{\sigma^2 u_1\,\sigma^2 u_2\,\sigma_2^3 u\,\sigma u}.$$

De toutes manières, R s'exprime en fonction uniforme, mais non elliptique, de u; on voit aisément que c'est une fonction aux multiplicateurs constants -1 et -1.

4. Si α désigne l'angle que fait avec Ox (*fig.* 4), la

Fig. 4.



tangente menée dans le sens des t croissants, l'ordonnée de M'

$$\overline{P'M'} = y + R\cos\alpha$$

$$= a\sqrt{\frac{t}{t^2+1}} + \frac{a}{2}\,\frac{1-t^2}{t^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = a\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{2\,t^{\frac{3}{2}}}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\text{aire } M'NP &= \quad \frac{1}{2} PN \times P'M' \\ &= \pm \frac{1}{2} ty \times \overline{P'M'} \\ &= \pm \frac{1}{2} ta \sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\, a \frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

L'aire M'NP est bien constante et sa valeur est $\frac{a^2}{4}$.

5. Si s désigne l'arc de la courbe compté positivement dans le sens des t croissants, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (t^2+1)\,dx^2,$$

$$\frac{ds}{a} = \pm \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} \frac{dt}{\sqrt{4t}} = \pm \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1}\right) \frac{dt}{\sqrt{4t}};$$

on doit prendre le signe $+$ quand $t < 1$, et le signe $-$ quand $t > 1$.

On est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle en posant $t^2 = \theta$. Mais il est aussi simple de tout exprimer en fonction de u :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{a} &= \pm \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}} \\ &= \pm \left(\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2} - 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\right) du.\end{aligned}$$

En premier lieu,

$$\int \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2}\, du = \frac{\sigma}{\sigma_2} + \text{const.}$$

Tout revient à calculer $\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\, du$; or les relations

$$(1) \qquad \frac{\sigma_1^2}{pu - e_1} = \frac{\sigma_2^2}{pu - e_2} = \frac{\sigma_3^2}{pu - e_3} = \frac{\sigma^2}{1}$$

ou

$$\frac{\sigma_1^2}{pu - i} = \frac{\sigma_2^2}{pu} = \frac{\sigma_3^2}{pu + i} = \frac{\sigma^2}{1}$$

donnent

$$2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2,$$

de sorte que

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \int \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,du + \int \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\,du.$$

On voit aisément que la dérivée logarithmique de $\sqrt{e_3 - e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ est $\sqrt{e_3 - e_2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, et que celle de $\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ est $\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$; il vient donc, en remplaçant e_1, e_2 et e_3 par leurs valeurs,

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \frac{1}{\sqrt{-i}}\log\frac{\sqrt{-i}\,\sigma + \sigma_1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sqrt{i}}\log\frac{\sqrt{i}\,\sigma + \sigma_2}{\sigma_1} + \text{const.}$$

Les relations $\sigma_3^2 = \sigma_2^2 + i\sigma^2$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 - i\sigma^2$ fournies encore par les relations (1) permettent de transformer cette expression

$$\int \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}\,du = \frac{1}{2\sqrt{-i}}\log\frac{\sigma_2 + \sqrt{-i}\,\sigma}{\sigma^2 - \sqrt{-i}\,\sigma} + \frac{1}{2\sqrt{i}}\log\frac{\sigma_2 + \sqrt{i}\,\sigma}{\sigma_2 - \sqrt{i}\,\sigma} + \text{const.}$$

$$= \sqrt{-i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\,\sigma} + \sqrt{i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\,\sigma} + \text{const.}$$

Finalement

$$\text{arc}\,M_0M = \pm\left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \sqrt{-i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{i}\,\sigma} - \sqrt{i}\,\text{arc tang}\,\frac{\sigma_2}{\sqrt{-i}\,\sigma}\right)_{u=u_0}^{u}.$$

On est conduit précisément à cette expression en intégrant par les fractions rationnelles et en exprimant ensuite en fonction de u.

L'application de cette formule donne lieu aux remarques suivantes. Désignons par A le point de rebroussement ($t = 1$) :

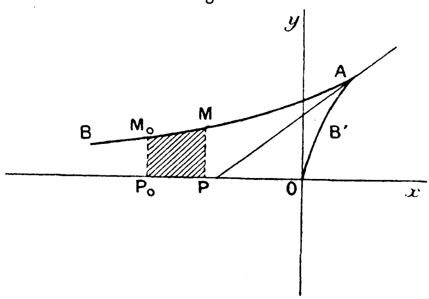
1° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche infinie AB, on doit prendre le signe — devant le second membre ;

2° Si M_0 et M sont situés tous deux sur la branche AB′O, on prendra le signe + ;

3° Si l'un des deux points est situé sur la branche AB et l'autre sur la branche AB′O, on calculera séparément arc M_0A et arc MA.

6. Les conditions auxquelles M_0 et M sont assujettis par l'énoncé reviennent à ceci : M_0 et M (*fig.* 5) sont

Fig. 5.



situés tous deux sur la branche AB, ou tous deux sur l'arc AB′O :

$$\text{aire } P_0M_0MP = \pm\int y\,dx$$

$$= \pm\int a\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\,\frac{a}{2}\,\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}\,\frac{dt}{\sqrt{4t(t^2+1)}}$$

$$= \pm\frac{a^2}{4}\int\frac{1-t^2}{t(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \pm\frac{a^2}{8}\int\frac{(1-\theta)\,d\theta}{\theta(\theta+1)^2},$$

par le changement de variable $t^2 = \theta$.

Décomposons $\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2}$ en fractions simples :

$$\frac{1-\theta}{\theta(\theta+1)^2} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1} - \frac{2}{(\theta+1)^2}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\text{aire } P_0 M_0 MP &= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log \frac{\theta}{\theta+1} + \frac{2}{\theta+1}\right) + \text{const.} \\
&= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log \frac{p^2 u}{p^2 u+1} + \frac{2}{p^2 u+1}\right)_{u_0}^{u} \\
&= \pm \frac{a^2}{8}\left(\log \frac{\sigma_2^4 u}{\sigma_1^2 \sigma_3^2} + \frac{2\sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2}\right)_{u_0}^{u} \\
&= \pm \frac{a^2}{4}\left(\log \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_3} + \frac{\sigma^4}{\sigma_1^2 \sigma_3^2}\right)_{u_0}^{u}.
\end{aligned}$$

[O6h]

RECHERCHE GÉOMÉTRIQUE DE LA SURFACE GAUCHE MINIMA;

PAR M. A. LOCHARD.

---

1. Je me propose d'établir que la solution de ce problème peut être obtenue par des considérations de Géométrie infinitésimale pure.

Les deux familles de lignes asymptotiques de toute surface minima forment un réseau orthogonal.

Cette proposition, que je prendrai comme point de départ, résulte de ce que la courbure moyenne des surfaces minima est nulle, et cette dernière propriété peut elle-même être déduite par la Géométrie infinitésimale de la propriété fondamentale qui a valu leur nom à ces surfaces [1].

---

[1] *Voir* H. POINCARÉ, *Théorie de la Capillarité.* On trouvera également dans cet Ouvrage la démonstration géométrique de la constance de l'angle de raccordement des surfaces minima, et une belle étude géométrique des surfaces de révolution à courbure moyenne constante.

Les génératrices rectilignes d'une surface gauche minima, qui constituent les lignes asymptotiques de la première famille, sont donc normales aux lignes asymptotiques de la seconde famille. Or le plan osculateur à une ligne asymptotique est le plan tangent à la surface. Donc le problème proposé équivaut au suivant :

Trouver une famille de courbes gauches ayant les mêmes normales principales.

2. Je m'appuierai sur les propositions suivantes de la théorie des courbes parallèles dans l'espace ou sur la sphère, qu'on démontre aisément en Géométrie cinématique :

Étant donnée une famille de droites dans l'espace ou de grands cercles sur la sphère :

1° *Le lieu des extrémités des segments de longueur constante portés sur ces droites ou sur ces cercles à partir d'une de leurs trajectoires orthogonales est encore une de leurs trajectoires orthogonales.*

2° *Réciproquement, des segments égaux sont interceptés sur ces droites ou sur ces cercles par deux de leurs trajectoires orthogonales.*

3. Je rappellerai en outre qu'on nomme *indicatrice sphérique* d'une courbe gauche C le lieu Γ des points où une sphère de rayon 1 est percée par les droites menées par son centre parallèlement aux tangentes à C.

La tangente à Γ est évidemment parallèle à la normale principale au point correspondant de C.

4. Je puis maintenant démontrer les deux lemmes suivants, dus à J. Bertrand :

Lemme I. — *Lorsque deux courbes ont les mêmes normales principales, l'angle de leurs plans osculateurs en deux points situés sur la même normale est constant.*

En effet, les tangentes à leurs indicatrices sphériques aux points correspondants sont parallèles, et perpendiculaires au plan de l'arc de grand cercle qui joint ces deux points. Donc (n° 2), cet arc de grand cercle, qui mesure précisément l'angle des plans osculateurs, est constant. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Lorsque trois courbes ont les mêmes normales principales, ces droites sont les normales principales d'une quelconque de leurs trajectoires orthogonales.*

Soient M, M′, M″, N les points des trois courbes et d'une trajectoire orthogonale quelconque de leurs normales principales situés sur la même normale G. Les distances réciproques de M, M′, M″, N sont constantes quelle que soit G (n° 2); or, les plans tangents, aux trois points M, M′, M″, à la surface gauche lieu de G font entre eux des angles constants (lemme I); donc le paramètre de distribution des plans tangents à cette surface suivant une génératrice G est constant : donc le plan tangent en N fait un angle constant avec les plans tangents en M, M′, M″.

Les indicatrices sphériques (m), (m'), (m'') des courbes (M), (M′), (M″) sont parallèles (lemme I); le point n, correspondant à N, de l'indicatrice sphérique (n) de la courbe (N) est situé sur l'arc de grand cercle $mm'm''$ normal à $(m)\,(m')\,(m'')$, et, d'après ce que je viens de démontrer, à une distance constante de m, m' et m''. Donc (n) est parallèle à (m), (m'), (m'') (nº 2), et par suite G est la normale principale de (N).

C. Q. F. D.

5. Théorème III. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes.*

En effet, d'après la constance du paramètre de distribution des plans tangents (lemme II), le point central sur chaque génératrice est à une distance constante du point, situé sur la même génératrice, d'une trajectoire orthogonale quelconque des génératrices. D'où résulte la proposition (nº 2).

Théorème IV. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une ligne asymptotique de la surface.*

Ou :

Son plan osculateur est tangent à la surface.

C'est un corollaire immédiat du lemme II et du théorème III.

Théorème V. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une ligne géodésique de la surface.*

Ou :

Son plan osculateur est normal à la surface.

Soient

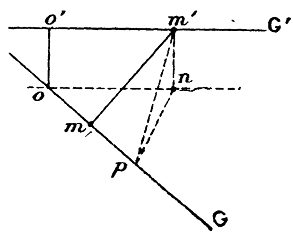
G, G' deux génératrices rectilignes infiniment voisines;
OO' leur perpendiculaire commune;

m et m' les points, infiniment voisins de O et de O′, où elles rencontrent la ligne de striction;

n le pied, sur le plan mené par G parallèlement à G′, de la parallèle à OO′ menée par m';

$m'p$ la perpendiculaire à G′, qui rencontre G.

Laissons indéterminé l'infiniment petit principal. Soient α, β, γ les ordres respectifs des segments $O'm'$ et OO′ et de l'angle nOp. Les angles Onp et $m'np$ étant



droits, np est de l'ordre $\alpha + \gamma$ et par suite l'angle $nm'p$ de l'ordre $\alpha + \gamma - \beta$: $\alpha + \gamma - \beta$ est positif, car si γ était inférieur à β, l'angle npm' serait infiniment petit d'ordre $\beta - \gamma$ au moins quelle que soit la position du point m' sur G, et par suite la surface serait développable, hypothèse inadmissible. Dès lors les angles $mm'p$ (théorème III) et $nm'p$ étant infiniment petits, il en est de même de l'angle $mm'n$. Donc, en passant à la limite :

La tangente à la ligne de striction coïncide avec la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines.

La considération du cône directeur de la ligne de striction et du cône supplémentaire montre alors qu'inversement une génératrice rectiligne est perpendiculaire au plan osculateur de la ligne de striction.

C. Q. F. D.

Théorème VI. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une droite.*

C'est un corollaire immédiat des théorèmes IV et V : le plan osculateur est nécessairement indéterminé en tous les points de cette ligne.

Théorème VII. — *Toute surface gauche minima est une surface de vis à filet carré.*

En effet, d'après les théorèmes III et VI, c'est un conoïde droit. En outre, d'après la constance du paramètre de distribution, les lignes asymptotiques de la seconde famille sont des courbes, tracées sur des cylindres de révolution autour de la droite de striction, et dont les tangentes font un angle constant avec cette droite; ce sont donc des hélices, d'où, etc.

C. Q. F. D.

A PROPOS DE LA QUESTION 1933;

Par M. R. GILBERT.

Considérons dans un plan deux droites Ox, Oy et deux courbes C, C_1; menons deux tangentes communes AB, A'B' qui se coupent en M et soient P, P' les milieux des segments AB, A'B' compris entre les deux droites Ox, Oy. Lorsque les deux courbes C, C_1 sont tangentes en M, les points P, P' coïncident; on en conclut que les courbes S, S_1 lieux des milieux des segments déterminés sur les tangentes à C et C_1 par les droites Ox, Oy sont aussi tangentes.

En particulier, supposons que C soit une parabole tangente aux droites Ox, Oy, le lieu S des points P milieux des segments AB des tangentes à C est une droite, Δ, tangente à C au point de rencontre, Q, avec le diamètre du point O. En effet, toute tangente AB à C coupe quatre tangentes fixes Ox, Oy, Δ et la droite de l'infini en quatre points dont le rapport harmonique est constant. Or, si AB se confond avec Δ, ce rapport est harmonique.

Cela étant, si la parabole C varie en restant tangente à une courbe C_1, l'enveloppe de Δ est la courbe S_1 lieu des milieux P_1 des tangentes à C_1 comprises entre Ox et Oy.

En particulier, si les droites Ox, Oy sont rectangulaires, le foyer F de la parabole C décrit une courbe homothétique dans le rapport $\frac{2}{1}$ à la podaire de S_1 par rapport au point O.

Exemples :

1° La courbe C_1 se réduit à un point Q, le lieu du point P_1 est une hyperbole équilatère qui passe en O et dont le centre est au milieu de OQ. Le lieu du foyer est la podaire de cette hyperbole.

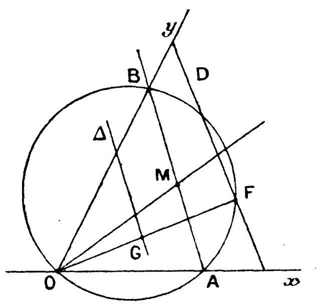
2° La courbe C_1 est une conique tangente à Ox, Oy; les points A et B décrivent des divisions homographiques sur Ox, Oy et la courbe S_1 est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à Ox, Oy et passent au centre de la conique C_1. Plus particulièrement, si C_1 est un cercle tangent à Ox, Oy, on en conclut que O est le foyer de l'hyperbole équilatère S_1. Le lieu du foyer de la parabole C est alors un cercle.

3° La courbe C_1 est une hypocycloïde quadrangulaire d'axes Ox, Oy; la courbe S_1 est un cercle de centre O.

4° La courbe C_1 est une hypocycloïde triangulaire tangente à Ox, Oy. La courbe S_1 est un cercle qui passe en O et le lieu du foyer de C une cardioïde.

Revenons au cas général où l'angle xOy est quelconque. Soit AB la tangente à la parabole C au point de rencontre M avec le diamètre de C qui passe en O ; le foyer F de C est à l'intersection du cercle circonscrit au triangle OAB avec la symédiane OF relative à l'angle O du triangle (*fig.* 1); nous allons chercher

Fig. 1.

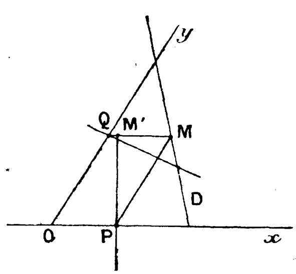


l'enveloppe de la droite D perpendiculaire à OF en F.

Pour cela, considérons la transformation suivante :

On donne un angle xOy; à un point M on fait correspondre le point M' de rencontre des perpendiculaires PM', QM' à Ox, Oy (*fig.* 2) aux points P, Q où

Fig. 2.



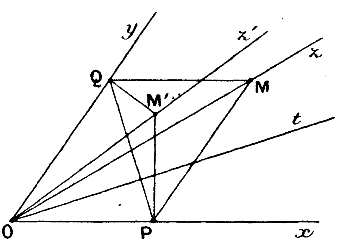
les parallèles MP, MQ à Oy, Ox coupent Ox, Oy.

Il est évident que la transformation est birationnelle;

elle est homographique; car, lorsque M décrit une droite D, les points P, Q décrivent sur Ox, Oy deux divisions homographiques, les points à l'infini se correspondant. Donc, les faisceaux PM′, QM′ dont les sommets sont à l'infini sont homologiques et le lieu de M′ est une droite D′.

A une droite quelconque Oz passant en O correspond une droite Oz' que nous allons définir. On sait qu'étant données deux droites Oz', Ot (*fig.* 3) également

Fig. 3.



inclinées respectivement sur Ox, Oy (isogonales dans l'angle xOy), si d'un point M′ de Oz' on abaisse les perpendiculaires M′P, M′Q sur Ox, Oy, la droite PQ est perpendiculaire à Ot. Or PQ est, en direction, conjuguée de OM par rapport à Ox, Oy.

On en conclut que Oz' est l'isogonale de la perpendiculaire à la conjuguée de Oz, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire à l'isogonale de la conjuguée de Oz.

On voit donc (*fig.* 1) qu'à la droite AB correspond une perpendiculaire à OF; mais au milieu M de AB correspond le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc à la droite AB correspond le diamètre du cercle perpendiculaire à OF.

Si AB enveloppe une courbe S_1, ce diamètre, Δ, enveloppe une courbe transformée homographique de S_1, soit Σ_1, et le lieu du foyer est la podaire d'une courbe homothétique à Σ_1 dans le rapport $\frac{2}{1}$.

En particulier, le lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et passant par un point fixe est la podaire d'une hyperbole par rapport à un de ses points.

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et à une conique tangente à ces droites est la podaire d'une hyperbole.

CORRESPONDANCE.

M. **E.-B. Escott**. — *Sur les facteurs de* $10^n - 1$. — Dans le Tome XV des *Nouvelles Annales* (3e série, 1896, p. 222-227) se trouve une Table des facteurs de $10^n - 1$ donnée par M. B.-E. Bickmore. En comparant cette Table avec celle de E. Lucas dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1886, p. 160), nous trouvons que l'on a

$$10^{17} - 1 = 3^2.2071723.5363222357.$$

Lucas affirme que la décomposition de $10^n - 1$ est complète pour les valeurs $n = 19, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41$. Il s'est trompé dans cette affirmation puisque $10^{25} - 1$ contient le facteur 25601 et $10^{29} - 1$ le facteur 62003 qu'il a omis.

Dans la décomposition de $10^{29} - 1$ de la Table de M. Bickmore il y a une erreur d'impression. Au lieu de 43031 il faut lire 43037.

Enfin je signale que dans les *Archiv der Mathematik und Physik*, de Grünert (28 janvier 1902), se trouve une continuation de la Table de Bork par H. Hertzer, donnant le nombre des figures dans la période de la fraction décimale $\frac{1}{p}$ jusqu'à $p = 111229$.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

Caen.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *trouver le lieu* S *d'une circonférence qui s'appuie sur* OZ *tandis que son plan reste parallèle à* OXY *et que son centre décrit la droite* $y=0$, $x+z=a$. *Calculer le volume* V *compris entre les parties positives des plans coordonnés, le plan* $x=a$ *et la surface* S. *Lignes de plus grande pente de* S *par rapport au plan des* xy.

II. *Une barre* OP, *très mince, homogène, de longueur* $2l$, *peut tourner dans un plan* H *autour de l'extrémité* O *qui est fixe; chacun de ses éléments est attiré vers un point* A *du plan* H *avec une force égale au produit d'une constante* ω^2 *par la masse de l'élément et par sa distance au point* A; OA *est égal à* $\frac{2}{3}l$. *A l'instant initial, l'angle* POA *est droit et la barre animée d'une vitesse angulaire* ω *de sens tel que l'angle* POA *commence par croître. Déterminer le mouvement de la barre.*

III. Épreuve pratique. — *Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage du Soleil au périgée jusqu'à l'instant où son ascension droite est de* 225°.

Solutions.

(I). S est un cône, $x^2+y^2-2(a-z)x=0$.

V est égal à $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{9}\right)a^3$.

Les lignes de pente se projettent sur OXY suivant des cercles touchant OY à l'origine.

(II). Si $\mathrm{POA} = \theta$, on a

$$\frac{4}{3} l^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2 \right) = \frac{4}{3} l^2 \omega^2 \cos\theta, \qquad \omega\, dt = \frac{d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

(Juillet 1901.)

I. *Trouver une surface de révolution telle qu'en un quelconque de ses points* M, *un des centres principaux de courbure soit à la même distance de l'axe que* M. *Considérant la portion de surface comprise entre les plans tangents en deux de ses points de rencontre consécutifs avec l'axe, calculer son aire* A *et le volume* V *qu'elle limite.*

II. *Mouvement d'un point pesant sur un cône à axe vertical, dont la base, de rayon a, est à une distance a au-dessous du sommet : à l'instant initial, la vitesse est horizontale et égale à $2\sqrt{ga}$, le mobile étant à la distance $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ du sommet.*

III. Épreuve pratique. — *Calculer la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon d'un point dont la latitude est boréale et égale à 47°29′, le jour du solstice d'été, l'heure sidérale étant de* $11^h 25^m$: *l'obliquité de l'écliptique est* 23°27′.

Solutions.

(I). La méridienne est une cycloïde : a étant le rayon du cercle générateur, on a

$$\mathrm{A} = \frac{64}{3} \pi a^2, \qquad \mathrm{V} = 5\pi^2 a^3.$$

(II). Projection horizontale de la trajectoire

$$d\psi = \frac{a\sqrt{2a}\, dr}{r(r+a)\sqrt{2r-a}}.$$

(Novembre 1901.)

I. *Une droite* MP, *de longueur donnée, se meut dans un plan en restant tangente à la trajectoire* (C) *de son extrémité* M :

1° *Prouver que la normale en* P *à la trajectoire* (T) *du point* P *passe au centre de courbure de* (C) *en* M;

2° *Déterminer* (C) *de manière que* (T) *soit une droite* Δ : *construire et rectifier la courbe trouvée* (Γ);

3° *Montrer qu'en un point quelconque de la surface* S *engendrée par la révolution de* Γ *autour de* Δ, *le produit des rayons de courbure principaux est constant; reconnaître que* S *et la sphère ne sont pas les seules surfaces de révolution qui jouissent de cette propriété.*

II. *Mouvement d'une barre pesante et homogène dont les extrémités glissent sans frottement sur une hélice coupant sous un angle de* 45° *les génératrices d'un cylindre à axe vertical : la vitesse initiale est nulle.*

III. Épreuve pratique. — *Calculer l'heure moyenne à midi vrai, le jour du solstice d'été* ($1^{m}35^{s}$).

(Juillet 1902.)

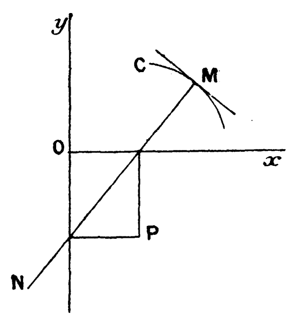
Lyon.

I. *Mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant, quand la résistance dépend de la vitesse seule, suivant une loi donnée.*

II. *Intégrer*

$$(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy.$$

III. *La normale* MN, *en* M, *à la courbe* C *définit, par la construction indiquée sur la figure, le point* P.



Quel est le lieu $\overline{\mathrm{P}}$ *de* P *lorsque la courbe* C, *parcourue par* M, *est la parabole*

$$y^2 = 2px\,?$$

SOLUTIONS.

On ne donnera la solution que de III. Les problèmes I et II sont des applications immédiates du cours.

La normale MN au point $M(x, y)$ a pour équation

$$(u - x)\,dx + (v - y)\,dy = 0.$$

Faisons successivement $v = 0$ et $u = 0$, on a, pour les coordonnées de P,

$$u = x + \frac{y\,dy}{dx}, \qquad v = y + \frac{x\,dx}{dy}.$$

Pour la parabole, tout calcul fait, il vient

$$u = x + p, \qquad v = \frac{xy}{p},$$

c'est-à-dire

$$pv^2 = (u - p)^3,$$

pour le lieu $\overline{P}$. C'est une cissoïde facile à construire.

(Novembre 1902.)

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de la réflexion totale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le phénomène de la réflexion totale, les petits déplacements vibratoires de l'éther, produits sur la surface réfléchissante, sont décroissants aux diverses distances x de cette surface, comme l'exponentielle*

$$e^{-\frac{2\pi x}{\tau\omega}\sqrt{\sin^2 i - N^2}}$$

où τ est la période de vibration, ω la vitesse de propagation de la lumière au-dessus de la surface, N *l'indice de réfraction et i l'angle d'incidence.*

On demande à quelle fraction de leur valeur à la sur-

face sont réduits ces DÉPLACEMENTS, *aux distances respectives $x = \tau\omega$ et $x = 2\tau\omega$ de* UNE *et* DEUX *longueurs d'onde, quand l'indice* N *de réfraction est $\frac{2}{3}$, ce pour une incidence $i = 75^{\circ}$.*

On a

$$e = 2,71828, \qquad \pi = 3,14159.$$

(Juillet 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1951.

(1902, p. 576.)

Trouver les courbes telles que la distance de l'origine à la tangente soit proportionnelle à la normale limitée à l'axe. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. H. AMSTEIN.

Si les coordonnées sont rectangulaires, la distance de l'origine à la tangente au point (x, y) à une des courbes cherchées est donnée par l'expression

$$\frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}$$

et la normale au même point par

$$y\sqrt{1 + p^2},$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle des courbes demandées est ainsi

$$(1) \qquad y - px = my(1 + p^2),$$

où m signifie un nombre réel quelconque.

Pour l'intégrer, on la différentie d'abord, ce qui donne

$$dy - p\,dx - x\,dp = m(1 + p^2)\,dy + 2mpy\,dp.$$

Afin de débarrasser cette dernière équation de la variable x, on y remplacera x par sa valeur tirée de (1), et dx par $\frac{dy}{p}$. Il vient, tous calculs faits,

$$\frac{dy}{y} = \frac{m - 1 - mp^2}{mp(1+p^2)}\,dp.$$

L'intégration de cette équation différentielle n'offre aucune difficulté, et l'on obtient immédiatement

$$\log\frac{y}{C} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\log p + \frac{1-2m}{2m}\log(1+p^2),$$

d'où, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(2) \qquad y = Cp^{1-\frac{1}{m}}(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}.$$

La valeur correspondante de x est fournie par (1). Elle est

$$(3) \qquad x = \frac{C(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}[1 - m(1+p^2)]}{p^{\frac{1}{m}}}.$$

Les équations (2) et (3), dans leur ensemble, constituent l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Elles sont, en effet, une représentation paramétrique des courbes cherchées. En y substituant $p = \tang\alpha$, elles prennent la forme

$$x = C\frac{\cos^2\alpha - m}{(\sin\alpha)^{\frac{1}{m}}},$$

$$y = C(\sin\alpha)^{1-\frac{1}{m}}\cos\alpha.$$

Cas particuliers :

a. Pour $m = 1$ on obtient la circonférence

$$x = -C\sin\alpha,$$
$$y = C\cos\alpha \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = C^2.$$

b. La valeur $m = -1$ conduit aux équations

$$x = C\sin\alpha(1 + \cos^2\alpha),$$
$$y = C\sin^2\alpha\cos\alpha$$

ou bien à l'équation unique qu'on en tire par l'élimination de α

$$(x^2+y^2)^3 - C^2(x^4+20x^2y^2-8y^4)+16C^4y^2=0.$$

La courbe du sixième degré représentée par cette équation a quatre points de rebroussement de première espèce dont les coordonnées sont respectivement

$$x=\pm\frac{4}{9}\sqrt{6}\,C, \qquad y=\pm\frac{2}{9}\sqrt{3}\,C,$$

et les coefficients angulaires des tangentes en ces points sont respectivement

$$\operatorname{tang}\alpha=\pm\sqrt{2}.$$

c. Pour $m=\frac{1}{2}$ la courbe cherchée est la parabole

$$x = C\,\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$y = C\cos 9\alpha = C\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$$

ou

$$y^2 = 2C\left(x+\frac{1}{2}C\right).$$

Autres solutions par MM. BARISIEN et COUVERT.

QUESTIONS.

1966. Soit a un nombre positif donné, on pose

$$u = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}, \qquad u_1=\frac{u}{(1-u)^a}, \qquad u_2=\frac{u}{(1-u_1)^a},$$

$$u_3=\frac{u}{(1-u_2)^a}, \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad u_n=\frac{u}{(1-u_{n-1})^a}.$$

Démontrer que pour n infini

$$\lim u_n = \frac{1}{a+1}.$$

(MAILLARD.)

1967. Soient AIB une corde d'un cercle, AJB un des arcs sous-tendus, I et J étant les points milieux; M étant un point quelconque de la corde AB, élevons par ce point une perpendiculaire sur cette corde; elle va rencontrer une des cordes AJ ou JB en un point M_1, AJ si $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$ et JB si $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$. Procédant sur la corde qui comprend M_1, comme tantôt sur AB et M, on obtient un point M_2. On obtient ainsi une suite de points M_1, M_2, ..., M_n qui ont pour limite un point de l'arc AJB, le partageant dans le rapport $\frac{AM}{AB}$. On demande les coordonnées du point M_n. (A. PELLET.)

1968. Sur toute normale à une conique, le pied de cette normale, le centre de courbure, le point de Frégier et le milieu du segment limité à la conique forment une division harmonique.

Corollaire I. — Les normales sur lesquelles le point de Frégier coïncide avec le centre de courbure sont inclinées à 45° sur les axes.

Corollaire II. — En tout point d'une hyperbole équilatère, le rayon de courbure est égal et de sens contraire au demi-segment de la normale limitée à l'hyperbole.

Corollaire III. — En un ombilic d'une quadrique les points de Frégier de toutes les sections normales sont coïncidents.

(M. D'OCAGNE.)

ERRATA.

Dans le Mémoire de M. R. Gilbert : *Mouvement initial d'un solide invariable* (*Nouv. Ann.*, décembre 1902, p. 562-564), la solution donnée n'a pas toute la généralité qui lui est attribuée.

Voici comment il faut corriger le texte :

2° La force F est située dans un plan principal d'inertie.

3° Le système donné est supposé équivalent au système de deux forces F_1 et F_2, la première passant par le centre de gravité G, la seconde située dans un plan principal d'inertie.

[D]

SUR LES FONCTIONS ADMETTANT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE DONNÉ ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ [1];

PAR M. E. IAGGI.

Soit G un groupe de substitutions à une variable. Supposons qu'il existe des fonctions complètes uniformes de groupe G; si $y=f(x)$ est l'une d'elles, toutes les autres fonctions uniformes du groupe sont

$$\frac{\lambda y+\mu}{\nu y+\rho} \tag{1}$$

et les substitutions $s_n(x)$, dont le groupe G est alors discontinu, sont les racines de l'équation

$$f(x)=f(s) \tag{2}$$

et en sont racines simples. Soit

$$y=f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}, \tag{3}$$

où a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois, et où les deux termes de la fraction du second membre sont des fonctions *entières* mises sous forme de séries convergentes.

L'équation aux substitutions peut s'écrire

$$y=f(x)=f(s)=\frac{a_0+a_1s+\ldots}{b_0+b_1s+\ldots} \tag{4}$$

ou

$$a_0-b_0y+(a_1-b_1y)s+(a_2-b_2y)s^2+\ldots=0, \tag{5}$$

[1] *Voir* les Notes précédentes de l'auteur sur ce même sujet (*Nouv. Ann.*, 1901, 1902).

équation dont *le premier membre est une fonction entière de s.*

Réciproquement si $y = f(x)$ est une fonction complète uniforme quelconque, cette fonction admet des substitutions, en groupe discontinu, qui sont toutes les racines de l'équation (2) ou (5) et en sont racines simples.

Or, le premier membre de l'équation (5) étant une fonction entière de s, et les racines de cette équation étant les substitutions s_n du groupe G, on a [1]

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a_1 - b_1 y}{a_0 - b_0 y} = \varphi_1,\\ &\frac{a_2 - b_2 y}{a_0 - b_0 y} = \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2,\\ &\frac{a_3 - b_3 y}{a_0 - b_0 y} = \frac{1}{3}\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1 + \frac{1}{6}\varphi_1^3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_n \left(h_n - \frac{1}{s_n}\right),\\ \varphi_2 &= \sum_n \left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right),\\ \varphi_3 &= \sum_n \left(l_n - \frac{1}{s_n^3}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les quantités $h_n, k_n, l_m, \ldots$ ne dépendant que des coefficients de l'équation en s (5), c'est-à-dire de x et des constantes a, b, et ayant pour principale propriété de rendre convergentes les séries $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$.

Désignons par $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ les seconds membres

---

[1] *Voir* les Notes de l'auteur : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1901, 1902).

des équations (6)

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi_1 = \varphi_1, \\ \psi_2 = \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2, \\ \psi_1 = \frac{1}{3}\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1 + \frac{1}{6}\varphi_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Lorsque les séries $\sum \frac{1}{s_n}$, $\sum \frac{1}{s_n^2}$, ..., sont convergentes, les h_n, k_n, ... sont nulles identiquement; et les fonctions ψ_1, ψ_2, ... se réduisent alors aux fonctions symétriques

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} -\sum \frac{1}{s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n}, \quad -\sum \frac{1}{s_m s_n s_p}, \quad \ldots \\ \qquad (m \neq n \neq p \neq \ldots). \end{array}\right.$$

Nous appellerons *fonctions symétriques normales du premier ordre* ces fonctions-là et, dans le cas où ces séries ne sont pas convergentes, nous étendrons cette dénomination aux fonctions ψ qui les remplacent; on voit, sur les équations (6), qu'il peut arriver qu'une fonction ψ_m se réduise à une constante : il faut et il suffit pour cela que b_m et b_0 soient tous deux nuls, ou que a_m et a_0 soient tous deux nuls.

Mais toutes les fonctions ψ ne peuvent se réduire à des constantes, car alors a_0, ou b_0, devrait être nul et avec ce coefficient tous les a, ou tous les b, devraient être nuls aussi, ce qui ne peut être.

Les fonctions ψ non constantes donnent lieu aux théorèmes suivants :

1. *Les premiers membres des équations* (6) *étant tous linéaires en y, deux fonctions ψ non constantes sont fonctions linéaires l'une de l'autre.*

II. *Toute fonction symétrique du premier ordre est une fonction périodique de groupe* G.

III. *Inversement, toute fonction uniforme du groupe* G *est une fonction linéaire d'une fonction symétrique du premier ordre* ψ, *d'ailleurs choisie d'une manière quelconque pourvu qu'elle ne soit pas constante.*

IV. *Les dénominateurs des premiers membres des équations* (6) *étant tous égaux, si* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *désignent des constantes quelconques et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *des entiers quelconques, on a*

$$\lambda_0 + \lambda_1 \psi_{\alpha_1} + \lambda_2 \psi_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_m \psi_{\alpha_m} = \frac{\mu y + \rho}{a_0 - b_0 y}, \tag{9}$$

ce qui montre qu'une fonction linéaire entière de m *fonctions symétriques du premier ordre* ψ *est une fonction du groupe.*

Les dénominateurs $a_0 - b_0 y$ de deux telles fonctions étant les mêmes, *leur quotient sera encore une fonction linéaire de* y, c'est-à-dire une *fonction du groupe,* en sorte que toute fonction du groupe pourra se mettre sous la forme

$$\frac{\lambda_0 + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \ldots}{\mu_0 + \mu_1 \psi_1 + \mu_0 \psi_2 + \ldots}; \tag{10}$$

il suffit pour le voir de vérifier que cette fonction est une fonction linéaire de ψ, par exemple, dans laquelle les coefficients sont *arbitraires.*

Les considérations précédentes donnent un moyen de former les fonctions uniformes de groupe G, au moins lorsque les séries $\sum \frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n^2}, \ldots$ sont convergentes : les fonctions du groupe sont toutes les fonctions linéaires de ψ_1, ou de ψ_2, ou de ψ_3, ... Lorsque les séries précédentes ne sont pas convergentes il faut introduire des quantités h_n, k_n, ... dont la propriété principale est de rendre φ_1, φ_2, ... convergentes, mais qui ne sont pas entièrement déterminées par cette condition, en sorte qu'ayant choisi, par exemple, certaines fonctions h_i qui rendent convergente φ_1, on ne peut être assuré que la fonction φ_1 ainsi formée admet les substitutions du groupe. Il ne paraît guère possible, dans l'état actuel de cette théorie, de lever cette ambiguïté; et nous nous bornons à ce premier résultat que toute fonction du groupe est déterminée comme fonction linéaire de l'une quelconque des fonctions (7)

$$\sum \frac{1}{s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n s_p}, \quad \ldots,$$

lorsque ces séries sont convergentes; et, à ce sujet, on peut ajouter qu'il n'est pas nécessaire que celle des séries qu'on emploie soit absolument convergente; il est évidemment suffisant qu'elle soit convergente lorsque ses termes sont rangés dans un certain ordre.

On peut penser que, au lieu de l'une des fonctions précédentes, on peut employer l'une des fonctions

$$\sum \frac{1}{s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_m^2 s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_n^3}, \quad \ldots.$$

Nous allons voir que, *généralement*, on ne le peut pas.

Appelons fonctions symétriques normales de l'ordre ω des fonctions telles que les fonctions (7) où les s_n sont remplacées par leurs puissances de degré ω, s_n^ω, lorsque les séries sont convergentes; ou, dans le cas général, des fonctions analogues aux fonctions ψ où le même changement a lieu, en même temps qu'un changement correspondant dans les h_n, k_n, ..., ce qui revient, ainsi qu'il est facile de voir, à remplacer dans les ψ_m, φ_1, φ_2, φ_3, ... par φ_ω, $\varphi_{2\omega}$, $\varphi_{3\omega}$, ...

Les fonctions normales d'ordre ω ainsi formées se réduisent aux suivantes lorsque celles-ci sont convergentes :

$$\sum \frac{1}{s_n^\omega}, \quad \sum \frac{1}{s_m^\omega s_n^\omega}, \quad \sum \frac{1}{s_m^\omega s_n^\omega s_p^\omega}, \quad \dots$$

Les fonctions φ_2, φ_3, ..., φ_ω sont alors les analogues de $\psi_1 = \varphi_1$ et sont d'ordres respectifs $2, 3, \dots, \omega$; les fonctions analogues à ψ_2 sont

$$\frac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_2^2), \quad \frac{1}{2}(\varphi_6 + \varphi_3^2), \quad \frac{1}{2}(\varphi_8 + \varphi_4^2), \quad \dots,$$

et sont d'ordres respectifs $2, 3, 4, \dots$; elles se réduisent respectivement à

$$\sum \frac{1}{s_m^2 s_n^2}, \quad \sum \frac{1}{s_m^3 s_n^3}, \quad \dots$$

lorsque ces dernières dérivées sont convergentes. Les fonctions d'ordre ω, $\chi_{\omega,1}$, $\chi_{\omega,2}$, $\chi_{\omega,3}$, ... ($\chi_{\omega,m}$ étant celle qui est tirée de ψ_m), sont des fonctions rationnelles des φ et, par suite, de y; elles admettent donc toutes les substitutions du groupe G, mais elles en admettent généralement d'autres. En effet, sauf exception, la fonction φ_2 qu'on tire de la deuxième équation (6) est une fonction du second degré de y; φ_3, qu'on tire de la troisième, est du degré 3 en y; en général, φ_m est du degré m en y; il y a exception, par exemple, si φ_1 se réduit à une constante, car alors φ_2 et φ_3 sont du premier degré en y, φ_4 est du second degré, ...; si φ_1 et φ_2 sont constants, φ_3 et φ_4 sont du premier degré, etc.; d'une manière générale, φ_m peut se réduire à un degré inférieur à m, même au premier degré, par exemple si φ_1, φ_2, ..., φ_{m-1} sont des constantes, φ_m peut même se réduire à une constante. Il s'ensuit que $\chi_{\omega,m}$ qui contient linéairement $\varphi_{\omega m}$ est généralement une fonction rationnelle de degré $m\omega$ de y, mais peut se réduire au premier degré, ou même à une constante; $\chi_{\omega,m}$ admet donc généralement d'autres substitutions avec celles de G, et ce n'est que lorsque $\chi_{\omega,m}$ se réduit au premier degré, c'est-à-dire à une fonction linéaire d'une fonction ψ_p que $\chi_{\omega,m}$ est une fonction du groupe. Nous concluons donc :

Les fonctions symétriques normales d'ordre ω, $\chi_{\omega,m}$ sont généralement des fonctions rationnelles de degré $m\omega$ de toute fonction y du groupe; ce n'est que dans les cas particuliers où $\chi_{\omega,m}$ se réduit à une fonction du premier ordre ψ_p qu'on peut employer $\chi_{\omega,m}$ à la détermination du groupe.

Les fonctions φ_ω sont les fonctions d'ordre ω formées au moyen de ψ_1 :

$$\varphi_1 = \chi_{1,1}, \quad \varphi_2 = \chi_{2,1}, \quad \varphi_3 = \chi_{3,1}, \quad \ldots, \quad \varphi_\omega = \chi_{\omega,1}, \quad \ldots.$$

Si $\varphi_1 (= \psi_1)$ n'est pas constante, on emploiera cette fonction, qui est la plus simple à former dans le cas où $\sum \frac{1}{s}$ est convergente, pour déterminer les fonctions $f(x)$ du groupe

$$f(x) = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu}{\nu\varphi_1 + \rho}.$$

Si $\sum \frac{1}{s}$ est convergente, mais constante, on pourra alors employer $\varphi_2 = -\sum \frac{1}{s^2}$

$$f(x) = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu}{\nu\varphi_2 + \rho}$$

et ainsi de suite. Si $\sum \frac{1}{s_n^\omega}$ est convergente et si toutes les sommes analogues relatives aux exposants $1, 2, \ldots, \omega - 1$ sont divergentes, on sait ([1]) qu'il est *des cas* où les h_n, k_n, ... sont telles que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\omega-1}$ se réduisent à des constantes, ou sont même nulles; donc, si ω est le plus petit nombre pour lequel $\sum \frac{1}{s_n^\omega}$ est convergente, on est conduit à employer cette fonction φ_ω de la même manière que lorsque les fonctions d'indices inférieurs sont constantes; les fonctions entières dont le rapport est $y = f(x)$ sont alors de genre $\omega - 1$.

Mais il faut remarquer qu'on ne peut être assuré à l'avance que les h_n, k_n, ... sont tels que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \omega - 1$ sont constantes. Il s'ensuit que tout ce qu'on peut affirmer, c'est que φ_ω admet toutes les substitutions données, mais peut en admettre d'autres, et il restera à voir si le groupe de φ_ω est le groupe G donné ou contient G comme sous-groupe.

En général, un groupe G de substitutions contient des sous-groupes et se décompose sous forme d'une somme de sous-groupes, c'est-à-dire qu'il existe des sous-groupes

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_p, \quad \ldots$$

tels que le groupe G peut être considéré comme l'ensemble de toutes les substitutions de tous les sous-groupes g_p (sauf dans chaque sous-groupe la substitution identique qu'il ne faut pas répéter) et de la substitution identique $s = 0$.

Supposons qu'il existe une fonction $f_p(x)$, uniforme ou multiforme, admettant les substitutions de g_p. La

---

([1]) *Voir* la Note : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1902).

fonction cherchée est une fonction uniforme de $f_p(x)$. Les substitutions de g_p sont les racines de l'équation

$$(11) \qquad f_p(s) = f_p(x).$$

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ relatives à ce groupe g_p sont déterminées de la même manière que pour le groupe G; en en retranchant respectivement $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots,$ on a les sommes

$$\sum\left(h_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right), \quad \ldots$$

relatives au groupe g_p, sauf, dans chacune d'elles, le terme correspondant à la substitution identique. Si l'on fait le même calcul pour tous les sous-groupes g_p, on voit que chacune des fonctions φ_m relative au groupe G est obtenue par la somme de $\frac{1}{x^m}$ et de termes provenant chacun d'un sous-groupe.

Ceci sera utile pour la formation des fonctions φ, en employant particulièrement des sous-groupes g_p d'ordre 1, c'est-à-dire formés au moyen d'une seule substitution fondamentale.

On pourra aussi procéder autrement : former la somme (y compris la substitution identique) des termes relatifs à un sous-groupe, puis substituer à x dans cette somme une fonction s d'un autre sous-groupe, puis une autre, et ainsi de suite. Dans tous les cas, φ_m sera obtenue par une somme de termes dont la formation est méthodique.

Si, en particulier, toutes les substitutions sont algébriques et, par exemple, si les sous-groupes fondamentaux sont les groupes de N fonctions rationnelles, les termes P_p obtenus par la seconde méthode sont tous algébriques

$$\varphi_m = \sum_p \mathrm{P}_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

et dans certains cas sont même rationnels : on a ainsi une fonction du groupe donné, sous forme de série de fonctions rationnelles ; mais généralement les termes P_p, dans la seconde formation comme dans la première, sont transcendants, même lorsque toutes les substitutions de G sont algébriques. Nous donnerons ultérieurement quelques détails sur les groupes de substitution algébriques et les fonctions qui y sont attachées.

Les relations (6) permettent encore de démontrer une formule qui sera utile dans bien des cas lorsque les séries (7) sont convergentes : soit α une valeur quelconque de x autre qu'un point multiple du groupe ou l'un de ses transformés $s_n(x)$ s'il en existe, et soit β la valeur qu'acquiert y lorsque x égale α. $\beta - y$ s'*annulant* avec $\alpha - x$, on peut écrire

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)\Phi(x).$$

Changeons x en $s_n(x)$ dans cette égalité ; y ne changeant pas, on a

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right)\Phi(s_n).$$

Le facteur $1 - \frac{\alpha}{s_n}$ ne s'annulant pas lorsque $x = \alpha$, puisque α n'est pas un point multiple du groupe, on est conduit à écrire

$$1 - \frac{\beta}{y} = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right)\Psi(x, s_n).$$

D'autre part, deux facteurs tels que $1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}$ ne peuvent s'annuler à la fois ; car, alors on aurait à la fois

$$s_n(x) = s_m(x) = \alpha,$$

ce qui ne pourrait arriver que si α était un point multiple du groupe ou un transformé d'un tel point par les s_n, s'il en existe. On est donc conduit à écrire

$$(12) \qquad 1 - \frac{\beta}{y} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \prod_n \left(1 - \frac{\alpha}{s_n(x)}\right),$$

où le produit $\prod$ est étendu à toutes les substitutions du groupe. Or, P a une expression très simple. En effet, le produit qui suit P, dans l'hypothèse faite, est

$$\frac{y - \beta}{\mathrm{P}y} = 1 + \alpha\psi_1 + \alpha^2\psi_2 + \alpha^3\psi_3 + \ldots,$$

et nous avons vu qu'une telle fonction (9) est une fonction du groupe, c'est-à-dire une fonction linéaire de y; d'ailleurs cette fonction s'annule avec $y - \beta$, donc $\mathrm{P}y$ est de la forme $\lambda y + \mu$:

$$\mathrm{P} = \lambda + \frac{\mu}{y}.$$

On déterminera les deux coefficients λ et μ en se donnant les valeurs de y pour deux nouvelles valeurs α', α'' de x. Si, par exemple, y s'annule avec x [1], on a $\mu = 0$, $\mathrm{P} = \text{const}$.

Dans l'analyse précédente on a supposé que α n'était pas un point multiple de G ou un transformé d'un tel point; mais il est clair qu'on peut poser *a priori* l'égalité (12), où P est déterminé par cette égalité même, et cela *quel que soit* α; le théorème démontré est donc vrai quel que soit α (pourvu que β soit fini et déterminé, c'est-à-dire pourvu que α soit distinct des pôles et points essentiels de y, ou du groupe). Ce qu'il y a de parti-

---

(1) Parmi les fonctions du groupe, fonctions linéaires de l'une d'elles, il y en a toujours une infinité qui satisfont à cette condition.

culier dans le cas où α est un point multiple du groupe, c'est que α est une racine de l'équation $y - \beta = 0$, d'un ordre égal au nombre des substitutions

$$s_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

qui s'égalent en ce point, nombre qui peut d'ailleurs être infini.

Dans certains cas particuliers, il existe des fonctions entières parmi celles de groupe G. Supposons que y soit entière, on voit par les équations (6), en y faisant

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0,$$

que l'on a

$$\frac{a_m}{a_0 - y} = \psi_m, \qquad \frac{\lambda}{a_0 - y} = \lambda_0 + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots$$

et, par suite, que la formule générale des fonctions entières est

$$(13) \qquad \frac{\lambda}{\psi_m} + \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \ldots} + \mu.$$

En particulier, si $\sum \frac{1}{s_n}$ est convergente, non constante, on peut prendre

$$(14) \qquad y = \frac{\lambda}{\sum\limits_n \frac{1}{s_n}} + \mu.$$

Toutes les considérations précédentes s'appliquent aux fonctions complètes uniformes, qui, toutes, comme on sait, ont des substitutions qui les laissent invariables. Elles ne s'appliquent pas, en général, aux fonctions multiformes, parce que celles-ci ne sont périodiques que dans des cas exceptionnels; mais les formules qui permettent de trouver toutes les fonctions uniformes d'un groupe G discontinu, lorsqu'il en existe, s'appliquent intégralement au cas où il existe des fonctions multiformes, et non des fonctions uniformes, admettant les substitutions du groupe G donné et seulement ces substitutions-là. Nos formules donnent alors des fonctions multiformes du groupe donné, fonctions ponctales, linéales ou aréales, suivant que le groupe est discontinu, simplement continu ou doublement continu. Mais, si ce sont les plus simples fonctions de groupe G, ce ne sont plus les seules, puisque si $f(x)$ est une *fonction multiforme* admettant les s_n données et seulement celles-là, en un mot de groupe G, toute fonction de la forme

$$\chi[f(x)],$$

où χ est une fonction multiforme non périodique quelconque, satisfait encore à ces conditions.

Nous allons maintenant donner quelques exemples simples de détermination de fonctions uniformes au moyen de leur groupe de substitutions :

1° Considérons d'abord le groupe des substitutions

$$s_n(x) = n\pi + x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La série

$$\sum_n \frac{1}{s_n(x)} = \sum \frac{1}{n\pi + x}$$

n'est pas *absolument convergente;* mais on peut ranger ses termes dans un ordre tel qu'elle soit convergente : on sait, en effet, que l'on peut écrire

$$\sin x = x \prod_n{}' \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

en associant par couples les facteurs dans lesquels n a deux valeurs égales et de signes contraires et faisant croître ensuite n à partir de 1. On a donc dans les mêmes conditions, en prenant la dérivée logarithmique

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tang} x} = \dfrac{1}{x} + \sum' \dfrac{1}{n\pi + x} = \sum \dfrac{1}{n\pi + x} \\ \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

On vérifie ainsi que les fonctions du groupe sont les fonctions linéaires de $\operatorname{tang} x$.

2° Considérons le groupe formé par les deux sortes de substitutions

$$\begin{matrix} s_n(x) = 2n\pi + x \\ s_p(x) = (2p+1)\pi - x \end{matrix} \qquad (n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme $\sum \frac{1}{s}$ se décompose sous la forme

$$\sum_n \frac{1}{s_n} + \sum_p \frac{1}{s_p}.$$

D'après ce qui précède, on a

$$\sum_n \frac{1}{s_n} = \sum \frac{1}{2n\pi + x} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n\pi + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}}.$$

Pour former $\sum \frac{1}{s_p}$, nous écrirons

$$\cos x = \prod \left(1 - \frac{x}{(2p+1)\frac{\pi}{2}} \right) \qquad (2p+1 = \pm 1, \pm 3, \ldots),$$

produit convergent si l'on associe les valeurs égales et de signes contraires de $2p+1$, et si l'on fait croître $2p+1$ à partir de 1. La dérivée logarithmique donne alors

$$-\operatorname{tang} x = \sum \frac{-1}{(2p+1)\frac{\pi}{2} - x} = -2 \sum \frac{1}{(2p+1)\pi - 2x}.$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{1}{s_p} = \sum \frac{1}{(2p+1)\pi - x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}.$$

On a donc enfin

$$(16) \quad \sum \frac{1}{s} = \sum_n \frac{1}{s_n} + \sum_n \frac{1}{s_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} + \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

On vérifie ainsi qu'il existe des fonctions entières du groupe, parmi lesquelles est $\sin x$, qui sont données par la formule générale

$$(14) \qquad \frac{\lambda}{\sum \frac{1}{s}} + \mu.$$

La formule générale (12) conduit dans ce cas, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = 1$, à la relation

$$1 - \sin x = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

et, par suite, à celle-ci

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

qui se trouve ainsi démontrée directement en ne se servant que du développement en produit de $\sin x$, et des substitutions de cette fonction.

3° Considérons encore le groupe des substitutions de $\cos x$

$$\begin{aligned} s_n &= 2n\pi + x \\ s_p &= 2p\pi - x \end{aligned} \qquad (n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme des inverses des substitutions est

$$\sum \frac{1}{2n\pi + x} + \sum \frac{1}{2p\pi - x}.$$

Or, n et p prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, on voit que les termes dans lesquels $p = -n$ se détruisent deux à deux en sorte que cette somme est nulle : on peut alors employer la somme des inverses des carrés des substitutions

$$\sum \frac{1}{s_n^2} + \sum \frac{1}{s_p^2}.$$

Puisque les substitutions s_p ne sont autres que les substitutions s_n changées de signe, la somme précédente est $2\sum \frac{1}{s_n^2}$. Or

$$\sum \frac{1}{s_n} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}}.$$

La somme cherchée est donc, en remarquant que $s'_n = 1$, $\frac{d\frac{1}{s}}{dx} = -\frac{1}{s^2}$,

$$2\sum \frac{1}{s_n^2} = -2\sum \frac{d}{dx} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 - \cos x}.$$

On vérifie ainsi que les fonctions entières du groupe sont données par la formule (13).

On remarquera qu'au contraire, dans les deux cas précédents, par exemple dans le premier, où $\sum \frac{1}{s}$ n'est pas constante,

$$\sum \frac{1}{n\pi + x} = \sum \frac{1}{s_n} = \frac{1}{\operatorname{tang} x},$$

la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ qu'on peut obtenir en dérivant par rapport à x

$$-\sum \frac{1}{s_n^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$$

est une *fonction du second degré de toute fonction du groupe,* par exemple de $\tang x$ (¹).

4° Considérons le groupe de la fonction elliptique $u_x = \operatorname{sn} \pi$

$$s_{m,m'} = 4mK + 2m'iK' + x,$$

$$s_{p,p'} = 2(2p+1)K + 2p'iK' - x$$

$$(m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La somme des substitutions

$$\sum_{m'}\sum_{m}\frac{1}{s_{m,m'}} + \sum_{p'}\sum_{p}\frac{1}{s_{p,p'}}$$

qui n'est pas absolument convergente est cependant convergente lorsqu'on range ses termes dans un certain ordre qui résulte de ce qui suit et qui est d'ailleurs employé dans la théorie des fonctions H, Θ de Jacobi. Remarquant que p' et m', comme p et m, sont indépendants et prennent toutes les valeurs entières positives et négatives, nous ferons $p' = -m'$ et nous poserons

$$2m'iK' + x = z.$$

La somme est alors

$$\sum_{z}\left[\sum_{m}\frac{1}{4mK+z} + \sum_{p}\frac{1}{2(2p+1)K-z}\right]$$

$$(m, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ z = x + 2m'iK',\ m' = 0, \pm 1, \pm 2),$$

(¹) Dans les exemples qui précèdent on aurait pu employer des séries absolument convergentes sous la forme

$$\sum\left(h_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right),$$

mais cela complique l'écriture et ne donne pas d'autre résultat.

ce qu'on peut écrire encore

$$\frac{\pi}{2K}\sum_z\left[\sum_m \frac{1}{2m\pi+\frac{\pi}{2K}z}+\sum_p \frac{1}{(2p+1)\pi-\frac{\pi}{2K}z}\right].$$

Si l'on compare la somme entre crochets à la somme (16) relative à $\sin x$, on voit que cette somme est convergente en associant les valeurs de m et de p, égales et de signes contraires, et que cette somme est

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}z}.$$

La somme cherchée relative au groupe donné est donc

$$\frac{\pi}{2K}\sum_z \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}z}=\frac{\pi}{2K}\sum_{m'}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2m'iK')}$$
$$(m'=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

ou, en faisant sortir le terme dans lequel m' est nul, et associant deux à deux ceux dans lesquels m' a la même valeur arithmétique,

$$\sum\frac{1}{s}=\frac{\pi}{2K}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}x}$$
$$+\frac{\pi}{2K}\sum_n\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}\right]$$
$$(n=1,2,3,\ldots).$$

Sous cette forme, la somme est convergente, n croissant à partir de 1.

L'ensemble des deux termes soumis au signe $\sum$ prend d'ailleurs la forme

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')+\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{2K}x\cos ni\pi\frac{K'}{K}}{\cos 2ni\pi\frac{K'}{K}-\cos\frac{\pi}{K}x}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{2K}x\,\frac{q^n+q^{-n}}{2}}{\frac{q^{2n}+q^{-2n}}{2}-\cos\frac{\pi}{K}x}.$$

On a donc

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \sum\frac{1}{s} &= \frac{\pi}{2K}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}x} \\ &\quad+\frac{2\pi}{K}\sin\frac{\pi}{2K}x\sum_n\frac{q^n(1+q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi}{K}x+q^{4n}} \\ &\qquad\left(q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}\right). \end{aligned}\right.$$

Ceci est une formule connue; mais on peut la déterminer complètement par notre théorie. On sait, en effet, que la somme obtenue ainsi est une fonction linéaire de la fonction $u = \operatorname{sn} x$ du groupe; or, on voit facilement que :

1° Le second membre devient infini lorsque x s'annule ou prend une valeur quelconque $2mK + 2m'iK'$ qui annule u;

2° Le second membre s'annule lorsque $x = iK'$, c'est-à-dire lorsque u devient infini.

La fonction formée, qu'on sait être une fonction linéaire de u, ne peut donc être que

$$\frac{\lambda}{u},$$

où λ est une constante ([1]). On trouve λ en donnant à x une valeur particulière, par exemple la valeur K; ou mieux, multipliant le développement précédent et $\frac{\lambda}{u}$ par x et faisant $x = 0$, $\frac{u}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2K}x}{\frac{\pi}{2K}x} = 1$, on a

$$\lambda = 1;$$

la valeur K attribuée à x donne alors la formule connue

$$1 = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

ou

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\sum_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}.$$

([1]) On arrive à la même formule, plus rapidement, en considérant le groupe de la fonction de $y = \sin\frac{\pi}{2K}x$

$$\varphi(y) - \operatorname{sn} x \qquad \left(y = \sin\frac{\pi}{2K}x\right),$$

dont les substitutions sont (*Nouv. Ann.*, 1900)

$$s_n(y) = a_n y + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_n^2} = \sin\frac{\pi}{2K}(x + 2niK')$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On est ainsi conduit immédiatement à la série convergente calculée plus haut

$$\sum \frac{1}{s_n(y)} = \sum \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

qui n'est autre que $\frac{1}{\varphi(y)} = \frac{1}{\operatorname{sn} x}$.

La somme $\sum \frac{1}{s}$ n'étant pas constante et étant convergente au moins d'une certaine manière, la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ est, d'après notre théorie, une fonction du second degré de u; cette remarque conduit à une démonstration intéressante d'une formule connue; on a

$$\sum \frac{1}{s^2} = \frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2}.$$

Or, la fonction H peut s'écrire, λ étant une constante,

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= \lambda x \prod \left(1 + \frac{x}{2m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'}\right) \\ &= \lambda x \prod{}' \frac{s_{m,m'}}{4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'} \prod \frac{s_{p,p'}}{2(2p+1)\mathrm{K} + 2p'i\mathrm{K}'} \\ &\qquad (m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned}$$

où les produits indiqués sont convergents lorsqu'on range les facteurs dans un certain ordre connu qui résulte d'ailleurs de l'étude précédente. Les dérivées de $s_{m,m'}$, $s_{p,p'}$ sont $s'_{m,m'} = 1$, $s'_{p,p'} = -1$ et, par conséquent, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation précédente, on a

$$\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{1}{x} + \sum{}' \frac{1}{s_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s_{p,p'}} = \sum \frac{1}{s_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s_{p,p'}}$$

et, en dérivant encore une fois,

$$\frac{\mathrm{H}''}{\mathrm{H}} - \frac{\mathrm{H}'^2}{\mathrm{H}^2} = -\sum \frac{1}{s^2_{m,m'}} - \sum \frac{1}{s^2_{p,p'}} = -\frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2}.$$

Les zéros de $s_{m,m'}$, $s_{p,p'}$ ne sont autres que ceux de u; ce sont ainsi des infinis doubles du premier membre : donc $a' = b' = 0$. D'ailleurs

$$s_{m,m'}(-x) = -s_{-m,-m'}(x), \quad s_{2p+1,p'}(-x) = -s_{-(2p+1),-p'}(x)$$

et, par conséquent, lorsqu'on change x de signe, les éléments associés deux à deux de la somme $\sum \frac{1}{s^2}$ ne font que se permuter, et cette somme ne change pas; mais u change de signe, donc $b = 0$. On a donc finalement

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\mathrm{H} = \frac{\lambda}{u^2} + \mu, \tag{18}$$

où λ et μ sont deux constantes qu'on peut déterminer en faisant $x = \mathrm{K}$, $u = 1$ et $x = i\mathrm{K}'$, $\frac{1}{u} = 0$; on peut trouver ainsi la formule servant à l'intégration de l'intégrale de seconde espèce.

5° Considérons encore le groupe de la fonction $v = \mathrm{sn}(\mathrm{K} + x)$

$$\begin{aligned} s_{m,m'} &= 4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}' + x \\ s_{p,p'} &= 4p\mathrm{K} + 2p'i\mathrm{K}' - x \end{aligned} \qquad (m, m', p, p' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On voit que pour $p = -m$, $p' = -m'$, on a

$$s_{p,p'} = -s_{m,m'}$$

et par conséquent que la somme $\sum \frac{1}{s}$ est nulle. La somme $\frac{1}{s^2}$ est alors une fonction du groupe, si cette somme n'est pas constante et peut être mise sous forme de série convergente. On a d'ailleurs, pour la même raison que plus haut,

$$\sum \frac{1}{s_{m,m'}^2} = \sum \frac{1}{s_{p,p'}^2}, \qquad \sum \frac{1}{s^2} = 2\sum \frac{1}{s_{m,m'}^2}.$$

La fonction

$$\sum \frac{1}{(4m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}' + x)^2} \qquad (m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est donc une fonction du groupe. On peut le vérifier comme il suit [1] : considérons la transformation de $\operatorname{sn} x$

$$u_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2}x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2}\,\frac{1-v}{1-kv}} \quad [2]$$

obtenue en divisant par 2 l'argument dans la transformation de Gauss et pour laquelle on a

$$K_1 = \frac{1+k}{2}2k, \qquad iK'_1 = \frac{1+k}{2}iK'.$$

Posant $g_1 = \frac{1+k}{2}$, $x_1 = g_1 x$, la fonction H de Jacobi relative à cette fonction peut s'écrire, dans les mêmes conditions de convergence que H,

$$C x_1 \prod{}'\left(1 + \frac{x_1}{2mK_1 + 2m'iK'_1}\right)$$
$$= C g_1 x \prod{}'\left(1 + \frac{x}{4mK + 2m'iK'}\right).$$

La dérivée seconde du logarithme de cette fonction est, d'après ce que nous avons vu à propos de $u = \operatorname{sn}(x, k)$, une fonction de la forme

$$\frac{\lambda}{u_1^2} + \mu = \lambda \frac{2}{1+k}\,\frac{1-kv}{1-v} + \mu;$$

d'ailleurs, la dérivée première est

$$\frac{1}{x} + \sum{}' \frac{1}{4mK + 2m'iK' + x} = \sum \frac{1}{4mK + 2m'iK' + x}$$

et la dérivée seconde

$$-\sum \frac{1}{(4mK + 2m'iK' + x)^2}.$$

---

[1] On pourrait trouver une formule analogue à celle de $\frac{1}{u}$ en effectuant, comme plus haut, la somme indiquée; mais le procédé de vérification que nous employons est plus rapide.

[2] Voir : *Sur une représentation des fonctions elliptiques et leur analogie avec les fonctions circulaires* (*Nouv. Ann.*, 1901).

La vérification est donc faite; on voit, de plus, que le dénominateur de cette fonction linéaire de v est $1 - v$. Quant aux facteurs λ et μ on les déterminera en donnant à x deux valeurs particulières.

La fonction p de Weierstrass, qui est une fonction linéaire de tout cosinus elliptique v ayant les mêmes périodes ([1]), donne lieu aux mêmes calculs. A ce sujet, il convient de remarquer qu'au lieu des séries semi-convergentes que nous avons employées qui conduisent aux fonctions H, Θ de Jacobi, on peut employer des séries absolument convergentes sous la forme

$$\sum\left(k_n - \frac{1}{s_n}\right), \quad \sum\left(k_n - \frac{1}{s_n^2}\right), \quad \cdots$$

ce qu'on sait faire dans le cas des fonctions elliptiques; ces séries conduisent alors aux fonctions σ de Weierstrass, mais aux mêmes fonctions périodiques $u = \operatorname{sn} x$, $v = \operatorname{sn}(K + x)$.

Sur les fonctions rationnelles. — Les théorèmes démontrés plus haut sur les fonctions complètes uniformes s'appliquent évidemment aux fonctions rationnelles avec cette simplification que les sommes

$$\sum \frac{1}{s_n}, \quad \sum \frac{1}{s_m s_n}, \quad \cdots$$

sont ici toujours convergentes. De plus, au lieu de ces sommes, on peut employer celles-ci

$$\sum s_n, \quad \sum s_m s_n, \quad \ldots,$$

([1]) On sait qu'on peut exprimer p de six manières, deux à deux de même forme, en fonction linéaire d'un cosinus elliptique v de mêmes périodes [*Sur les fonctions de première espèce* (*Nouv. Ann.*, 1898)].

car l'équation (5) se met sous la forme suivante, μ étant le degré de la fonction rationnelle y considérée

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} & a_0 - b_0 y + (a_1 - b_1 y) s + \dots \\ & \quad + (a_{\mu-1} - b_{\mu-1} y) s^{\mu-1} + (a_\mu - b_\mu y) s^\mu = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'on peut employer, soit les équations (6) dans lesquelles les h_n, k_n, ... sont nulles, soit les suivantes

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_{\mu-1} - b_{\mu-1} y}{a_\mu - b_\mu y} = \psi'_1 = -\sum s_n \quad = \varphi'_1, \\ & \frac{a_{\mu-2} - b_{\mu-2} y}{a_\mu - b_\mu y} = \psi'_2 = \quad \sum s_m s_n = \frac{1}{2}\varphi'_2 + \frac{1}{2}\varphi'^2_1, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & \frac{a_0 - b_\mu y}{a_\mu - b_\mu y} \quad = \psi'_\mu = (-1)^\mu \prod s_n, \end{aligned} \right.$$

où ψ'_m est la somme des produits m à m des s_n et φ'_m la somme de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ changée de signe. Ces fonctions ψ' sont d'ailleurs liées aux premières ψ d'une manière simple et se mettent sous la forme (10) et réciproquement.

Les plus simples des fonctions à employer pour former les fonctions du groupe sont alors

$$\sum s_n, \quad \sum \frac{1}{s_n}, \quad \prod s_n.$$

Il peut arriver que celles-ci se réduisent à des constantes; alors on emploiera des fonctions symétriques *du second ordre* qui se réduisent au premier [1]. Un

[1] On remarquera que, s'il existe des fonctions entières y du groupe (polynomes), $b_1 = b_2 = \dots = b_\mu = 0$, toutes les fonctions ψ' se réduisent à des constantes sauf la dernière $\prod s_n$ qui est une de ces fonctions entières; on emploiera donc pour déterminer ces fonctions entières, soit $\prod s_n$, soit une fonction $\frac{1}{\psi_m}$ inverse d'une quelconque des ψ_m.

exemple simple est fourni par le groupe

$$s = x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1 - x, \quad \frac{1}{1 - x}, \quad \frac{x - 1}{x}, \quad \frac{x}{x - 1},$$

pour lequel les trois fonctions précédentes sont constantes; on emploiera alors $\sum s^2$ ou $\sum \frac{1}{s^2}$, qui, d'après ce qui a été dit précédemment, se réduit dans ce cas au premier ordre et est une fonction du groupe. Si l'on pose $x' = 1 - x$, on a

$$\sum s^2 = \frac{(x^2 + x'^2)(1 + x^2 x'^2) + x^4 + x'^4}{x^2 x'^2},$$

$$2 + \sum s^2 = \frac{(x^2 + x'^2)(1 + x^2)(1 + x'^2)}{x^2 x'^2}.$$

L'une des plus simples fonctions du groupe, fonction linéaire de la précédente, est

$$\frac{4}{27} \frac{(1 - xx')^3}{x^2 x'^2} = \frac{4}{27} \frac{(1 - x + x^2)^3}{x^2(1 - x)^2}$$

fonction bien connue sous le nom d'*invariant absolu* dans la théorie des fonctions elliptiques modulaires, x étant égal à k^2, carré du module.

Les considérations qui précèdent s'appliquent à tout groupe d'un nombre fini de substitutions : dans tous les cas, les fonctions $\sum s$, $\prod s$, $\sum \frac{1}{s}$, ou à leur défaut des fonctions symétriques d'ordre supérieur se réduisant au premier ordre, donnent toujours des fonctions du groupe, rationnelles ou non.

Il en est de même de la formule (12) concernant deux valeurs correspondantes de x et de la fonction y du groupe; mais dans le cas d'un groupe fini, cette formule peut s'écrire d'une manière plus simple en employant les fonctions symétriques des s_n au lieu de celles de leurs inverses $\frac{1}{s_n}$. On a visiblement par la même démonstration :

$$(19) \qquad \beta - y = \mathrm{P}(\alpha - x) \prod_n [\alpha - s_n(x)]$$

où le facteur P est de la forme $\lambda y + \mu$.

Une application fort simple des théories précédentes dans le cas d'un groupe fini est celle de la recherche des transformations rationnelles des fonctions elliptiques. Sans entrer dans plus de détails, on voit immédiatement que l'emploi des expressions $\sum_n s_n$, $\prod_n s_n$, fonctions linéaires de toute fonction du groupe, conduit aux calculs mêmes et aux formules d'Abel pour la transformation impaire de $\operatorname{sn} x$, les fonctions s_n étant de la forme

$$\operatorname{sn}(x + n\alpha) \qquad \left(n = 1, 2, \ldots, \mu; \alpha = \frac{4a\mathrm{K} + 2a'i\mathrm{K}'}{2\mu + 1}\right).$$

Quant à la fonction $\sum \frac{1}{s}$, elle conduit à une autre formule, et il en serait de même de toute fonction ψ'_m (6'), mais ces formules sont plus compliquées.

La formule (19) conduit de même aux formules connues de $1 \pm y$, $1 \pm \lambda y$ (y étant le transformé de $\operatorname{sn} x$, de module λ) et fournit de ces formules une démonstration fort simple. On voit que toute fonction uniforme, et en général toute fonction périodique, susceptible de *transformations* en d'autres de mêmes formes, et dont les groupes sont analogues, satisferont à des relations analogues à celles qu'expriment les formules de $1 \pm y$, $1 \pm \lambda y$ dans les transformations de $\operatorname{sn} x$.

Il convient de remarquer, au sujet des fonctions elliptiques, que l'emploi de la théorie générale des groupes de substitutions n'est autre que la méthode même d'Abel; si celui-ci n'a pas dégagé explicitement, des théories particulières où il s'en est servi, la théorie générale des groupes et des fonctions y attachées, s'il n'a pas prononcé le mot de groupe, du moins on peut dire que la notion générale de groupes de substitutions à une variable se retrouve dans toutes ses théories, et il s'en est servi de la manière la plus heureuse. C'est là surtout ce qu'ont d'original et de personnel les travaux d'Abel, qui est ainsi le premier auteur de la découverte des groupes de substitutions à une variable [1].

On pourra comparer la méthode que nous venons d'exposer pour déterminer une fonction *périodique* au moyen de ses substitutions, avec la méthode que nous avons précédemment donnée [2] qui, employant les *périodes* $p_n = s_n(x) = n$, au lieu des substitutions s_n elles-mêmes, détermine par une équation du troisième ordre les fonctions du groupe, ou par une équation linéaire homogène du deuxième ordre les fonctions entières dont les quotients sont les fonctions du groupe, ainsi que le *multiplicateur* de ces fonctions entières.

On voit que, dans les deux cas, on a à employer des séries $\sum \frac{1}{s}$, $\sum \frac{1}{s^2}$, ... ou $\sum \frac{1}{p}$, $\sum \frac{1}{p^2}$ qui peuvent n'être pas convergentes et qu'alors l'introduction de fonctions h, k, l rendant convergentes ces séries complique le problème, le choix de ces fonctions h, k, l, présentant une ambiguïté. Lorsqu'on peut déterminer sans ambi-

---

(1) Cette découverte a été faussement attribuée à Galois par plusieurs auteurs; Galois avait surtout étudié les travaux d'Abel et il ne serait pas étonnant que ses propres travaux s'en soient ressentis. Mais la principale découverte de Galois, les groupes dits *de Galois*, sont des cycles de permutations linéaires de lettres et n'ont rien de commun avec les groupes de substitutions à une variable.

(2) *Détermination des fonctions*, etc. (*Nouv. Ann.*, 1902).

guïté ces fonctions h, k, ou lorsque les séries considérées sont convergentes, l'avantage paraît être en faveur de la méthode que nous venons d'exposer, car elle donne immédiatement, sans intégration à effectuer, une expression (ou plusieurs) des fonctions du groupe ; par exemple, dans le cas du groupe de $\operatorname{sn} x$, on a obtenu le développement connu (17) de $\frac{1}{\operatorname{sn} x}$ et on aurait celui de $\operatorname{sn} x$ en y changeant x en $x - iK'$.

Mais la méthode de l'équation aux fonctions à multiplicateurs formée au moyen des périodes $p = s - x$, qui a le désavantage d'exiger une intégration, a d'autre part l'avantage de déterminer les *fonctions entières* dont les fonctions du groupe sont les quotients et, en outre, le *multiplicateur* de ces fonctions ; nous avons vu (*loc. cit.*) que cette méthode conduit, dans le cas du groupe de $\operatorname{sn} x$, aux fonctions H, Θ, ... de Jacobi, et aux fonctions σ, σ_α, ... de Weierstrass, et donne immédiatement leur multiplicateur. Chacune des deux méthodes a donc ses avantages propres et aussi ses inconvénients ; cependant, ce que l'on sait de l'importance des fonctions entières H, Θ, ... ou σ, dans le cas des fonctions elliptiques, importance que n'ont pas les développements de la forme (17) montre que c'est la première méthode que nous avons donnée qui, quoique au prix d'une intégration, fournit les résultats les plus utiles [1].

---

[1] Il ne faut pas oublier également que cette méthode nous a donné divers autres résultats : conditions nécessaires pour qu'il existe des fonctions du groupe, sous forme d'identités auxquelles doivent satisfaire les substitutions ; condition unique ($\Phi'' = \Phi\Psi$) pour qu'il existe des fonctions entières du groupe donné, et expressions de ces fonctions entières, etc.

Cependant, la seconde méthode fournit des résultats positifs dans certains cas où la première ne fournit que des résultats ambigus : nous avons vu, en effet, que la série $\sum \frac{1}{s^\omega}$ est, lorsqu'elle est con-

Rien n'empêchera d'ailleurs d'employer à la fois l'une et l'autre des deux méthodes et d'en contrôler les applications l'une par l'autre.

---

vergente et non constante, une fonction qui admet toutes les substitutions du groupe et que, dans les cas où les séries

$$(a) \qquad \sum \frac{1}{s}, \quad \sum \frac{1}{s^2}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{s^{\omega-1}}$$

sont constantes, et dans certains cas où ces séries sont divergentes, cette fonction $\sum \frac{1}{s^\omega}$ n'admet pas d'autres substitutions du groupe; cette fonction est donc toujours une indication lorsque les précédentes sont divergentes et, dans certains cas, elle est même l'une des fonctions cherchées du groupe donné.

Si l'on considère au contraire, pour appliquer la première méthode, les séries analogues aux précédentes, formées au moyen des périodes $p = s - x$ du groupe

$$(b) \qquad \sum \frac{1}{p}, \quad \sum \frac{1}{p^2}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{p^{\omega-1}}, \quad \sum \frac{1}{p^\omega}$$

dans l'hypothèse où la $\omega^{\text{ième}}$ est convergente et les précédentes divergentes ou nulles, on ne peut se servir de $\sum \frac{1}{p^\omega}$ et éliminer les autres en choisissant, comme on peut le faire dans certains cas pour les séries $\sum \frac{1}{s^p}$, les $h_1, h_2, \ldots, h_{\omega-1}$ de manière que les séries

$$(c) \qquad \sum\left(h_1 - \frac{1}{p}\right), \quad \sum\left(h_2 - \frac{1}{p^2}\right), \quad \ldots, \quad \sum\left(h_{\omega-1} - \frac{1}{p^{\omega-1}}\right)$$

soient nulles. En effet, les fonctions $\Theta = \lambda\Theta_1 + \mu\Theta_2$ sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
&\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_2' = \Phi,\\
&\Theta_1\Theta_2'' - \Theta_2\Theta_1'' = \Phi' \;= 2\Phi\sum\left(h_1 - \frac{1}{p}\right),\\
&\Theta_1\Theta_2''' - \Theta_2\Theta_4''' = \Phi\Psi = 3\Phi\left\{\left[\sum\left(h_1 - \frac{1}{p}\right)\right]^2 + \sum\left(h_2 - \frac{1}{p^2}\right)\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Theta_1\Theta_2^{(\omega+1)} - \Theta_2\Theta_1^{(\omega+1)} = \chi_\omega,
\end{aligned}$$

où χ_ω ne dépend que des séries (c) et de $\sum \frac{1}{p^\omega}$ et se réduit à cette dernière à un facteur constant près lorsque les séries (c) s'annulent; on pourrait tirer parti de cette circonstance dans le cas

[R7f]

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE, AVEC UNE RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE AU CARRÉ DE LA VITESSE;

PAR M. CARLO BOURLET.

L'idée de traiter le petit problème qui va suivre m'a été suggérée par une acrobatie connue sous le nom anglais *looping the loop* et qu'exécutent actuellement des cyclistes acrobates dans diverses grandes villes du monde.

---

considéré si, les séries (c) étant supposées nulles, tous les premiers membres des équations, sauf le premier, ne se réduisaient identiquement à zéro lorsque seulement les deux premières des séries (c) c'est-à-dire Φ' et Ψ s'annulent. C'est ce qu'on peut vérifier facilement par des dérivations successives.

Il résulte de là, qu'en aucun cas les $h_1, h_2, \ldots$ ne peuvent être tels que les $\omega - 1$ séries (c) s'annulent ($\omega > 2$) et, par conséquent, il est impossible de tirer parti de la fonction $\sum \frac{1}{p^\omega}$ supposée convergente, comme nous l'avons fait dans certains cas de $\sum \frac{1}{s^\omega}$.

Si l'on remarque que l'équation du second ordre

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0$$

est précisément formée avec les deux séries en question (dont, d'après ce qui précède, la seconde ne peut s'annuler), on voit que les fonctions du groupe sont toujours les quotients des intégrales Θ de cette équation qui existe toujours lorsque les F elles-mêmes existent : ceci démontre à nouveau ce théorème, à savoir que les fonctions du groupe sont *toutes* données par la formule

$$\frac{\lambda F + \mu}{\nu F + \rho},$$

F étant l'une d'elles, théorème que nous avons établi directement et dont nous ne nous sommes pas servi pour former l'équation en Θ.

La piste sur laquelle s'effectue le tour, large de 1^m à 2^m, se compose d'abord d'une partie rectiligne très en pente suivie d'une boucle affectant, en gros, la forme d'une spire d'hélice. Le cycliste ne pédale pas, les deux roues sont folles. Il s'abandonne sans vitesse au haut de la pente rectiligne, entre à grande allure dans la boucle et en fait le tour sans tomber, maintenu par la force centrifuge.

Si nous considérons la trajectoire de son centre de gravité comme connue, nous pourrons assimiler approximativement le mouvement de ce centre de gravité à celui d'un point pesant qui se meut sur une courbe avec une résistance tangentielle proportionnelle au carré de la vitesse, car la résistance de l'air suit à très peu près cette loi.

1. Supposons donc, d'une façon générale, que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe, rapportées à trois axes rectangulaires, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante, soient exprimées en fonction de l'arc s. Admettons, en outre, que le point se meuve dans le sens des s croissants et que, pour $t = 0$, t étant le temps, on ait $s = 0$. Soient γ, γ' les cosinus des angles que font la tangente à la courbe dans le sens des s croissants et la normale principale avec l'axe Oz. Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure, on a, comme on sait,

$$\gamma = \frac{dz}{ds}, \qquad \frac{\gamma'}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds}.$$

Le point, de masse m, est alors soumis à trois forces : son poids mg, la résistance tangentielle kv^2 et la réaction normale à la courbe dont nous nommerons R_n la composante suivant la normale principale.

Les projections sur la tangente et la normale principale donnent alors les deux équations suivantes :

$$(1)\qquad m\frac{dv}{dt} = -mg\gamma - kv^2,$$

$$(2)\qquad m\frac{v^2}{\rho} = -mg\gamma' + R_n.$$

Supposons que l'on ait

$$z = f(s);$$

en remarquant alors que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds},$$

l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$(3)\qquad \frac{d(v^2)}{ds} + av^2 = -2g\,f'(s),$$

$f'(s)$ étant la dérivée de $f(s)$ et posant

$$a = \frac{2k}{m}.$$

Cette équation (3) linéaire en v^2 s'intègre immédiatement par les procédés classiques et donne

$$(4)\qquad v^2 = -2ge^{-as}\int_0^s f'(s)e^{as}\,ds + v_0^2\,e^{-as},$$

v_0 désignant la vitesse initiale au temps $t = 0$. On a ainsi v en fonction de s et, comme $v = \frac{ds}{dt}$, on aurait t en fonction de s par une seconde quadrature.

Le problème est donc résolu, dans tous les cas, par deux quadratures.

2. Pour que le cycliste tienne sur la piste, il faut, en outre, que la valeur de R_n soit toujours positive, car il

décrit à peu près une géodésique sur cette piste. Or la formule (2) donne

$$R_n = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\gamma'\right)$$

ou

$$R_n = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\rho f''(s)\right),$$

$f''(s)$ étant la dérivée seconde de $f(s)$.

ρ étant positif, on doit donc avoir, à chaque instant,

$$v^2 + g\rho^2 f''(s) > 0$$

ou

$$(5)\qquad -2ge^{-as}\int_0^s f'(s)e^{as}\,ds + v_0^2 e^{-as} + g\rho^2 f''(s) > 0.$$

Le centre de gravité ne pourra donc parcourir que la portion de la courbe qui vérifiera cette inégalité (5).

3. Appliquons ceci au cas du cycliste. Il descend d'abord le long d'une ligne droite. Comptons le chemin parcouru s à partir du point le plus haut où la vitesse v_0 est nulle. On aura alors

$$f'(s) = -\cos\alpha,$$

α désignant l'angle aigu de la ligne avec l'axe Oz.

La valeur de v^2 fournie par la formule (4) devient alors

$$v^2 = 2ge^{-as}\cos\alpha\int_0^s e^{as}\,ds$$

ou

$$v^2 = \frac{2g\cos\alpha}{a}(1 - e^{-as}).$$

Cette formule montre que, à mesure que le cycliste descend, s croissant, sa vitesse v croît et tend asymptotiquement vers la valeur limite $\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{a}}$. Son mouvement de descente tend donc à devenir uniforme.

4. En fait, il parcourt sur la pente un chemin de longueur connue l et arrive donc au bas avec la vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{a}(1 - e^{-al})}. \tag{6}$$

C'est sa vitesse d'entrée dans la boucle.

Admettons alors que la boucle soit une hélice circulaire à axe horizontal

$$x = r\sin\theta, \qquad y = h\theta, \qquad z = r(1-\cos\theta),$$
$$s = \sqrt{h^2+r^2}\,\theta.$$

Le point d'entrée dans cette hélice n'est pas le point le plus bas où $\theta = 0$, mais un point voisin, et nous pourrons admettre, sans erreur sensible, pour des applications pratiques, que la vitesse de passage au point le plus bas est égale à v_0 [1]. L'équation (4) donne alors, dans ce cas,

$$v^2 = -2ge^{-b\theta}\int_0^\theta r\sin\theta\, e^{b\theta}\,d\theta + v_0^2\,e^{-b\theta},$$

en posant

$$b = a\sqrt{h^2+r^2} = \frac{2k\sqrt{h^2+r^2}}{m}.$$

On en tire

$$v^2 = \frac{2gr}{1+b^2}(\cos\theta - b\sin\theta) + \left(v_0^2 - \frac{2gr}{1+b^2}\right)e^{-b\theta}.$$

Comme ici,

$$\rho = \frac{h^2+r^2}{r},$$

la condition (5) devient

$$\frac{2gr}{1+b^2}(\cos\theta - b\sin\theta)$$
$$+\left(v_0^2 - \frac{2gr}{1+b^2}\right)e^{-b\theta} + g\,\frac{r^2+h^2}{r}\cos\theta > 0$$

---

[1] En fait, elle est un peu supérieure à v_0 et, par suite, nous nous plaçons dans des conditions plus défavorables que la réalité.

et l'on en tire

$$(7)\quad v_0^2 > \frac{2gr}{1+b^2}\left(1 - \cos\theta\, e^{b\theta} + b \sin\theta\, e^{b\theta} - \frac{(r^2+h^2)(1+b^2)}{2r^2}\cos\theta\, e^{b\theta}\right).$$

Pour que le cycliste fasse le tour de la boucle sans encombre, il faut que cette inégalité soit vérifiée pour toutes les valeurs de θ de o à 2π. En égalant à zéro la dérivée de la quantité placée entre parenthèses, on trouve qu'elle s'annule pour la valeur θ_1 donnée par l'égalité

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{b(r^2+h^2)}{3r^2+h^2}.$$

Dans l'intervalle o, 2π, il y a deux valeurs de θ_1 ; l'une, la plus petite, qui donne le minimum; l'autre, la plus grande, qui donne le maximum du second membre de l'inégalité (7). Pour que l'inégalité (7) soit toujours vérifiée, il faut donc et il suffit qu'elle le soit pour la valeur θ_1 comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$ donnée par la formule (8). Cette valeur de θ_1 correspond au point critique de la course. Dans la pratique, b étant très petit, θ_1 est voisin de π et il suffira de vérifier largement l'inégalité (7) pour $\theta = \pi$.

D'ailleurs, si l'on y remplace v_0 par sa valeur (6), on aura une égalité qui pourrait déterminer la limite inférieure de l, c'est-à-dire de la distance que doit parcourir le cycliste dans la descente rectiligne pour pouvoir passer la boucle.

5. Nous avons supposé, dans l'étude précédente, que la forme de la boucle était celle d'une hélice circulaire. En pratique, cette forme serait désavantageuse et même dangereuse pour le cycliste. En effet, dans la descente rectiligne, la réaction est constante et égale à la compo-

sante normale du poids. Lorsque le centre de gravité pénètre dans la partie hélicoïdale de sa trajectoire, le rayon de courbure ρ, d'abord infini, prend brusquement une valeur finie. La réaction augmente brusquement de la quantité $\frac{mv_0^2}{\rho}$; il en est donc de même de la pression de la machine sur la piste. A la sortie de la boucle, les choses se passeraient en ordre inverse et la pression diminuerait brusquement d'une quantité notable. Or, comme la bicyclette repose par *deux* points sur la piste, la pression se partage sur ces deux appuis et l'augmentation ou diminution de pression se ferait d'abord sur la roue d'avant et ensuite sur la roue d'arrière. Ceci équivaudrait donc à un choc qui pourrait faire basculer l'acrobate. Pour y remédier, il faut donc substituer à l'hélice une courbe dont le rayon de courbure, d'abord infini à l'entrée, décroît d'une façon continue jusqu'à un minimum au haut de la boucle pour reprendre ensuite les mêmes valeurs en sens inverse et redevenir infini à la sortie. Dans cet ordre d'idées, la trajectoire la plus avantageuse serait celle pour laquelle R_n resterait constante.

D'une façon plus précise, il faudrait donc trouver une courbe telle que, pour $s = 0$, on ait $\frac{1}{\rho} = 0$ et qu'en outre, lorsqu'elle est décrite par un point matériel, la composante R_n reste constante.

Ce problème admet, comme il est facile de le voir, une infinité de solutions dont chacune ne dépend que de quadratures.

Si, en effet, on se donne arbitrairement z en fonction de s, c'est-à-dire $f(s)$, ainsi que la constante v_0, v^2 est parfaitement déterminé en fonction de s par la formule (4).

En posant alors

$$R_n = C m$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation du second degré en $\frac{1}{\rho}$

$$(9) \qquad \frac{v^2}{\rho^2} - \frac{C}{\rho} + g f''(s) = 0.$$

Pour que $\frac{1}{\rho} = 0$ pour $s = 0$, il suffira que $f(s)$ soit tel que

$$f''(0) = 0,$$

et, en outre, l'équation (9) devra avoir des racines réelles, ce qui est possible pour C assez grand.

On est alors ramené au problème de Géométrie suivant :

Déterminer une courbe gauche connaissant z et ρ en fonction de s.

On aura, pour déterminer x et y, les deux équations différentielles

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = F^2(s),$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \Phi^2(s),$$

$F(s)$ et $\Phi(s)$ étant des fonctions connues de s.

Ce système s'intègre facilement par des quadratures, car, si l'on pose

$$\frac{dx}{ds} = F(s)\cos u, \qquad \frac{dy}{ds} = F(s)\sin u,$$

on a

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = F'^2(s) + F^2(s)\left(\frac{du}{ds}\right)^2.$$

Par suite, u s'obtient par une quadrature, en fonction de s, par l'égalité

$$F'^2(s) + F^2(s)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \Phi^2(s);$$

et, u étant connu, on aura x et y en fonction de s par deux nouvelles quadratures.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — Relativement au point de contact Γ du cercle des neuf points et du cercle inscrit (p. 14 de ce Volume), l'emploi du point L, défini par la condition $AK = 2r$, a été indiqué par M. Mannheim (*Bulletin de mathématiques élémentaires*, 1901-1902, p. 112 et 180). La construction la plus simple du point Γ est celle qui consiste à prendre $AD = r$ et à mener FD.

La démonstration du théorème de Feuerbach donnée par M. W.-R. Hamilton montre que la quatrième tangente commune Δ au cercle inscrit et à l'*ellipse* U *qui touche les côtés du triangle en leurs milieux* est la tangente de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points. Les propriétés du quadrilatère circonscrit à une conique et un quadrangle inscrit correspondant donnent alors ceci (Salmon, *Sections coniques*, p. 532). Soit un triangle ABC; soient a, b, c les milieux des côtés, et a', b', c' les points de contact du cercle inscrit; bc et $b'c'$ se coupent en α, ... Le centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $a'b'c'$ est le point de contact d' de Δ et du cercle inscrit, c'est-à-dire le point de contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points (c'est la propriété dont s'est occupé M. Canon); on aurait de même le point d où Δ touche la conique U. Le triangle $\alpha\beta\gamma$, circonscrit au triangle ABC, conjugué par rapport au cercle inscrit et à l'ellipse U, est homologique au triangle ABC, et l'axe d'homologie est la tangente Δ.

La démonstration de Gérono est élémentaire en ce sens qu'il ne considère pas l'ellipse des points milieux (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 220). M. J. Griffiths a transformé la construction (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 429; 1866, p. 228), de manière à écarter le triangle abc. Le centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC est à l'infini, c'est-à-dire que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont parallèles; leur direction est celle de l'axe d'homologie ω de ABC et $a'b'c'$. Ces parallèles à cet axe ω coupent BC, CA, AB en x, y, z, et l'axe d'homologie des deux triangles ABC et xyz est la tangente Δ; cette tangente est donc la droite que l'on appelle souvent *la polaire du point à l'infini sur* ω *par rapport au triangle* ABC (l'enveloppe des polaires analogues de tous les points à l'infini est la conique U).

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique; par M. *G. Humbert*, membre de l'Institut. — Tome I. — 1 vol. in-8 de xv-483 pages avec 111 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Voici enfin un *Cours d'Analyse* écrit *pour des élèves*, qu'ils liront facilement, rapidement et avec plaisir! C'est là le plus bel éloge que l'on puisse faire de ce remarquable Ouvrage.

M. G. Humbert a bien voulu oublier, en composant ce Cours, qu'il était un mathématicien de grand talent, capable de se livrer aux spéculations mathématiques les plus élevées et les plus ardues, pour faire un Livre simple et bien à la portée des jeunes gens auxquels il s'adresse. En le lisant on regrette de n'avoir plus vingt ans pour pouvoir goûter le réel plaisir d'entendre un pareil maître exposer lui-même ce Cours si clair, auquel la parole doit donner encore plus de charme et de limpidité.

Le Volume débute par des généralités sur les limites, la continuité, les infiniment petits et les différentielles. La méthode très simple et très précise pour établir les principales propositions sur les fonctions continues de deux variables au moyen d'un lemme de *décomposition des aires en carrés* est à noter tout spécialement. L'auteur annonce, dans sa préface, qu'il doit sur ce point quelques indications à M. Painlevé; la collaboration de deux tels savants ne pouvait que donner d'heureux résultats!

Au lieu de lancer immédiatement ses lecteurs dans des développements abstraits de calcul pur, M. Humbert leur donne de suite au Chapitre II des exemples d'applications des infiniment petits aux courbes planes. C'est là une excellente méthode qu'il conserve d'un bout à l'autre de l'Ouvrage. L'élève voit dès l'abord l'utilité des considérations nouvelles qu'on vient de lui présenter et son esprit se repose en traitant quelques exemples concrets qui d'ailleurs l'éclairent. Dans le même ordre d'idées l'exposition des changements de variables au troisième Chapitre est immédiatement suivie de notions sur les transformations de contact avec deux exemples classiques de Legendre et Lie. Le Chapitre IV est réservé à la formation des équations différentielles, sujet important pour faire comprendre aux étudiants le sens de l'intégration de ces équations et qu'on néglige trop souvent.

Enfin les derniers Chapitres V à VIII du Calcul différentiel traitent des séries, des développements en séries des fonctions de une et plusieurs variables et de leurs applications usuelles à la recherche des maxima et minima. Incidemment l'auteur, à propos des séries de variables imaginaires, donne quelques premières notions sur les fonctions de ces variables et, en particulier, les définitions de e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\log(1+z)$, $\log z$ et z^n. Il semble que, dans un Cours qui s'adresse à de futurs ingénieurs, la théorie des fonctions de variables imaginaires doive être réduite à ses principes essentiels, à ceux qui leur seront nécessaires pour pouvoir saisir la théorie des périodes des intégrales et celle des fonctions elliptiques. C'est aussi, croyons-nous, le sentiment de M. Humbert.

La seconde Partie du Volume est intitulée : *Principes du Calcul intégral.*

L'auteur consacre d'abord deux Chapitres aux intégrales indéfinies, leur recherche dans les cas classiques élémentaires et leur réduction dans le cas des intégrales elliptiques et hyperelliptiques. Ce sont là deux Chapitres *pratiques* fort utiles et l'on ne saurait trop louer l'habile professeur d'avoir ainsi insisté sur le calcul élémentaire auquel les élèves doivent, avant tout, être bien rompus. Les Chapitres III et IV sont ensuite réservés aux intégrales définies, avec l'examen minutieux des cas où les limites ou l'élément différentiel deviennent infinis. La théorie de l'intégration des séries et celle de la dérivation sous le signe $\int$ sont finalement exposées au Chapitre VI. Toujours fidèle à sa méthode, M. Humbert multiplie les applications : aux aires, aux arcs, aux développements en série de Fourier, etc.

L'étude complète, méthodique, des applications géométriques fait l'objet de la dernière Partie de l'Ouvrage. Certaines notions générales, quelques formules simples ont déjà été données auparavant pour accompagner les théories abstraites d'exemples concrets. L'auteur reprend maintenant le tout avec ampleur, quoiqu'en préférant presque toujours les méthodes les plus simples. Il commence, au Chapitre I, par la théorie du contact et celle des enveloppes. Procédant du simple au compliqué, il étudie d'abord le contact des courbes planes pour ne passer qu'ensuite aux courbes gauches, et, en suivant le même ordre pour la théorie des enveloppes, il termine par quelques notions sur les congruences de droites et de courbes.

Ce Chapitre de généralités sert d'introduction aux deux suivants où l'auteur entre dans le détail : tangente, normales, courbure, torsion, cercle de courbure, sphère osculatrice, etc. sont successivement passés en revue pour les courbes planes et gauches avec de nombreux exemples.

Le Chapitre IV apprend à calculer les aires des surfaces gauches. Enfin, les deux derniers Chapitres sont réservés à la théorie des surfaces : étude de la courbure des lignes tracées sur une surface et passant par un point; indicatrice; lignes de courbure et lignes asymptotiques; théorème de Dupin. Peut-être ici M. G. Humbert a-t-il, contre son habitude, été un peu bref; mais, dans l'ignorance où nous sommes de ce que contiendra son prochain Volume, nous n'aurions garde de lui reprocher d'avoir omis ce qu'il nous donnera peut-être bientôt. Il termine enfin par des indications relativement détaillées sur les surfaces applicables et les représentations conformes.

Il nous a été difficile, pour ne pas dire impossible, dans ce rapide compte rendu de ce bel Ouvrage, de donner une idée de sa clarté, de sa netteté, en un mot, de sa parfaite conformité aux besoins des jeunes étudiants auxquels il s'adresse. C'est un Livre qu'il faut lire et surtout qu'il faut *faire lire* à des élèves. C. B.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnée une courbe de genre p, énoncer et démontrer le théorème d'Abel concernant les sommes d'intégrales abéliennes de première espèce.*

Indiquer ensuite quel est le système d'équations différentielles définissant les fonctions abéliennes correspondant à la courbe, et établir, en se servant du théorème d'Abel, que ces fonctions de p variables sont uniformes.

II. *Soient une courbe de genre* UN *et l'intégrale de première espèce qui lui correspond. Montrer que le rapport des deux périodes de cette intégrale ne peut être un nombre réel.*

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de calculer la valeur de l'intégrale curviligne*

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2}$$

prise, dans le sens positif, le long d'un contour fermé C comprenant l'origine à son intérieur; α, β, γ, δ sont quatre constantes et l'on a

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

(Octobre 1901.)

Nancy.

I. *Décomposition d'une fonction elliptique en facteurs; application à $\mathfrak{p}'u$.*

II. *On considère la surface définie par les équations*

$$x = \frac{1}{u}, \qquad y = \frac{\operatorname{sn} v}{u}, \qquad z = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v},$$

u et v étant les deux variables, et les fonctions $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ *étant construites avec le module k supposé réel positif et moindre que* UN.

1° *Trouver l'équation ponctuelle de la surface;*

2° *Trouver ses génératrices rectilignes remarquables;*

3° *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que quatre génératrices appartiennent à une même quadrique et appliquer cette condition à la recherche des quadriques qui touchent la surface donnée suivant deux droites.*

(Juillet 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1549.

(1885, p. 438.)

Une ellipse de grandeur invariable (demi-axes a et b) se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné; démontrer que le lieu géométrique du centre de cette ellipse est une courbe fermée du quatrième degré, dont l'aire a pour expression $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Nous utiliserons des formules employées par M. Barisien pour une question analogue (voir *J. M. S.*, 1898, p. 158). Si θ désigne l'angle aigu que fait une tangente avec le grand axe d'une ellipse d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, l'équation de la tangente est

$$x \sin\theta + y \cos\theta = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$$

et celle de la normale est

$$x\cos\theta - y\sin\theta = \frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

en sorte que les distances δ_c et Δ_c du centre à chacune de ces droites sont

$$\delta_c = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

et

$$\Delta_c = \frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}.$$

Si donc l'ellipse d'axes $2a$, $2b$ se meut en restant tangente à l'axe des x à l'origine, les coordonnées du centre sont

(1) $$x = \frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

(2) $$y = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

En outre

(3) $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

De (2) et (3) on tire

$$\sin^2\theta = \frac{y^2 - b^2}{a^2 - b^2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{y^2 - a^2}{b^2 - a^2}.$$

Mais (1) peut s'écrire

$$x^2y^2 = (a^2 - b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta = -(y^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

Le lieu est donc

$$x^2y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

C'est une quartique circulaire fermée.

L'aire A de cette courbe s'obtient aisément en considérant les équations (1) et (2),

$$dy = \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

Prenant $\tan\theta = t$ pour variable il vient

$$A = 2(a^2 - b^2)^2 \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2(a^2t^2+b^2)}.$$

Or

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2(a^2t^2+b^2)}$$
$$= \frac{-1}{a^2-b^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\,\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\,\frac{1}{a^2t^2+b^2}.$$

Donc

$$A = 2\left((b^2-a^2)\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} + a^2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - ab\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2}\right).$$

Remarquant que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} t)_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2} = \left(\operatorname{arc\,tang}\frac{at}{b}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$A = 2\left(\frac{b^2-a^2}{4}\pi + \frac{a^2\pi}{2} - \frac{ab\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION PROPOSÉE

Par M. E.-N. Barisien.

Glissette d'un point donné du plan de l'ellipse. — Soient α et β les coordonnées de ce point par rapport aux axes de symétrie de l'ellipse, on trouve pour les coordonnées de ce point par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy

$$X = \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta + \frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

$$Y = \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

et pour l'aire de l'une des deux ovales de la glissette

$$U = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

En particulier, pour le lieu de la *glissette des foyers* ($\alpha = \pm c$, $\beta = 0$), on a

$$U = \frac{\pi}{2}(a - b)(3a + b).$$

L'équation cartésienne de cette glissette est du sixième degré

$$X^2(Y^2 + b^2)^2 + Y^2(Y^2 - b^2)^2 = 4c^2Y^4$$

ou encore

$$X^2 = \frac{Y^2[(a + c)^2 - Y^2][Y^2 - (a - c)^2]}{(Y^2 + b^2)^2}.$$

L'aire de la podaire du point (α, β) par rapport à la développée de l'ellipse est

$$V = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

On a, par conséquent, la relation curieuse

$$V - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(a - b)^2,$$

indépendante de la position du point (α, β).

On a aussi pour l'aire de la podaire de l'ellipse par rapport au point (α, β),

$$W = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2),$$

avec la relation

$$W - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(a + b)^2.$$

QUESTIONS.

1969. Soit PQ une corde d'une ellipse de centre O. Montrer que lorsque la corde PQ *tend vers zéro*, l'orthocentre H du triangle OPQ a une limite. Le lieu de ce *point-limite* est une sextique unicursale dont l'aire est équivalente à la somme des aires de l'ellipse et de sa développée.

(E.-N. BARISIEN.)

1970. Le cylindre dont la section droite est la courbe représentée par l'équation intrinsèque $\rho = a - \frac{s^2}{b}$ (a et b étant des constantes positives) a la propriété *caractéristique* qu'on peut tracer, sur sa surface, des géodésiques à courbure constante.

Ces courbes ont pour rayon de courbure géodésique $\sqrt{ab}$ et pour rayon de courbure absolue $a\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

(G. PIRONDINI.)

1971. Soient R le rayon de courbure d'une courbe, R_1 celui de la représentation sphérique des tangentes, T le rayon de torsion, ρ le rayon de la sphère osculatrice, s l'arc de la courbe donnée; démontrer les relations

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right)^2, \tag{1}$$

$$\left(\frac{R^2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{T}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

et dire ce que devient la relation (2) dans l'hypothèse

$$\rho = \text{const.}, \qquad T = \text{const.}$$

(SOLON CHASSIOTIS.)

[L¹1a]

SUR QUELQUES RAPPORTS ENTRE LES TRIANGLES ET LES CONIQUES;

PAR M. GEORGES MAJCEN, à Agram.

Les recherches suivantes se rapportent à des groupes de six points situés sur les côtés d'un triangle donné, et remplissant une certaine condition.

J'ai déjà signalé dans mon Mémoire : *Uber gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie* (¹) de tels groupes de points, qui dépendent d'un *angle* quelconque ω. Des observations analogues peuvent être faites en remplaçant l'angle ω par une *longueur* (S) donnée, de laquelle dépendent des groupes nouveaux.

Ici, je me propose d'indiquer quelques relations métriques, d'une façon purement géométrique; cette méthode me semble présenter un certain intérêt, bien que ce ne soit pas la plus concise.

1. Étant donné un triangle ABC (les trois angles étant aigus) (*fig.* 1), on décrit de chaque sommet comme centre, un cercle avec le *même* rayon. Nous allons démontrer que les trois couples de points d'intersection A′, A″; B′, B″; C′, C″ des cercles avec les côtés opposés respectifs sont situés sur une *conique*.

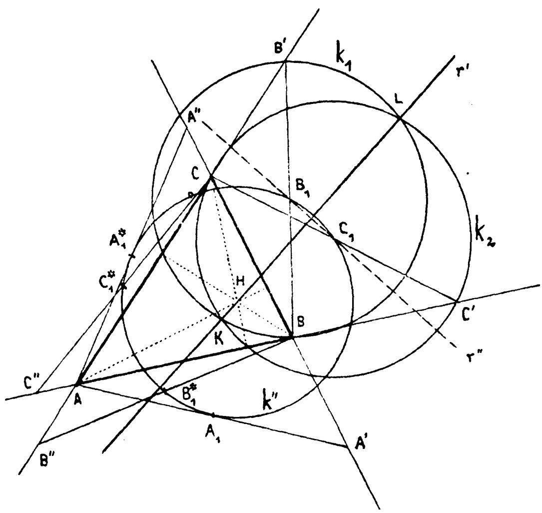
Examinons auparavant les positions des milieux des six rayons AA′, AA″, ..., CC″. Soient B_1 et C_1 les milieux des longueurs BB′ = CC′. Si l'on décrit, sur les

(¹) *Archiv der Mathematik und Physik*, 3ᵉ série, t. IV, p. 76.

diagonales BB′ et CC′ du quadrilatère complet BCB′C′ comme diamètres, les cercles k_1 et k_2, leurs points d'intersection seront K et L. L'axe radical est l'axe de symétrie du segment B_1C_1.

D'après un théorème connu ([1]), les côtés de tout angle droit, dont le sommet est le point K ou L, touchent une certaine conique, inscrite dans le quadrilatère BCB′C′. La droite r' (ou KL) sera la directrice de l'unique *parabole* possible inscrite dans le quadrilatère.

Fig. 1.



On sait aussi que les orthocentres des quatre triangles, déterminés par les trois couples des côtés du quadrilatère, sont situés sur la directrice de cette parabole ([2]).

([1]) *Voir* Reye, *Die Geometrie der Lage*, 3ᵉ édit., Iʳᵉ Partie, p. 214.

([2]) La droite de Newton B_1C_1 est perpendiculaire sur r'. *Voir* Steiner-Weierstrass, *Gesammelte Werke*, t. I, p. 223, 6°, 7°.

Comme les points B_1 et C_1 symétriques par rapport à la droite r', ces points seront également distants de l'orthocentre H du triangle ABC, qui est un de ces quatre triangles précités.

On démontrera de la même manière que les milieux A_1 et C_1 des segments AA' et CC' et aussi les milieux A_1^* et B_1^* des longueurs AA'' et BB'' sont équidistants de l'orthocentre H.

On aura la même démonstration pour un triangle obtusangle. Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'on mène de chaque sommet du triangle ABC *deux droites telles que les longueurs des six segments limités aux côtés opposés respectifs soient égales, les milieux de ces six segments sont sur un cercle ayant pour centre l'orthocentre du triangle.*

2. En vue de ce qui doit suivre, considérons le triangle ABC, avec les six segments égaux AA', AA'', BB', ..., CC'', comme une *projection centrale* d'une certaine figure de l'espace. Le plan du triangle ABC étant le plan de projection, soient A, B, C les traces et A', A'', ..., C'' les points de fuite des six droites respectives a', a'', b', ..., c'' de l'espace (*fig.* 2).

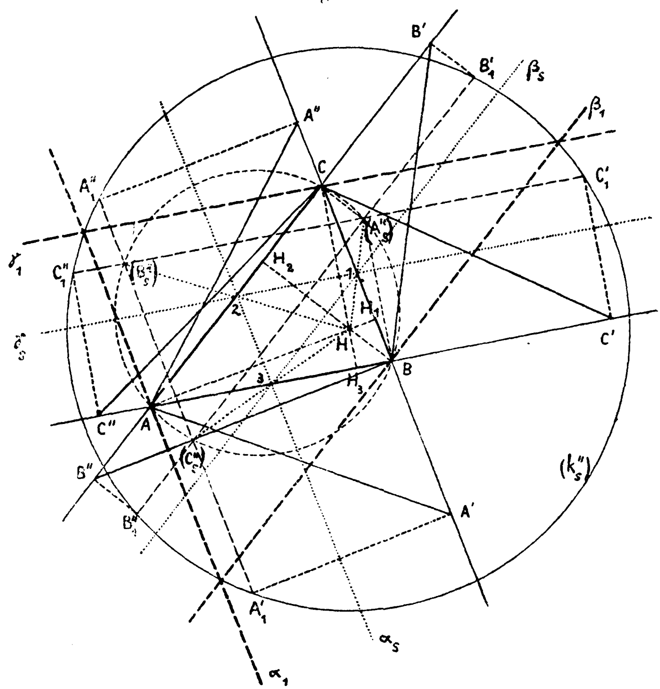
Élevons par l'orthocentre H une perpendiculaire au plan de projection et choisissons sur celle-ci un point (Z) quelconque. Ce point (Z) étant le centre de projection, chaque couple de droites : a', a''; b', b''; c', c'' sera symétrique par rapport à un certain plan σ_1, σ_2, σ_3, mené par la perpendiculaire ZH et la hauteur respective du triangle ABC.

Le plan π' étant le premier plan parallèle (appelons ainsi le plan mené par Z parallèlement au plan de projection), les traces des six droites a', a''; b', b''; c', c''

sur ce plan seront sur une *circonférence* k''_s ayant le point Z pour centre, puisque les six longueurs des projections sont toutes *égales*.

Menons le deuxième plan parallèle π'' (c'est-à-dire le plan symétrique du plan π' par rapport au plan de pro-

Fig. 2.



jection); les traces des six droites a', a'', b', b'', c', c'' sur ce plan π'' seront aussi sur une circonférence. En effet, nous avons démontré que les milieux A_1, A^*_1, B_1, B^*_1, C_1, C^*_1 des six longueurs AA', AA'', ..., CC'' sont situés sur une circonférence (k''). Ces milieux sont dans notre interprétation de la figure de l'espace les projections des traces des six droites a', a'', b', ..., c''

sur le plan π''; alors ces traces considérées seront sur une *circonférence* k''_s. Nous ajoutons seulement que le rayon du cercle k'' est au rayon du cercle k''_s comme 1 à 2.

Considérons spécialement le couple des droites a', a'', leurs traces sur le plan π' étant A'_v et A''_v, et sur π'', A'_s et A''_s. Les triangles $AA'_vA''_v$ et $ZA'A''$ sont congruents, parce que ZA' et ZA'' étant les droites de fuite correspondantes aux droites a' et a'', les longueurs $A'_vA''_v$ et $A'A''$ sont égales. On voit de même que les longueurs $A'_sA''_s$ et $A'A''$ seront aussi égales.

On démontre de la même manière que les *cordes* B'_v, B''_v et B'_s, B''_s déterminées par les droites b' et b'' sur les circonférences k'_v et k''_s sont égales à la longueur $B'B''$ sur le côté AC du triangle ABC, et de même pour le troisième couple C', C''.

Ces rapports ne dépendent pas d'un choix arbitraire du centre de projection Z sur la perpendiculaire ZH, parce qu'ils sont indépendants des relations angulaires.

Soient α, β, γ les plans passant par $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$. Ils seront parallèles aux trois plans déterminés par Z et les côtés BC, AC, AB respectivement. Cherchons les projections centrales des droites d'intersection des plans α, β, γ avec le plan π''. Les traces de ces trois plans α, β, γ sur le plan de projection sont les côtés BC, AC, AB, et leurs droites de fuite les trois parallèles α_1, β_1, γ_1 menées par les sommets A, B, C aux côtés opposés. La droite α_s qui passe par le milieu de la distance des droites α_1 et BC parallèlement à celles-ci sera la *projection* de la droite *commune* aux *plans* α et π''. Nous obtiendrons de la même manière les projections des deux autres droites $(\beta\pi'')$ et $(\gamma\pi'')$ en β_s et γ_s. Les trois lignes α_s, β_s, γ_s forment un triangle nouveau 123, inscrit au triangle ABC, dont les côtés auront des longueurs égales aux moitiés des côtés parallèles du triangle fondamental.

Il suit de là que le triangle ABC et le triangle formé par les trois droites $(\alpha\pi'')$, $(\beta\pi'')$, $(\gamma\pi'')$ sont *congruents,* parce que les côtés de celui-ci sont les doubles des côtés correspondants du triangle 1 2 3, c'est-à-dire de la projection du triangle sur π''.

Projetons le triangle, dont les directions des côtés sont $(\pi''\alpha)$, $(\pi''\beta)$, $(\pi''\gamma)$, sur le plan de projection (ABC), orthogonalement. Les projections orthogonales des points en lesquels les droites $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ percent le plan π'', seront A'_1, A''_1, B'_1, B''_1, C'_1, C''_1, points situés sur un cercle (k''_s) qui est la projection orthogonale du cercle k''_s sur π''. Les trois cordes de ce cercle : $A'_1A''_1$, $B'_1B''_1$, $C'_1C''_1$ seront égales aux longueurs $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.

Le triangle considéré $A''_sB''_sC''_s$ aura pour projection orthogonale le triangle $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$.

Le couple de droites a', a'' donne avec la corde $A'_1A''_1$ (sur π'') un triangle $AA'_1A''_1$. Le plan de celui-ci forme avec le plan de projection le même angle que le plan du triangle $ZA'A''$. A cause de la congruence des triangles $AA'_1A''_1$ et $ZA'A''$, les projections orthogonales de leurs hauteurs auront alors les mêmes longueurs, c'est-à-dire que la distance de la corde $A'_1A''_1$ au sommet A sera *égale à la distance* HH_1, H_1 étant le point d'intersection de la hauteur AH avec le côté BC. Nous trouverons pareillement que les distances des cordes $B'_1B''_1$ et $C'_1C''_1$ à B et C seront égales aux distances HH_2 et HH_3, respectivement.

Le sommet (A''_s) du triangle $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ est alors le point d'intersection des cordes $B'_1B''_1$ et $C'_1C''_1$. La corde $B'_1B''_1$ divise la hauteur BH_2 du triangle ABC en deux parties, dont la première sera égale à la longueur HH_2 ; or on voit que l'autre doit être égale à BH.

Nous démontrerons que la longueur $C(A''_s)$ est égale à BH.

Le triangle $A''_s B''_s C''_s$, dans le plan π'', et sa projection 1 2 3 sont des triangles homologiques par rapport au point Z comme centre d'*homologie*. Le triangle 1 2 3 et la projection orthogonale $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ du premier seront aussi *homologiques* par rapport à la projection orthogonale H du centre Z.

Alors les points H, 1, (A''_s) se trouvent sur la même droite. Nous avons vu que la distance du sommet C à $C'_1 C''_1$ est égale à $\overline{HH_3}$; or la droite γ_s (ou 1, 2) divise aussi la distance entre H et $C'_1 C''_1$ en deux parties égales. On a

$$\overline{1H} = \overline{1(A''_s)} \qquad \text{et} \qquad \overline{1C} = \overline{1B};$$

alors le quadrilatère $HB(A''_s)C$ est un parallélogramme. Comme BH est perpendiculaire sur CA et CH sur AB, $(A''_s)C$ sera aussi perpendiculaire sur CA et $(A''_s)B$ sur AB. On démontre pour (B''_s) et (C''_s) des propriétés pareilles [1].

Nous appliquerons aux points A'_1, A''_1, B'_1, B''_1, C'_1, C''_1, communs au cercle (k''_s) et aux côtés du triangle $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$, l'équation de Carnot :

$$\frac{(A''_s)C'_1 \cdot (A''_s)C''_1}{(B''_s)C'_1 \cdot (B''_s)C''_1} \, \frac{(B''_s)A'_1 \cdot (B''_s)A''_1}{(C''_s)A'_1 \cdot (C''_s)A''_1} \, \frac{(C''_s)B'_1 \cdot (C''_s)B''_1}{(A''_s)B'_1 \cdot (A''_s)B''_1} = 1.$$

Nous aurons aussi la même relation pour le triangle ABC et les points A', A'', B', B'', C', C'', parce que les triangles ABC et $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ sont congruents et que

---

[1] Les triangles ABC et $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ sont en *homologie centrale;* ils sont inscrits à un cercle.

l'on a

$$AC'' = (B''_s)C''_1, \qquad BC' = (A''_s)C'_1, \qquad BA' = (C''_s)A'_1,$$
$$CA'' = (B''_s)A''_1, \qquad CB' = (A''_s)B'_1, \qquad AB'' = (C''_s)B''_1.$$

Le théorème suivant est alors établi :

Étant menées de chaque sommet d'un triangle deux droites, telles que toutes les six aient, jusqu'aux côtés opposés respectifs, la même longueur, les six points d'intersection sur les côtés seront situés sur une conique (k).

En général, cette conique ne sera pas un cercle, parce que les positions des six longueurs AC″, BC′, CA″, AB″, CB′, BA′ ne seront pas les mêmes par rapport à ABC et à $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$.

En tenant compte d'un théorème connu [1], on a, réciproquement, la proposition suivante :

Étant menées de chaque sommet d'un triangle deux droites, telles que toutes les six aient, jusqu'aux côtés opposés respectifs, la même longueur, les six droites seront tangentes à une conique (k').

Nous remarquons que les trois cordes A′A″, B′B″, C′C″ de la conique k ont des symétrales [2] passant par un même point (H); et, dans cet ordre d'idées, nous nous bornons à proposer la question suivante :

Combien y a-t-il de cordes d'une conique, dont les symétrales passent par un point donné? Comment seront-elles déterminées?

---

[1] *Voir* STEINER-SCHRÖTER, *Die Theorie der Kegelschnitte*, 2e édit., p. 222, exemple 24.

[2] Ce mot semble être employé ici par l'auteur, comme équivalent à celui d'axe de symétrie. (N. D. L. R.)

3. Nous examinerons la position des six points A′, A″, B′, B″, C′, C″ à l'égard des longueurs

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC'' = S$$

et des formes du triangle fondamental ABC, et nous déterminerons les espèces des coniques (k) qui en résultent.

Il faut distinguer les positions des six points par rapport aux sommets du triangle par les signes $+$ et $-$ et prendre en considération les combinaisons qui rendent positif le premier membre de l'équation de Carnot.

Dans cette équation

$$\frac{BA'.BA''}{CA'.CA''}\frac{CB'.CB''}{AB'.AB''}\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''} = 1,$$

les douze longueurs auront des signes déterminés; ces signes seront, par exemple pour BA′ et BA″, *différents* ou *identiques* selon que les points A′ et A″ (sur BC) occupent des régions différentes ou la même région par rapport au sommet B; en cela, le choix du sens positif du côté BC reste entièrement indifférent.

Le premier membre de l'équation de Carnot aura, en raison de toutes les variations possibles entre les signes des douze longueurs, 729 formes. Parmi ces formes, choisissons seulement celles qui rendent les trois quotients *positifs,* ou deux *négatifs* et un *positif* [1].

4. Nous considérerons les positions essentiellement diverses des points A′, A″, B′, B″, C′, C″ pour un triangle ABC général, ayant ses trois angles *aigus*. Les points C′ et C″ sont ou tous les deux (sur le côté AB)

---

[1] Je n'ai pu trouver ni dans la *Géométrie de position,* de Carnot, ni dans un autre Ouvrage la distinction des espèces de coniques à l'égard de l'équation de Carnot. Les considérations suivantes se rapportent au théorème donné dans le n° 2.

entre les points A et B, ou tous les deux *hors* du segment $\overline{AB}$, de part et d'autre des sommets A, B, ou enfin l'un *sur* le segment $\overline{AB}$, l'autre *en dehors*. Pour le triangle ABC choisi, le cas où les deux points seraient hors du segment $\overline{AB}$, et du même côté d'un des sommets (A ou B) ne sera pas possible.

Alors nous aurons pour le triangle ABC les cas typiques suivants (*fig.* 3, 4, 5 et 6) :

Fig. 3.

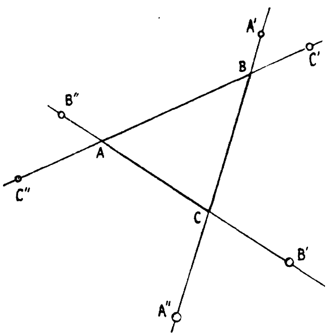


Fig. 4.

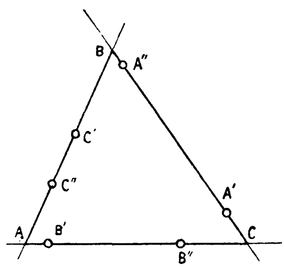


Fig. 5.

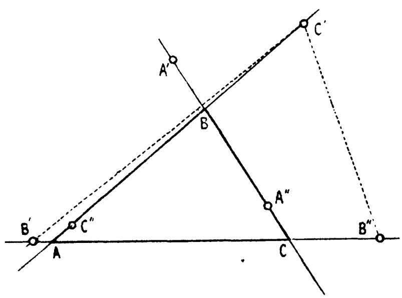
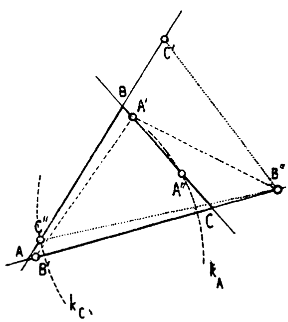


Fig. 6.



Les trois quotients de l'équation de Carnot étant tous *positifs* :

$$\frac{-\cdot+}{-\cdot+}\;\frac{-\cdot+}{-\cdot+}\;\frac{-\cdot+}{-\cdot+}=+$$

et

$$(4) \qquad \frac{+.+}{-.-}\,\frac{+.+}{-.-}\,\frac{+.+}{-.-} = + ;$$

deux des quotients étant *négatifs* et l'un *positif :*

$$(5) \qquad \frac{+.+}{-.+}\,\frac{+.-}{+.+}\,\frac{-.+}{-.+} = +$$

et

$$(6) \qquad \frac{+.+}{-.+}\,\frac{+.+}{+.-}\,\frac{+.+}{-.-} = + ;$$

les quatre cas dépendent aussi de la longueur s des distances égales

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC''.$$

Ces deux conditions ne sont aucunement indépendantes entre elles.

Nous aurons le cas (3) si la longueur s est *plus grande* que le *plus grand* côté du triangle. On reconnaît aisément que dans ce cas aucun des six points n'est situé *entre* deux quelconques des sommets du triangle.

La longueur s étant *plus petite* que le *plus petit* côté du triangle, nous avons le cas (4), où aucun des six points ne peut être hors des côtés du triangle.

Il faut, dans le cas (5), que la longueur s soit *plus petite* que le *plus grand* côté, mais *plus grande* que le côté *moyen* du triangle, parce qu'un des trois couples de points doit être séparé par un sommet sur un côté. Il s'ensuit qu'on aura une séparation d'un deuxième couple de points sur un autre côté. En effet, à cause de $AA'' < AC$, alors aussi $CC'' < AC$; le point C'' sera entre les sommets A et B. Le couple de points qui sera séparé à la fois par les deux sommets sur un côté $\left(\frac{-.+}{-.+}\right)$ doit être toujours situé sur le plus grand côté (dans la figure 5, c'est le couple B', B'').

Nous aurons enfin le cas (6) pour une longueur s, *plus grande* que le *plus petit* côté, mais *plus petite* que le côté *moyen* du triangle. Le couple de points qui n'est séparé par aucun sommet $\left(\frac{+.+}{-.-}\right)$ sera sur le plus petit côté (dans la figure 6, c'est le couple A', A'').

Le couple A', A'' du ças (5) est séparé par le sommet B sur BC; alors le point A'' étant *entre* les sommets B et C, menons les droites de jonction $B'C'$ et $C'B''$. La première de ces droites coupera le côté BC hors du segment BC, parce que les points B' et C' sont sur les prolongements des longueurs AC et AB. Il s'ensuit que le point A'' sera à l'intérieur du triangle $B'CB''$. La conique $A'A''B'B''C'C''$ sera alors, d'après un théorème bien connu, une *hyperbole*.

Joignons dans la figure 6, celui (A') des deux points situés sur le plus petit côté (A' et A'') qui est le plus éloigné du plus grand côté (AC), aux points B' et B'' situés sur le plus grand côté. Le point A'' sera à l'intérieur du triangle $A'B'B''$ parce qu'il se trouve *entre* les sommets B et C. La conique des six points pour le cas (6) sera encore une *hyperbole,* et nous avons le théorème suivant :

Un couple quelconque des six points A', A''; B', B''; C', C'' *étant séparé par un sommet seulement, la conique des six points sera une hyperbole.*

Dans les cas (5) et (6) la conique k ne peut pas être un cercle; mais on démontre aisément que cette conique ne pourra pas être un cercle non plus dans les cas (3) et (4) pour un triangle *général* acutangle.

Si cela était possible, le cercle k aurait le point H pour centre, parce que par ce point passent les trois symétrales des cordes $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ (*fig.* 1). Alors les cercles k et k'' seraient concentriques et les droites B_1B'

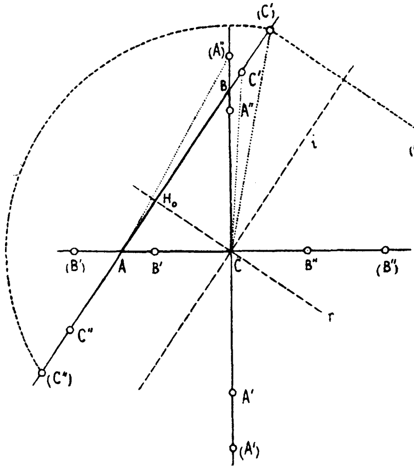
et $C_1 C'$ symétriques par rapport à la droite r'. Il s'ensuivrait que les sommets B et C seraient équidistants du point H, et c'est ce qui n'est pas possible pour un triangle général.

On trouve des résultats pareils pour un triangle *isoscèle,* où seulement les cas (3) et (6) peuvent avoir lieu. Si v est la hauteur et l la longueur des côtés égaux, nous avons ou $s > l$ ou $v \leqq s < l$. Dans ce dernier cas la conique des six points sera une *hyperbole.*

5. On aura des propriétés particulières pour la courbe des six points, si l'on se donne un *triangle rectangle* fondamental.

On peut distinguer deux cas pour l'espèce de la conique k suivant que la longueur s est *plus petite* ou *plus grande* que l'hypoténuse c (*fig.* 7).

Fig. 7.



Les couples de points sur les côtés de l'angle droit seront toujours séparés par le sommet (C) de cet angle si l'on a $s < AB$; ils seront séparés aussi par les sommets B, A pour $s > AB$. Dans les deux cas, le couple C', C'' sur l'hypoténuse sera séparé par les sommets A et B, car la longueur s doit être plus grande que le plus grand côté de l'angle droit BC; alors le point C' se trouve toujours hors du segment AB.

D'après les développements précédents, on voit ici que la conique k pour $s < AB$ sera une *hyperbole*, mais qu'elle ne pourra pas être une hyperbole pour $s > AB$.

En outre, le sommet C du triangle sera le milieu commun des cordes $A'A''$, $B'B''$ qui sont situées sur les côtés de l'angle droit. Ce sommet C sera le *centre commun* pour toutes les coniques k. Les points C' et C'' sur l'hypoténuse, étant toujours symétriques par rapport à la hauteur CH_0, cette hauteur sera la direction d'un axe et l'hypoténuse elle-même la direction de l'autre axe.

Or, toutes les coniques k qui correspondent à un triangle rectangle auront *deux axes limités*. Pour le cas $s > AB$, toutes les coniques seront donc des *ellipses*.

On démontre encore aisément que parmi les coniques k aucun cercle ne se rencontrera. En effet, on ne pourrait le chercher que parmi les ellipses; alors nous aurions

$$C(A'') = C(C')$$

et, à cause de $C(C'') = A(A'')$,

$$C(A'') = A(A''),$$

ce qui n'est pas possible pour une longueur s limitée.

La conique k étant *hyperbole* (*fig.* 7), le quadrilatère $A'B''A''B'$ sera un parallélogramme et ses sommets opposés seront sur les branches distinctes de la courbe.

Les droites r et i étant les axes des coniques k, les points A'' et C' seront sur le même quart de la courbe et par suite sur la même branche.

Les faisceaux homographiques $A'(A'', C', \ldots)$ et $B''(A'', C', \ldots)$ seront de même sens, car A'' se trouve entre B et C. Or, les centres des faisceaux A' et B'' seront sur la même branche. L'axe i sépare les points A' et C'' des quatre autres, mais il ne sépare pas ces deux points eux-mêmes. Cet axe i sera alors l'*axe imaginaire* pour toutes les hyperboles k.

La conique étant une ellipse, le point (C') sera hors de la longueur AB. Nous avons aussi, à cause de $BH_0 > CH_0$,

$$(C')H_0 > CH_0 \quad \text{et} \quad 2(C')H_0 > 2CH_0.$$

Le parallélogramme rectangle $(C'_1)(C'')$ inscrit à l'ellipse aura pour côtés

$$2(C')H_0 = (C')(C'') \quad \text{et} \quad 2CH_0 = (C')(C')_1;$$

son plus grand côté est alors $(C')(C'')$. Si l'on décrit du point C le cercle circonscrit à ce parallélogramme, le point (A'') sera situé nécessairement à l'intérieur de ce cercle; en effet, nous avons, à cause de $A(A'') > C(A'')$,

$$C(C') = A(A'') \quad \text{et} \quad C(C') > C(A'').$$

Le point A'' sera toujours *entre* l'arc de cercle $(C')(C'')$ et la corde $(C')(C'')$, et comme cette dernière, ainsi qu'on l'a vu, est le côté le plus grand du parallélogramme, il s'ensuit que l'axe i étant parallèle à ce côté sera le *grand axe* de l'ellipse k.

On a donc le théorème qui suit :

La droite i, menée par le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC, *contient tous les grands axes des ellipses et tous les axes imaginaires des hyperboles des six points.*

6. Le triangle fondamental étant un *triangle obtusangle* général, il se peut qu'un couple de points soit entièrement hors d'un côté, et cela du même côté d'un sommet. Il peut arriver que cela ait lieu aussi pour un deuxième couple de points. La conique résultante sera dans ces deux cas une *hyperbole*.

7. Nous avons vu (*fig.* 5) que le point A″ doit être à l'intérieur du triangle B′C′B″. Mais cela a lieu aussi, le point C″ étant entre les sommets A et B. On reconnaît aisément que le point A″ doit être, avec deux sommets du triangle B′C′B″, sur la même branche de la conique k. Sur cette branche se trouvera aussi le point C′, parce que l'autre branche passe déjà par un point (C′) du côté AB.

Nous démontrerons que les points A′ et A″, dans la figure 6, sont toujours à l'intérieur du triangle C′C″B″.

Des points A et C comme centres, soient décrits deux cercles k_A et k_C ayant pour rayons la longueur s, employée pour la détermination des six points. Les sommets A et C sont donc symétriques par rapport à la corde commune aux deux cercles. Nous avons vu que les points A′ et A″ seront sur le plus petit côté du triangle fondamental. Or, nous avons

$$BAC < BCA,$$

c'est-à-dire que le point C″ sera plus rapproché du côté AC que le point A″ (AA″ et CC″ étant égaux). Les points A′ et A″ seront alors toujours sur le même côté de la droite de jonction C″B″. Il s'ensuit que les points A′ et A″ doivent être toujours à l'intérieur du triangle C′C″B″. On démontre de la manière précédente que les quatre points C′, A′, A″, B″ sont toujours sur la même branche de la courbe k.

Cette règle était déjà établie pour le triangle rectangle fondamental et on la démontrera de la même manière pour un triangle obtusangle; nous avons ainsi le théorème suivant :

La conique des six points étant une hyperbole, quatre de ces six points seront toujours sur une même branche.

En prenant en considération les développements précédents, on verra que la conique des six points *dégénérera* seulement de telle façon qu'une de ses parties deviendra *identique* avec un côté quelconque du triangle fondamental. On peut regarder cette règle comme une solution de la question posée par M. E. Lemoine (*Archiv der Math. und Phys.*, t. I, 1901, p. 206) :

Soit ABC *un triangle;* A′, B′, C′ *sont les points où une droite coupe* BC, CA, AB. *Démontrer qu'on ne peut avoir* AA′ = BB′ = CC′.

[I22d]

SUR LES ENTIERS ALGÉBRIQUES DE LA FORME $x+y\sqrt{-5}$;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

1. On appelle *entiers algébriques du second degré* les racines des équations de la forme

$$X^2+pX+q=0,$$

p et q étant entiers, p^2-4q n'étant pas carré parfait. Ces entiers algébriques sont de la forme

$$a+b\sqrt{M},$$

M étant un entier autre que 1, sans facteur carré, a et b ne pouvant être que des entiers ou des fractions de dénominateur 2.

Le produit des racines de l'équation, soit

$$a^2 - Mb^2,$$

devant être entier, si l'un des nombres a et b est de la forme $\frac{2n+1}{2}$, il en est de même de l'autre, et l'on doit avoir alors $M = 4m + 1$.

2. Les entiers algébriques de la forme

$$x + \theta y \qquad (\theta = \sqrt{-5})$$

correspondent donc à *x et y entiers* (il n'en serait pas de même avec $\sqrt{-3}$). Les lois de la divisibilité dans le domaine de ces nombres ne sont pas les mêmes que dans le domaine des entiers ordinaires; on a par exemple

$$21 = 3 \times 7 = (1 + 2\theta)(1 - 2\theta) = (4 + \theta)(4 - \theta),$$

les facteurs de chaque produit étant premiers dans le domaine considéré. C'est pour détruire de telles anomalies que Kummer a créé ses *nombres idéaux,* que Dedekind a imaginé ensuite les ensembles qu'il appelle des *idéaux* (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 1877). Je ne sais si la théorie de Kummer permet, en général, d'expliciter les facteurs idéaux; cela est facile dans l'exemple actuel, comme on va le voir, en introduisant ces facteurs d'une manière assez naturelle.

3. Les normes des entiers $x + \theta y$ sont les nombres de la forme $x^2 + 5y^2$. *Élargissons le domaine de ces normes,* et considérons tous les nombres réels, représentables par une forme quadratique du déterminant 5,

c'est-à-dire tous les nombres des deux formes

$$x^2 + 5y^2, \quad 2x^2 + 2xy + 3y^2,$$

ou encore les nombres représentables par les expressions

$$x^2 + 5y^2, \quad \frac{(2x+y)^2 + 5y^2}{2};$$

nous écrirons de préférence

$$(1) \qquad x^2 + 5y^2,$$

$$(2) \qquad \frac{z^2 + 5y^2}{2} \qquad (z - y = 2x).$$

Considérons alors le domaine des nombres qui ont l'une ou l'autre des deux formes

$$(3) \qquad x + \theta y,$$

$$(4 \qquad \frac{z + \theta y}{\sqrt{2}} \qquad (z - y = 2x).$$

Le produit de plusieurs nombres du domaine est un nombre du domaine, appartenant à la forme (3) ou à la forme (4) selon que le nombre des facteurs de la forme (4) est pair ou impair. En suivant la même marche que pour les entiers imaginaires de Gauss, on peut voir directement (sans s'appuyer sur la théorie des formes quadratiques) que *les lois de la divisibilité, dans le domaine des nombres* (3) *et* (4), *sont les mêmes que dans le domaine des entiers ordinaires.*

4. Les nombres premiers de la forme (3) comprennent :

1° Les nombres premiers réels, qui sont congrus à 11, 13, 17, 19 (mod 20);

2° Le nombre θ, qui correspond à $x = 0$, $y = 1$;

3° Les nombres $x + \theta y$ dont les normes sont les nombres premiers ordinaires congrus à 1, 9 (mod 20).

Les nombres premiers de la forme (4) comprennent :

1° Le nombre $\sqrt{2}$, qui correspond à $z=2$, $y=0$;

2° Les nombres $\dfrac{z+\theta y}{\sqrt{2}}$ $(z-y=2x)$ dont les normes sont les nombres premiers ordinaires congrus à 3, 7 (mod 20).

5. La norme d'un nombre du domaine peut s'écrire :

$$\begin{aligned}N = {} & P^2 \times 5^p \times (x+\theta y)^\alpha (x-\theta y)^\alpha \ldots \\ & \times 2^r \times \left(\frac{z+\theta Y}{\sqrt{2}}\right)^\lambda \left(\frac{z-\theta Y}{\sqrt{2}}\right)^\lambda \ldots,\end{aligned}$$

P étant un produit de facteurs premiers congrus à 11, 13, 17, 19 (mod 20), les facteurs $x+\theta y$, ..., $\dfrac{z+\theta Y}{\sqrt{2}}$, ... étant premiers, ou encore

$$\begin{aligned}N = {} & P^2 \times 5^p \times a^\alpha b^\beta \ldots \\ & \times 2^r \times l^\lambda m^\mu \ldots,\end{aligned}$$

les nombres premiers a, b, ... étant congrus à 1, 9 (mod 20), les nombres premiers l, m, ... étant congrus à 3, 7 (mod 20).

Quand on cherche à mettre le nombre N sous l'une des formes (1) et (2), si l'on fait

$$p = 2p' + \pi \qquad (\pi = 0 \text{ ou } 1),$$
$$r = 2r' + \rho \qquad (\rho = 0 \text{ ou } 1),$$

chacun des nombres x et y dans le premier cas, z et y dans le second cas, doit renfermer en facteurs

$$P \times 5^{p'} \times 2^{r'},$$

de sorte qu'on est ramené à considérer le nombre

$$\begin{aligned}N' = {} & 5^\pi \times a^\alpha b^\beta \ldots \\ & \times 2^\rho \times l^\lambda m^\mu \ldots.\end{aligned}$$

1° Le nombre N' peut prendre la forme (1) ou la forme (2) selon que $\rho + \sum \lambda$ est pair ou impair

$$6 = 1^2 + 5.1^2, \qquad 3 = \frac{1^2 + 5.1^2}{2};$$

le résultat est le même pour le nombre N, en considérant $r + \sum \lambda$.

2° Le nombre des décompositions *propres* de N' est 2^{k-1}, k étant le nombre des facteurs premiers *distincts* du nombre

$$N'' = a^\alpha b^\beta \ldots \times l^\lambda m^\mu \ldots,$$

supposé différent de 1.

Exemple :

$$21 = 3 \times 7 = \frac{1+\theta}{\sqrt{2}} \frac{1-\theta}{\sqrt{2}} \frac{3+\theta}{\sqrt{2}} \frac{3-\theta}{\sqrt{2}};$$

selon que l'on groupe le premier facteur avec le troisième ou le quatrième, on a

$$21 = 1^2 + 5.2^2 \qquad \text{ou} \qquad = 4^2 + 5.1^2.$$

Pour $N'' = 1$, c'est-à-dire $N' = 1, 5, 2, 10$, il y a une décomposition.

3° Le nombre total des décompositions, tant propres qu'impropres, du nombre N' ou du nombre N, est égal au nombre des décompositions du nombre N'' en un produit de deux facteurs :

$$N'' = 27, \qquad N = 54 = 7^2 + 5.1^2 = 3^2 + 5.3^2,$$
$$N'' = 81, \qquad N = 81 = 1^2 + 5.4^2 = 6^2 + 5.3^2 = 9^2 + 5.0^2.$$

La démonstration des ces faits est analogue à celle des faits du même ordre, relatifs aux entiers imaginaires de Gauss.

6. Je signale ceci en terminant. Les nombres de la forme

$$x = \frac{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-5} + d\sqrt{2}\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

a, b, c, d étant entiers, a et c étant de même parité, sont des entiers algébriques ; le produit de deux nombres de cette forme est un nombre de même forme. Il y aurait lieu d'étudier ces nombres au point de vue de leur divisibilité.

[P1a]

CONSTRUCTIONS DES RAYONS RECTANGULAIRES DES FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES;

PAR M. L. CRELIER.

Étant donnés deux faisceaux homographiques, on sait qu'il existe dans chaque faisceau deux rayons rectangulaires, mais deux seuls, dont les homologues sont également rectangulaires. Ces rayons sont connus sous le nom de *rayons limites* ou *rayons rectangulaires* des faisceaux.

Nous donnons, pour ces rayons particuliers, la construction nouvelle suivante :

« Les faisceaux donnés $S(abc)$ et $S'(a'b'c')$ sont coupés par une circonférence arbitraire mais passant par S et S'.

» On obtient ainsi les divisions homographiques circulaires a, b, c et a', b', c'.

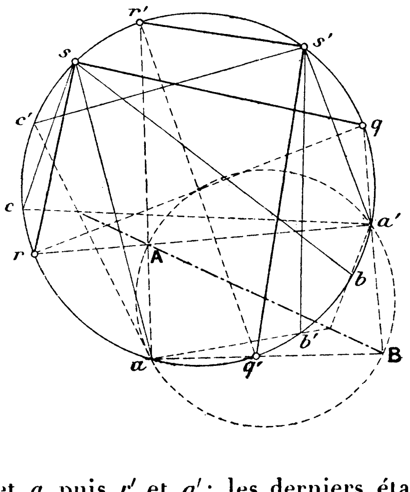
» Les faisceaux $a(a'b'c')$ et $a'(abc)$ sont homologiques et leur axe d'homologie est déterminé par les points d'intersection des rayons ab' et $a'b$, puis ac' et $a'c$.

» On mène ensuite par a et a' la circonférence dont le centre est sur l'axe d'homologie ; soient A et B ses points de rencontre avec l'axe, les rayons rectangulaires a'A et a'B ont pour homologues les rayons aA et aB.

» Ce sont les rayons rectangulaires des faisceaux homologiques de sommet a et a'.

» Ils déterminent sur la première circonférence des

Fig. 1.



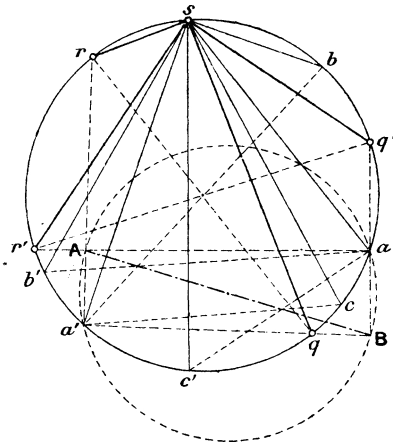
points r et q puis r' et q' ; les derniers étant respectivement les homologues des premiers.

» On obtient alors les rayons rectangulaires des deux faisceaux donnés en traçant les rayons Sr et Sq, puis leurs homologues S'r' et S'q'.

» En effet, Sr est perpendiculaire à S'q', car rq est un diamètre et S'r' est perpendiculaire à S'q' à cause du diamètre $r'q'$. » (Voir *fig.* 1.)

Cette construction est générale et elle s'applique aussi

Fig. 2.



au cas de deux faisceaux homographiques de sommet commun. (Voir *fig.* 2.)

[R7bβ]

SUR LA THÉORIE DES FORCES CENTRALES;

PAR M. V. JAMET.

Une Lettre de M. Suchar me fait un devoir d'entrer dans quelques éclaircissements au sujet de ma Note, parue, sous le même titre que le présent envoi, dans le numéro d'août 1902. Au n° 10 je disais :

« Ajoutons que cette équation ne diffère pas de celle qu'on trouverait en appliquant la méthode du n° 3 au cas où l'hodographe est la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\gamma} + \frac{y^2}{\beta} = k,$$

pourvu que k soit convenablement déterminée, etc.... »

Le lecteur qui voudra bien se reporter au n° 3 précité n'aura pas de peine à sous-entendre que c'est là l'équation d'une conique rapportée à deux axes issus de son centre, que je ne suppose nullement confondu avec le centre d'action ni avec l'origine de l'hodographe. C'est, du reste, dans cet esprit, qu'est conçu le calcul qui termine le n° 10 en discussion. Et s'il faut entrer dans le détail du calcul destiné à établir un résultat que d'illustres maîtres ont établi depuis longtemps, on reconnaîtra que ma méthode conduit à chercher l'équation de la trajectoire en effectuant les quadratures qui figurent dans la formule suivante :

$$(1)\quad \left\{ \frac{1}{r} = \frac{k\alpha\gamma}{C}\left[\sin\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} - \cos\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \right]. \right.$$

Or on constate immédiatement que

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}}\right) \\ & = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}} - \frac{(\gamma - \alpha)\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \\ & = \frac{\alpha\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin\theta}{\alpha\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}} + \mathrm{H},$$

H désignant une constante qui dépend de θ_0.

On trouvera, de même,

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\cos\theta}{\gamma\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}} + \mathrm{K},$$

K désignant une autre constante. L'équation (1) prend donc la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{k}{\mathrm{C}}\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta} + \frac{k\alpha\gamma}{\mathrm{C}}(\mathrm{H}\sin\theta - \mathrm{K}\cos\theta).$$

En transformant cette équation en coordonnées rectilignes, on trouve l'équation d'une conique.

Ceci soit dit pour bien éclaircir le point suivant :

Si l'on suppose que le centre de la conique hodographe coïncide avec le centre d'action : 1° la trajectoire est une conique ayant son centre au centre d'action; 2° l'accélération est proportionnelle à la distance.

1° Après avoir bien spécifié que l'origine des coordonnées et l'origine de l'hodographe sont au centre d'action, nous observerons qu'à deux points de l'hodographe, diamétralement opposés, savoir m et m', répondront sur la trajectoire deux points situés sur une même droite, issue de l'origine, et parallèle aux tangentes à l'hodographe, en m et m'. En ces deux points, les tangentes à la trajectoire seront parallèles entre elles, étant parallèles à mm'. Soient M et M' ces deux points. Toutes les droites MM' seront des diamètres de la trajectoire. Donc elles passeront toutes au point O, centre de la trajectoire; donc celui-ci ne peut être qu'au centre d'action.

2° En pareil cas, on doit avoir $H = 0$, et $K = 0$, comme le montre un calcul facile. Alors on trouve

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{C}\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta},$$

$$R = \frac{k\alpha\gamma}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'expression de l'accélération $\frac{CR}{r^2}$ devient alors

$$\frac{k^3\alpha\gamma}{C\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}}$$

ou bien

$$k^2\alpha\gamma . r$$

et, dans le cas actuel, l'accélération est proportionnelle au rayon vecteur, comme cela s'établit dans tous les cours.

Puisque je reviens aujourd'hui sur mon article de 1902, je saisis cette occasion pour signaler quelques *errata*, que le lecteur aura peut-être fait disparaître. A la page 356, dernière ligne, remplacer le mot *tangente* par le mot *cotangente;* page 351, formule finale et suivantes, remplacer le terme final $+2pa$ par $-2pa$; page 365, ligne 13 en descendant, écrire le facteur r au numérateur du deuxième membre.

CORRESPONDANCE.

M. L. Sauvage. — De l'article : *Sur la canonisation des formes bilinéaires,* par M. Autonne, publié dans le numéro de février 1903, je détache les deux phrases suivantes :

« Weierstrass dit que les expressions $(r - \rho)^{\beta_k}$ sont les *Elementartheiler* afférents à la racine ρ.

» Pour abréger, je dirai que ces expressions sont les *successifs* (sous-entendu : facteurs ou diviseurs) afférents à la racine ρ. »

Il vaut mieux, à mon avis, traduire littéralement *Elementartheiler* par *diviseur élémentaire,* comme je l'ai fait dans mes *Mémoires sur les diviseurs élémentaires* (*Ann. Éc. Norm.,* sept. 1891 et janv. 1893); en voici mes raisons :

1° Les diviseurs élémentaires sont *indépendants* dans toutes leurs propriétés essentielles, c'est ce que Weierstrass a mis précisément en lumière dans son Mémoire de 1868.

2° Weierstrass semble avoir choisi le qualificatif *elementar* pour rappeler l'indépendance complète de ses diviseurs.

3° Il n'est pas inutile de se servir en français d'un mot facile à comprendre pour les lecteurs étrangers, et surtout pour les lecteurs allemands chez qui, depuis longtemps, l'usage des *Elementartheiler* est répandu.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité élémentaire de Géométrie a quatre dimensions, et introduction a la Géométrie a n dimensions; par *E. Jouffret.* — 1 vol. in-8 de xxx-215 pages avec 65 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Le Livre de M. le Colonel Jouffret intéressera plusieurs catégories de lecteurs. D'abord les mathématiciens purs, qui trouveront avec plaisir l'exposé didactique de principes et de résultats épars dans divers Mémoires, dont plusieurs sont difficilement accessibles. Ensuite, les philosophes, que préoccupe l'origine de nos idées géométriques. Enfin, les personnes d'imagination (qui ne sont pas nécessairement distinctes des mathématiciens et des philosophes); on sait que la conception de l'hyperespace a envahi jusqu'à la littérature, et que le romancier anglais H. G. Wells, par exemple, l'a utilisée dans quelques nouvelles ingénieuses.

Les idées directrices du Livre sont exposées dans un avant-propos d'une forme originale et d'une lecture attrayante. J'y reviendrai tout à l'heure.

Le Chapitre I donne les définitions relatives à l'*étendue* (tel est le nom commode que l'auteur choisit pour désigner l'espace à quatre dimensions).

Ces définitions sont purement analytiques : on appellera *coordonnées d'un point de l'étendue* le système de quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4, dont chacune peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Un *espace* ou *champ du troisième degré* est le lieu des points tels que

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Un *plan* ou *champ du deuxième degré* est le lieu des points communs à deux espaces, etc. Le parallélisme et la perpendicularité de deux champs sont définis par des relations, de formes données *a priori,* auxquelles doivent satisfaire les constantes qui figurent dans les équations de ces champs.

Les cinq premiers Chapitres renferment les conséquences les plus importantes de ces conventions qui permettent d'exprimer, en langage géométrique, les faits concernant les systèmes d'équations linéaires à quatre variables. Le Chapitre IV mérite une attention particulière : on y voit apparaître, relativement aux *champs parallèles* et aux *champs perpendiculaires,* ainsi qu'aux *rotations,* des circonstances qui n'ont pas d'analogues dans la Géométrie de l'espace.

Le Chapitre VI traite des *angles* et de la *Géométrie descriptive à quatre dimensions.*

Jusqu'ici, les développements étaient purement analytiques et les resultats n'avaient rien de sensible. La Géométrie descriptive nous fait faire un pas, un seul, vers la représentation des êtres inaccessibles de l'étendue. Leur vision directe nous est interdite, mais nous pouvons construire leur projection sur un espace ou sur un plan. Nous pourrions de même construire leur perspective sur un espace.

Dans le Chapitre VII, on jette un coup d'œil sur quelques êtres remarquables de l'étendue (les *hyperquadriques,* l'*hypersphère,* les *hypercônes*).

Enfin, le Chapitre VIII, le plus important, est consacré aux corps réguliers de l'étendue, les six *polyédroïdes,* découverts par Stringham en 1880, et dont l'étude vient couronner l'Ouvrage, comme l'étude plus simple des cinq polyèdres réguliers de l'espace marque l'étape finale des *Éléments* d'Euclide. La question est difficile, et la rédaction de ce Chapitre a dû demander un travail considérable. Si je ne me trompe, l'exposition est originale dans plusieurs de ses détails et marque un progrès sensible au point de vue de la clarté sur les Mémoires antérieurs.

Là s'arrête la partie purement mathématique du Livre. Le Chapitre IX est consacré à des *applications* et forme comme une suite à l'avant-propos.

« La Mécanique à plus de trois dimensions, a dit M. Poincaré, doit être condamnée comme dépourvue de tout objet. » Sans protester contre ce jugement, M. Jouffret a tenu à résumer les arguments de quelques savants hardis qui veulent chercher dans l'hyperespace l'explication de l'Univers....

Il fait ressortir la complication extrême et le caractère visiblement artificiel des théories physiques modernes, avec leur *éther élastique et solide,* leur *éther labile,* leurs *électrons....* Toutes aboutissent, en fin de compte, à quelque chose d'inconcevable. Cet inconcevable, reléguons-le délibérément dans l'*étendue :* du coup, les lois de notre monde deviennent plus simples et plus harmonieuses, et les faits réputés les plus mystérieux, par exemple la gravitation et la combinaison chimique, s'interprètent sans grande difficulté.

L'étendue aurait ainsi une existence physique et nous serions à son égard comme un aveugle-né à l'égard de la lumière. Un aveugle-né est entouré de *voyants,* dont les actes sont absolument inexplicables pour lui, s'il ne veut pas admettre que la plupart des hommes éprouvent certaines sensations qui les renseignent sur la position et le mouvement des objets éloignés. Ira-t-il rejeter cette hypothèse, parce qu'elle fait appel à des impressions de nature inimaginable?

A vrai dire, les témoins qui entraînent la conviction de l'aveugle nous font malheureusement défaut. Un être de notre entourage qui disposerait de l'étendue pourrait apparaître ou disparaître subitement dans une région de l'espace, y créer la matière, faire des nœuds à une corde sans fin, etc. On sait que, d'après les spirites et les animistes, certains médiums disposent de ces précieuses facultés (*voir* les Mémoires de Crookes, Zöllner). S'il en est ainsi, l'hyperespace a été pris en flagrant délit..., mais nous sommes en droit de réclamer des preuves un peu plus abondantes.

Ne soyons pas aussi exigeants, et demandons seulement que la mécanique de l'étendue fasse prévoir quelque phénomène, non pas miraculeux, mais simplement inconnu et que l'expérience vérifie cette prévision. La nouvelle doctrine aura dès lors fait ses preuves, et nous pourrons l'adopter au moins comme instrument de recherches.

Le dernier Chapitre du Livre contient quelques indications sur les champs de degrés supérieurs à 4.

L'impression de l'Ouvrage présentait des difficultés particulières, en raison de la complication de certaines épures. La Maison Gauthier-Villars s'en est acquittée avec cette perfection dont c'est devenu un lieu commun de faire l'éloge.

R. B.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on demande de déterminer les surfaces* S *telles que le plan tangent en un point quelconque* M *de l'une de ces surfaces fasse un angle constant* ω *avec le plan mené par ce point* M *et par l'axe* Oz.

Démontrer que les caractéristiques de ces surfaces forment une famille de lignes de courbure, et trouver ces caractéristiques.

N. B. — *On pourra prendre pour variables indépendantes, soit les coordonnées rectangulaires* (x, y) *de la projection* m *du point* M *sur le plan des* xy, *soit les coordonnées polaires* (r, θ) *du même point* m.

II. *Soit*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire où les coefficients p *et* q *sont fonctions de la variable indépendante* x. *On demande de trouver la relation qui doit exister entre ces coefficients* p *et* q *pour que l'équation* (1) *admette deux* *intégrales linéairement distinctes* y_1 *et* y_2, *liées par la relation*

$$y_1 y_2 = 1.$$

Examiner en particulier le cas où l'on a $p = \frac{1}{x}$. *Trouver le coefficient* q *et l'intégrale générale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^3}\, dx,$$

$\log x$ *désignant le logarithme népérien.*

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer le système :*

$$\frac{dx}{dt} + x - y = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 4z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + 4z - x = 0.$$

En déduire l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - 4z)\frac{\partial z}{\partial y} = 4z - x.$$

II. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre*

$$dy - f(x, y)\, dx = 0.$$

Comment peut-on reconnaître si elle admet un facteur intégrant de la forme XY (X *étant une fonction de* x, *et* Y *une fonction de* y), *et déterminer ce facteur intégrant quand il existe?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x + 1}.$$

(Octobre 1902.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *on considère les courbes* C *qui vérifient l'équation différentielle :*

$$2yy'^2 - y^2y'' - 2y'^3y'' = 0.$$

1° *Exprimer les coordonnées* x, y *d'un point* M *d'une courbe* C *en fonction du coefficient angulaire* $t = y'$ *de la tangente à cette courbe.*

2° *Construire les courbes* C.

II. *Intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont on connaît une intégrale complète.*

Cas de l'équation

$$z - px - qy = p^3,$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; *signification géométrique de ses intégrales.*

Épreuve pratique. — *En désignant par* a *un nombre positif inférieur à l'unité, et prenant pour* x^{a-1} *sa détermination réelle et positive, on considère l'intégrale*

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

1° *Trouver l'expression de* $f(a)$;

2° *Calculer avec quatre décimales la valeur de* a *pour laquelle on a*

$$f(a) = \frac{2}{a}.$$

(Juillet 1902.)

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Définition et expressions diverses de la courbure d'une figure plane ou gauche. Cas particulier où la courbe est plane : expression de la courbure en coordonnées polaires; cas où la courbe, en coordonnées* *cartésiennes, est définie comme enveloppe d'une droite mobile.*

II. *Trouver une ligne plane telle que, si on la transforme par rayons vecteurs réciproques, les courbures de la ligne et de sa transformée, en deux points correspondants, soient dans un rapport constant.*

Solution.

r étant le rayon polaire, p la distance du pôle à la tangente et C la courbure, on a

$$C = \frac{dp}{r\,dr}.$$

Affectons de l'indice 1 les éléments de la courbe transformée; a^2 étant le module, on a

$$rr_1 = a^2, \qquad \frac{r}{p} = \frac{r_1}{p_1},$$

et par suite

$$C_1 = \frac{1}{a^2}\left(2p - r\frac{dp}{dr}\right).$$

En exprimant que $C_1 = mC$, on obtient une équation différentielle immédiatement intégrable qui donne

$$p = k(r^2 + a^2 m).$$

Mais alors

$$C = 2k = \text{const.},$$

et la courbe demandée est un cercle quelconque du plan.

Pour obtenir ce résultat par l'emploi des coordonnées polaires ρ et ω, on fera, dans l'équation différentielle du second ordre du problème, le changement de fonction :

$$u = \rho + \frac{A}{\rho},$$

A étant une constante convenable, et l'on sera ramené à l'intégration de

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} = u.$$

(Juillet 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Conditions que doivent remplir la constante a et la fonction rationnelle* R *pour que l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{R}(e^x)\,dx$$

ait un sens. Expression de cette intégrale au moyen des affixes des pôles de la fonction $\mathrm{R}(e^z)$ *compris dans la bande formée par l'axe réel et la parallèle à cet axe menée à la distance* 2π.

Application au calcul de la somme $\sum e^{-\frac{2\xi}{3}}$ *étendue à toutes les racines* ξ *de l'équation*

$$e^{4z} + e^{2z} + 1 = 0,$$

qui sont comprises dans la bande précédente.

(*Voir* HERMITE, *Cours d'Analyse*, 4^e^ éd., p. 118 et suiv.)

II. *Trouver, en coordonnées polaires, l'équation finie des courbes planes dont le rayon de courbure* R *en un point est dans un rapport donné a avec le rayon vecteur de ce point. Signification géométrique des deux constantes d'intégration.*

Construire l'une des courbes cherchées pour $a = \frac{1}{2}$ *et* $a = -2$.

(*Voir* TISSERAND et PAINLEVÉ, *Exercices d'Analyse*, p. 313 et suiv.) (Juillet 1902.)

QUESTION DE COURS. — *Montrer que l'intégrale*

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

où x désigne une variable complexe est susceptible d'une infinité de valeurs.

Quelles sont toutes ces valeurs? Quelle est la nature de la fonction x envisagée comme dépendant de la variable complexe z?

PROBLÈME. — I. *On donne l'équation différentielle linéaire*

$$f(u) = au + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_3 \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

où a, a_1, a_2, a_3 *sont des fonctions quelconques de la variable* x. *Trouver toutes les fonctions* v *de* x *telles que le produit* $v f(u)$ *soit, quel que soit* u, *la dérivée d'une fonction linéaire de* u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$.

II. *Soit* $g(v) = 0$ *l'équation différentielle qui détermine* v; *montrer que l'équation avec second membre*

$$f(u) = \mathrm{R}(x)$$

s'intègre par des quadratures si l'on connaît la solution générale de l'équation

$$g(v) = 0.$$

III. *Sous quelles conditions les équations*

$$f(u) = 0, \qquad g(v) = 0$$

ont-elles les mêmes intégrales?

Traiter en particulier le cas où $a_3 = 0$.

L'équation $g(v) = 0$ *n'est autre que l'adjointe de Lagrange de* $f(u) = 0$,

$$g(v) = av - \frac{d(a_1 v)}{dx} + \frac{d^2(a_2 v)}{dx^2} - \frac{d^3(a_3 v)}{dx^3} = 0.$$

Les diverses parties du problème sont résolues dans les *Leçons* de M. DARBOUX (t. II. Chap. V, p. 99 et suiv.).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, avec quatre décimales exactes, par approximations successives, ou par toute autre méthode la valeur maximum de la fonction*

$$\frac{\text{arc tang}\, u}{u} + 3\, \frac{\text{arc tang}\, u - u}{u^3},$$

quand u *varie de* 0 *à* $+\infty$. (Novembre 1902.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation*

$$2xy\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Mode de génération des surfaces représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'intégrale générale. Déterminer celle de ces surfaces, S, *qui passe par la parabole*

$$y=0,\qquad z^2=2ax.$$

Transformer l'équation de S *en remplaçant* x *et* y *par* $r\cos\theta$ *et* $r\sin\theta$ *et, en partant de l'équation transformée, trouver les lignes asymptotiques de* S.

SOLUTION.

L'intégrale générale est

$$x^2+y^2=x\,\varphi(z).$$

L'équation de S

$$x^2+y^2=\frac{z^2x}{2a}\qquad\text{ou}\qquad z^2=\frac{2ar}{\cos\theta}.$$

On a, pour la projection des asymptotiques sur le plan des xy,

$$\frac{dr^2}{d\theta^2}+2r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{dr}{d\theta}-\frac{4\cos^2\theta+3\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

$$r^2=\theta,\qquad r=C\cos\theta\,\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\theta}{2}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver l'intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=u^3$$

qui se réduit à $\frac{1}{y}$ *pour* $x=1$.

SOLUTION.

C'est

$$u=\frac{1}{xy}.$$

(Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (A_0 + A_1 y + A_2 y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_0 + B_1 y)\frac{\partial u}{\partial y} + C_0 u$$
$$+ H_0 + H_1 y + H_2 y^2 + H_3 y^3,$$

où A_0, A_1, ..., H_3 *sont des fonctions connues de* x, *dévelop pables suivant la série de Maclaurin, démontrer que l'équation admet comme intégrale un polynome en* y, *dont les coefficients sont des fonctions de* x *et qui s'annule identiquement pour* $x = 0$.

Solution.

En substituant pour u le polynome cherché et identifiant les coefficients des puissances de y, on trouve un polynome du troisième degré en y, dont les coefficients sont déterminés séparément par des équations différentielles ordinaires.

II. *Courbe plane telle que le rayon de courbure en un point quelconque* M *soit double du rayon du cercle passant par l'origine et touchant la courbe en* M.

Solution.

L'équation différentielle est

$$\frac{x^2 + y^2}{x\,dy - y\,dx} = \pm \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

transformant en coordonnées polaires, on trouve des spirales logarithmiques et des hyperboles équilatères ayant leur centre à l'origine. (Novembre 1902.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — *De l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface déduire l'équation différentielle des lignes asymptotiques :* 1° x, y *étant variables indépendantes;* 2° z, x, y *étant fonctions des variables indépendantes* r *et* θ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

Trouver les projections sur le plan xOy des lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation

$$z = x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + y \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$:

1° *En passant par l'intégrale indéfinie;*

2° *En considérant d'abord* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+ax^2}}$ (*où* a *désigne un paramètre*);

3° *En développant en série.* (Juillet 1902.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6x^2 - 2 = 0$$

qui admet la solution particulière $y_1 = x^2$, *calculer celle des intégrales qui s'annule ainsi que sa dérivée pour* $x = -1$.

En considérant x *comme une variable imaginaire, déterminer dans le plan des* x *les points singuliers de la fonction que l'on vient de calculer. Indiquer la manière de former, avec les valeurs initiales* $x = -1$, $y = 0$, *toutes les déterminations de cette fonction en un même point du plan des* x.

SOLUTION.

L'équation linéaire proposée est rendue facilement homogène et admet l'intégrale demandée

$$y = x^2 + 4 \operatorname{arc\,tang} x + \pi - 1.$$

II. *On considère dans une surface les sections faites par deux plans rectangulaires se coupant suivant une tangente à la surface.*

Démontrer que la somme des carrés des rayons de cour-

bure de ces deux sections ne change pas quand les deux plans tournent autour de leur intersection supposée fixe.

SOLUTION.

Les axes des deux plans faisant avec la normale à la surface des angles θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$, on a, d'après le théorème de Meusnier,

$$\text{const.} = \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\sin\theta}{R'} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les intégrales définies à coefficients réels*

$$\int \frac{dx}{K^2 - \operatorname{tang}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{(K^2 - \operatorname{tang}^2 x)^2}, \quad \int \frac{A + B \operatorname{tang}^2 x}{(K^2 - \operatorname{tang}^2 x)^2} dx.$$

SOLUTION.

On pose

$$K^2 = \operatorname{tang}^2 a,$$

et l'on prend les dérivées logarithmiques par rapport à a des deux membres de la formule

$$\operatorname{tang}^2 a - \operatorname{tang}^2 x = \frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos^2 a \cos^2 x};$$

en intégrant ensuite par rapport à x on obtient la première des intégrales demandées. La deuxième intégrale se tire de la première par une dérivation sous le signe d'intégration. La troisième intégrale est une combinaison simple des deux premières. (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Démontrer que, dans les trois cercles suivant lesquels la sphère osculatrice en un point d'une courbe est coupée par les trois faces du trièdre mobile lié au point de la courbe, l'un est la somme des deux autres.*

II. *Lignes de courbure de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^4+1},$$

où z a des valeurs réelles. (Novembre 1902.)

Rennes.

Épreuve écrite. — I. *Exposer la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.*

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(m-1)x\frac{dy}{dx} + m(m-1)y = 0.$$

1° *En changeant les deux variables au moyen des relations*

$$x = \cot\omega, \qquad y = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} z,$$

et prenant z comme nouvelle fonction;

2° *En changeant de fonction au moyen de la relation*

$$y = (1+x^2)^m \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}.$$

Comparer les valeurs de y obtenues par ces deux méthodes et en déduire les expressions en ω de

$$\frac{d^m}{dx^m}(\text{arc tang}\, x) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^m}{dx^m}\log(1+x^2).$$

Épreuve pratique. — *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface qui a pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$z^4 = 4(x^2+y^2).$$

(Juillet 1902.)

Besançon.

Question de cours. — *Exposer la théorie de la différentiation et de l'intégration sous le signe somme.*

Problème. — *Soient, sur une courbe* C, A *un point fixe,* M *un point variable, s l'arc* AM *de la courbe* C, R *le rayon de courbure de la courbe relatif au point* M. *Déterminer la courbe* C *de telle sorte qu'on ait la relation*

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 9\,\frac{\left(R^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right)}{m^{\frac{2}{3}}p^{\frac{2}{3}}},$$

m et p étant deux quantités données.

On utilisera les formules connues

$$d\alpha = \frac{ds}{R}, \qquad dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha,$$

x et y étant les coordonnées rectangulaires du point M, *α l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x.*

Solution.

On obtient d'abord α en fonction de R par une quadrature qui s'effectue facilement en prenant $R^{\frac{2}{3}}$ comme variable auxiliaire. On a ensuite x et y par des quadratures. Les courbes demandées sont des ellipses.

Épreuve pratique. — *On envisage l'équation*

$$x = y + e\sin x,$$

développer $\cos x$ *suivant les puissances de e par la formule de Lagrange jusqu'au terme en e^4 inclusivement.*

Solution.

$$\begin{aligned}\cos x = \cos y &+ \frac{e}{2}(\cos 2y - 1)\\ &+ \frac{e^2}{8}(3\cos 3y - 3\cos y)\\ &+ \frac{e^2}{48}(16\cos 4y - 16\cos 2y)\\ &+ \frac{e^4}{384}(125\cos 5y - 135\cos 3y + 10\cos y) + \ldots\end{aligned}$$

(Juillet 1902.)

Question de cours. — *Courbure et torsion des courbes gauches.*

Problème. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère un hélicoïde représenté par l'équation*

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

et dans le plan des xy *une lemniscate dont l'équation est*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

1° *Calculer la longueur d'un arc quelconque de la courbe* C *suivant laquelle l'hélicoïde est coupé par une surface cylindrique ayant ses génératrices parallèles à* Oz *et la lemniscate pour directrice;*

2° *Calculer le volume situé dans l'angle des coordonnées positives limité par le plan des* xy, *la surface cylindrique et la surface hélicoïdale;*

3° *Calculer le rayon de courbure de la courbe* C *en l'un quelconque de ses points et en étudier les variations.*

(*On fera usage des coordonnées cylindriques* $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, z.)

Solution.

L'arc s de la courbe C est donné par la formule

$$s = a \operatorname{arc\,sin}(\sqrt{2} \sin\theta) + \text{const.}$$

Le volume demandé est

$$a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\, d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr = \frac{a^3}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Enfin R étant le rayon de courbure de C, on a

$$R^2 = \frac{4a^2 \cos^4\theta}{1 + 8\cos 2\theta},$$

θ variant de zéro à $\frac{\pi}{4}$, R décroît d'abord de la valeur $\frac{2a}{3}$ jusqu'à un certain minimum égal à $\frac{a\sqrt{7}}{4}$, et croît ensuite de ce minimum jusqu'à la valeur a.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_2^3 \frac{(x^3+1)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

SOLUTION.

La valeur de cette intégrale est

$$\frac{11\sqrt{2}+15\log(1+\sqrt{2})}{4}.$$

(Novembre 1902.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane telle que la portion de la tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe ait une longueur donnée. Former l'équation de cette courbe, et étudier sa forme. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure en un point de la courbe. Former l'équation de sa développée.* (Novembre 1902.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'équation*

$$p^2+q^2-2px-2qy+1=0$$

étant donnée, on demande :

1° *D'intégrer complètement cette équation et de déterminer la nature des surfaces intégrales;*

2° *De transformer cette équation en supposant que les axes de coordonnées tournent d'un angle α autour de Oz;*

3° *De rechercher s'il existe des surfaces intégrales qui soient de révolution autour de Oz.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Par les points d'une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit on mène des parallèles à* *une droite fixe : on demande d'étudier le lieu des traces de ces parallèles sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.* (Novembre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1941.

(1902, p. 480.)

Soient abc, $a'b'c'$ et $a''b''c''$ trois triangles inscrits à une hyperbole équilatère et d'orthocentres d, d', d''. Si α, β, γ et δ sont les orthocentres des triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ et $dd'd''$, δ est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$.

(Duporcq.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

Considérons neuf points sur une hyperbole équilatère, groupons-les par trois, les orthocentres des triangles ainsi formés sont trois points de la courbe, sommets d'un triangle dont l'orthocentre est indépendant de la façon dont on a groupé les points. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si l'on échange deux sommets a, a' des triangles abc, $a'b'c'$ la droite des orthocentres de ces triangles reste parallèle à elle-même. Car l'orthocentre final sera à l'intersection de l'hyperbole avec la perpendiculaire à cette direction menée par l'orthocentre de $a''b''c''$.

Soient donc h, h', k, k' les centres des hauteurs des quatre triangles abc, $ab'c'$, $a'bc$ et $a'b'c'$. Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés de l'hexagone $h'ahk'a'kh'$ pris dans cet ordre. L'hexagone est inscrit à l'hyperbole; or les côtés 1 et 4 sont parallèles; de même 2 et 5. Donc aussi 3 et 6. C. Q. F. D.

1963.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe représentée par

$$x^4\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)-y^4\left(\frac{b^2+2x^2}{y^2}+1\right)=0.$$

(G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. C. ALASIA.

Faisons

$$x = \rho \sin\varphi, \qquad y = \rho \cos\varphi,$$

et après quelques transformations l'équation donnée s'écrira

$$a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi = \rho^2.$$

Posons $a^2 \operatorname{tang}^2\varphi = b^2 \operatorname{séc}^2\omega$, et nous aurons

$$\frac{ds}{d\omega} = ab\,\frac{\sqrt{a^2 + b^2\cos^2\omega}}{b^2 + a^2\cos^2\omega},$$

ou bien, après avoir fait

$$1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\omega = p, \qquad 1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}\sin^2\omega = q;$$

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{q}{p\sqrt{q}} = \frac{b}{a\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a^2-b^2}{p\sqrt{q}} + \frac{b^2}{\sqrt{q}}\right).$$

L'intégration donne

$$s = \frac{b}{a}\,\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\omega}{p\sqrt{q}} + \frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{q}}.$$

Si l'on avait $a = b$ on aurait évidemment

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\omega}},$$

car alors la courbe est une lemniscate.

1968.

(1903, p. 144.)

Sur toute normale à une conique, le pied de cette normale, le centre de courbure, le point de Frégier et le milieu du segment limité à la conique forment une division harmonique. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. CANON.

Appelons ι le point de Frégier sur la normale en a à la conique, γ le centre de courbure de la conique relatif au point a, et j le point où cette normale coupe la conique.

On a la relation connue

$$\frac{1}{2a\gamma}+\frac{1}{aj}=\frac{1}{ai}.$$

Le point m étant le milieu du segment aj, on peut l'écrire

$$\frac{1}{2a\gamma}+\frac{1}{2am}=\frac{1}{ai}$$

ou

$$\frac{1}{a\gamma}+\frac{1}{am}=\frac{2}{ai}.$$

Donc, etc.

Autrement : Prolongeons le segment ai de sa propre longueur jusqu'en i', prolongeons de même $a\gamma$ de sa longueur jusqu'en γ'; il s'agit maintenant de démontrer que les points a, i', j, γ' forment une division harmonique.

Par le point a menons les cordes rectangulaires ab, ac; la droite bc passe alors par le point i. Parallèlement à ac menons la droite bg qui coupe la normale aj au point g; les triangles semblables iac, igb donnent

$$\frac{ia}{ig}=\frac{ic}{ib}.$$

Si le point b vient se confondre avec a, le point i ne change pas de position, le point g vient en γ' et l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{ia}{i\gamma'}=\frac{ij}{ia},$$

d'où

$$\overline{ia}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{ii'}^2=ij\times i\gamma'.$$

Donc, etc.

QUESTIONS.

1972. Déterminer α et h de façon que les intégrales

$$u = \int \frac{(\alpha x + h)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}},$$

$$v = \int \frac{(\alpha x - 5h)\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}}$$

soient pseudo-elliptiques et les calculer. (DOLBNIA.)

1973. Trouver dans quels cas les intégrales abéliennes

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2ax + b)(x^2 + 2rx + s)^2}},$$

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^2(x^2+cx+e)^3}},$$

$$w = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3(x-c)^2x^2}}$$

peuvent être ramenées à des intégrales elliptiques et faire ces réductions. (DOLBNIA.)

1974. Posant d'une manière générale

$$y_k = (m+1)^k a_0 x^m + m^k a_1 x^{m-1} + (m-1)^k a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m,$$

k et m étant des entiers positifs, si l'équation $y_0 = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $y_k = 0$, quel que soit k, les deux équations ayant d'ailleurs le même nombre de racines positives. En outre, si $p > k$, toute racine p^{uple} de $y_0 = 0$ est racine $(p-k)^{\text{uple}}$ de $y_k = 0$.

Par exemple, en partant de $y_0 = (x-1)^m$, on voit que, pour $k < m$,

$$(m+1)^k x^m - \frac{m}{1} m^k x^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^k x^{m-2} - \ldots + (-1)^m = (x-1)^{m-k} f(x),$$

$f(x)$ ayant toutes ses racines réelles et positives.

(M. D'OCAGNE.)

[R8cα]

PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

Par M. H. ANDOYER.

Le problème suivant avait été composé pour être proposé au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques.

Après réflexion, il nous a paru peut-être un peu trop difficile et nous y avons renoncé.

La Rédaction des Nouvelles Annales *nous a demandé de le publier, pensant que cela serait utile aux candidats tant à cause des particularités du calcul que comme exemple des conséquences curieuses auxquelles peut conduire la Mécanique rationnelle lorsqu'on pousse ses hypothèses théoriques jusqu'aux limites extrêmes.*

Énoncé. — $Oxyz$ est un trièdre trirectangle.

La verticale ascendante du point O est située dans le plan Oxz et fait avec Ox l'angle β, compris entre o et π.

La droite Ox est l'axe d'un cylindre de révolution, creux et indéfini, le rayon de la surface intérieure de ce cylindre étant R.

Une sphère S, pesante et homogène, de masse m et de rayon ρ, se meut à l'intérieur du cylindre, et est assujettie à rester en contact avec lui, de façon qu'elle puisse rouler et pivoter sur la surface du cylindre, mais non glisser : on néglige d'ailleurs le frottement de roulement et celui de pivotement.

1° Établir les équations qui déterminent le mouvement du centre de gravité de la sphère S, la rotation de cette sphère autour de son centre de gravité, et la réaction du cylindre sur la sphère.

2° On désigne par g l'accélération de la pesanteur, par x l'abscisse du centre de la sphère, par θ l'angle que fait avec Oz le rayon du cylindre qui contient le centre de la sphère. Former l'équation différentielle qui définit θ en fonction du temps t; puis, posant $u = \frac{dx}{dt}$, et prenant θ comme variable indépendante, former l'équation différentielle qui détermine u en fonction de θ.

3° Montrer que les équations différentielles ainsi obtenues peuvent s'intégrer à l'aide de quadratures, et en déduire toutes les inconnues du problème, en se contentant d'indiquer les quadratures à effectuer.

On introduira ici les données initiales, savoir : les valeurs x_0 et θ_0 de x et de θ pour $t = 0$; la vitesse V du centre de gravité de la sphère S et l'angle α que fait cette vitesse avec Ox, au même instant; enfin la composante ω de la rotation de la sphère autour de son centre, suivant le rayon de cette sphère qui aboutit à son point de contact avec le cylindre, toujours pour $t = 0$.

4° Discuter la variation de l'angle θ dans les différents cas possibles. Il faut d'ailleurs observer que la sphère quitte le cylindre quand elle cesse d'être pressée sur lui, et l'on n'étudiera pas son mouvement ultérieur.

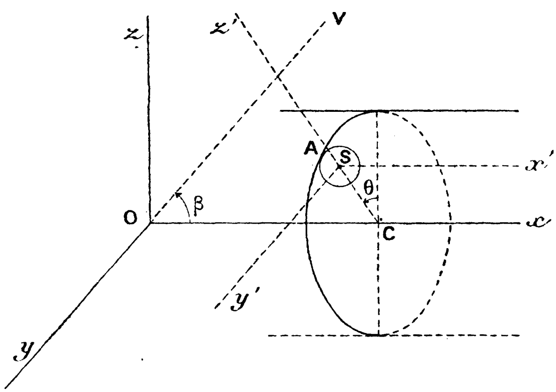
Former, en particulier, la condition que doivent vérifier les données initiales pour que l'angle θ varie toujours dans le même sens, la sphère ne quittant jamais le cylindre.

5° Intégrer complètement toutes les équations du problème dans le cas particulier où l'angle β est nul.

Qu'arrive-t-il alors, si l'on a, en outre, la condition

$$V \sin\alpha = 0?$$

Solution. — On voit sur la figure la verticale ascendante OV du point O; la section droite de centre C du cylindre qui contient à l'instant t le centre S de la sphère, celle-ci touchant le cylindre en A.



Au système d'axes fixes, on adjoint les axes mobiles rectangulaires, orientés comme les premiers, Sx' parallèle à Ox, Sy' perpendiculaire à CA et parallèle au plan Oyz, Sz' qui n'est autre que le rayon CA.

La position de la sphère est déterminée par l'abscisse x de son centre et l'angle θ; car, si y et z sont ses deux autres coordonnées par rapport aux axes fixes, on a

$$y = (R - \rho)\sin\theta, \qquad z = (R - \rho)\cos\theta.$$

La rotation de la sphère est déterminée par ses projections p, q, r sur les axes mobiles Sx', Sy', Sz'. De même, la réaction du cylindre sur la sphère est déterminée par ses projections mX, mY, mZ sur les mêmes axes.

D'ailleurs, la rotation du système des axes mobiles par rapport aux axes fixes est $-\frac{d\theta}{dt}$, dirigée suivant Ox.

Enfin, observons que le moment d'inertie A de la sphère par rapport à un quelconque de ses diamètres est $\frac{2}{5}m\rho^2$.

Écrivons alors les conditions qui résultent de l'absence de glissement; la vitesse absolue du point A de la sphère est nulle. Or, les coordonnées de A par rapport aux axes mobiles sont o, o, 1; les projections de la vitesse de S sur les mêmes axes sont $\frac{dx}{dt}$, $(R-\rho)\frac{d\theta}{dt}$, o; on a donc les deux relations :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \rho q &= 0,\\ (R-\rho)\frac{d\theta}{dt} - \rho p &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations du mouvement du centre de gravité de la sphère sont évidemment

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - g\cos\beta,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y\cos\theta + Z\sin\theta,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -Y\sin\theta + Z\cos\theta - g\sin\beta; \end{aligned}$$

et les équations qui déterminent la rotation de la sphère sont, en appliquant les équations d'Euler les plus générales (*voir* P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle,* t. II, p. 196) :

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} \qquad\qquad &= -m\rho Y,\\ A\frac{dq}{dt} + Ar\frac{d\theta}{dt} &= m\rho X,\\ A\frac{dr}{dt} - Aq\frac{d\theta}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Ces deux derniers groupes de trois équations se transforment facilement en

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} X &= \frac{d^2x}{dt^2} + g\cos\beta,\\ Y &= (R-\rho)\frac{d^2\theta}{dt^2} - g\sin\beta\sin\theta,\\ Z &= -(R-\rho)\frac{d\theta^2}{dt^2} + g\sin\beta\cos\theta;\end{aligned}\right.$$

et

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{5(R-\rho)}{2\rho}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{5g}{2\rho}\sin\beta\sin\theta,\\ \frac{dq}{dt} &= -r\frac{d\theta}{dt} + \frac{5}{2\rho}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + g\cos\beta\right),\\ \frac{dr}{dt} &= q\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\right.$$

En adjoignant aux équations (1), (2), (3) la condition $Z < o$, qui exprime que la sphère reste pressée sur le cylindre, on a tout ce qui est nécessaire pour résoudre la question.

La seconde équation (1) donne

$$p = \frac{R-\rho}{\rho}\frac{d\theta}{dt},$$

et en portant cette valeur dans la première équation (3), on a, pour déterminer θ, l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{5}{7}\frac{g}{R-\rho}\sin\beta\sin\theta = o;$$

Y et Z résultent de la connaissance de θ, ainsi que p.

Faisant maintenant $\frac{dx}{dt} = u$, et prenant θ comme variable indépendante, on a, par la première équation (1) et la deuxième équation (3),

$$q = -\frac{u}{\rho},\qquad r = \frac{7}{2\rho}\frac{du}{d\theta} + \frac{5g}{2\rho}\cos\beta\frac{dt}{d\theta};$$

mais la dernière équation (3) donne

$$\frac{dr}{d\theta} = q,$$

et, par suite, on a finalement pour déterminer u en fonction de θ, l'équation différentielle

$$(5) \qquad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{2}{7} u + \frac{5}{7} g \cos\beta \frac{d^2 t}{d\theta^2} = 0;$$

X résulte de la connaissance de u, ainsi que q et r.

Introduisons les conditions initiales indiquées dans l'énoncé. En marquant de l'indice o les quantités relatives au temps $t = 0$, on a

$$u_0 = V\cos\alpha, \qquad (R-\rho)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = V\sin\alpha,$$

$$p_0 = \frac{V\sin\alpha}{\rho}, \qquad q_0 = -\frac{V\cos\alpha}{\rho}, \qquad r_0 = \omega.$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = \frac{2}{7}\omega\rho - \frac{5}{7}\frac{(R-\rho)g\cos\beta}{V\sin\alpha},$$

avec la condition

$$V^2 \sin^2\alpha > g(R-\rho)\sin\beta\cos\theta_0,$$

qui exprime que la sphère ne quitte pas le cylindre dès le début du mouvement.

L'équation (4) donne alors sans peine

$$dt = \frac{R-\rho}{V\sin\alpha}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{10}{7}\frac{g(R-\rho)\sin\beta}{V^2\sin^2\alpha}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}},$$

d'où t par une quadrature.

On en déduit p, Y, Z immédiatement; et la condition $Z < 0$ devient

$$V^2\sin^2\alpha + \frac{1}{7} g(R-\rho)\sin\beta(10\cos\theta_0 - 17\cos\theta) > 0.$$

En intégrant l'équation (5) d'après les règles générales, et faisant disparaître $\frac{d^2 t}{d\theta^2}$ à l'aide d'une intégration par partie, il vient d'abord, en posant

$$\varphi = \theta\sqrt{\frac{2}{7}},$$

et appelant A et B deux constantes arbitraires,

$$u = \mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi - \frac{5}{7} g\cos\beta\left(\cos\varphi\int\frac{dt}{d\varphi}\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\int\frac{dt}{d\varphi}\sin\varphi\, d\varphi\right).$$

En tenant alors compte des conditions initiales, on a définitivement

$$\begin{aligned} u = {} & \mathrm{V}\cos\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right) + \sqrt{\frac{2}{7}}\,\omega\rho\sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right) \\ & - \frac{5}{7}\frac{g(\mathrm{R}-\rho)\cos\beta}{\mathrm{V}\sin\alpha}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right)\right. \\ & \times\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right)d\theta}{\sqrt{1+\frac{10}{7}\frac{g(\mathrm{R}-\rho)\sin\beta}{\mathrm{V}^2\sin^2\alpha}(\cos\theta_0-\cos\theta)}} \\ & + \sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right) \\ & \left.\times\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(\theta-\theta_0)\right)d\theta}{\sqrt{1+\frac{10}{7}\frac{g(\mathrm{R}-\rho)\sin\beta}{\mathrm{V}^2\sin^2\alpha}(\cos\theta_0-\cos\theta)}}\right]. \end{aligned}$$

On en déduit q, r, X immédiatement; et finalement

$$x - x_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} u\frac{dt}{d\theta}\,d\theta,$$

de sorte que le problème est complètement ramené aux quadratures.

Les valeurs que peut prendre l'angle θ sont définies : 1° par la condition que $\frac{dt}{d\theta}$ soit réel, ce qui donne, $\sin\beta$ étant positif d'après l'énoncé,

$$\frac{7 V^2 \sin^2\alpha}{10 g (R-\rho)\sin\beta} + \cos\theta_0 > \cos\theta;$$

2° par la condition $Z < 0$, ou bien

$$\frac{7 V^2 \sin^2\alpha}{10 g (R-\rho)\sin\beta} + \cos\theta_0 > \frac{17}{10}\cos\theta.$$

En appelant k la quantité positive

$$\frac{7 V^2 \sin^2\alpha}{10 g (R-\rho)\sin\beta},$$

on obtient alors les résultats suivants pour la discussion de la variation de l'angle θ :

I. $\cos\theta_0 > 0$.

$k > \frac{17}{10} - \cos\theta_0$,	révolution complète, l'angle θ variant indéfiniment dans le même sens;
$\frac{7}{10}\cos\theta_0 < k < \frac{17}{10} - \cos\theta_0$,	le mouvement commence, puis la sphère quitte le cylindre;
$k < \frac{7}{10}\cos\theta_0$,	la sphère quitte tout de suite le cylindre.

II. $\cos\theta_0 < 0$.

$k > \frac{17}{10} - \cos\theta_0$,	révolution complète;
$-\cos\theta_0 < k < \frac{17}{10} - \cos\theta_0$,	le mouvement commence, puis la sphère quitte le cylindre;
$k < -\cos\theta_0$,	mouvement oscillatoire, θ prenant la valeur moyenne π.

En particulier, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que θ varie toujours dans le même sens, la sphère ne quittant jamais le cylindre, est toujours

$$k > \frac{17}{10} - \cos\theta_0.$$

Si l'on a $\beta = 0$, c'est-à-dire si le cylindre est vertical, on a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \theta = \theta_0 + \frac{V\sin\alpha}{R-\rho}t,$$

et la sphère est toujours pressée sur le cylindre.

On a ici

$$u = \frac{dx}{dt} = V\cos\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\frac{V\sin\alpha}{R-\rho}t\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{7}}\omega\rho - \frac{5}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{g(R-\rho)}{V\sin\alpha}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\frac{V\sin\alpha}{R-\rho}t\right),$$

d'où l'on déduit x sans peine. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que cette quantité x est purement périodique.

Ces derniers résultats ne s'appliquent pas si l'on a $V\sin\alpha = 0$, car alors

$$\theta = \theta_0, \qquad p = 0.$$

Mais on trouve immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{5}{7}g = 0,$$

d'où

$$x = x_0 + V\cos\alpha.t - \frac{5}{14}gt^2,$$

$$q = -\frac{V\cos\alpha}{\rho} + \frac{5}{7}\frac{g}{\rho}t, \qquad r = \omega.$$

[M²4iδ]

DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE VILLARCEAU;

PAR M. A. MANNHEIM.

Ma Note sur le théorème de Schœlcher [1], dans laquelle il est question du théorème de Villarceau sur la nature de la section d'un tore par un plan bitangent à cette surface, m'a rappelé des démonstrations de ce théorème que j'ai trouvées, il y a déjà longtemps, et que je n'ai pas eu l'occasion de faire connaître.

Considérons un tore comme l'enveloppe d'une sphère de grandeur invariable. Par le centre O du tore menons le plan (P) bitangent à cette surface. La section du tore par ce plan est l'enveloppe des petits cercles, intersections de la sphère mobile et de (P). Ces cercles ont leurs centres sur l'ellipse (E), projection sur (P) du cercle décrit par le centre de la sphère mobile; ils coupent orthogonalement le cercle qui, sur (P), a pour diamètre le petit axe de (E); ceci résulte de ce que ce cercle est la trace de la sphère de centre O qui coupe orthogonalement les sphères dont le tore est l'enveloppe [2].

Il reste maintenant à démontrer cette propriété :

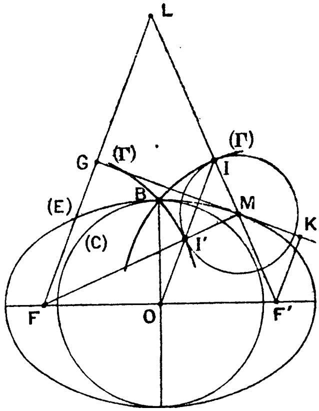
L'enveloppe des cercles dont les centres sont sur une ellipse (E) *et qui coupent orthogonalement le*

(¹) *Voir* page 105 de ce Volume.

(²) De la même manière on voit que la *section d'un tore par un plan, qui coupe l'axe de cette surface, est l'enveloppe des cercles dont les centres sont sur une ellipse et qui coupent orthogonalement un cercle.* On a ainsi la génération des anallagmatiques du quatrième degré donnée par Moutard.

cercle (C) *qui a pour diamètre le petit axe de cette courbe, se compose de deux cercles* (Γ).

Le grand axe de longueur $2a$, de l'ellipse (E), est égal au diamètre du cercle décrit par le centre de la sphère mobile, son petit axe, de longueur $2b$, est le



segment compris entre les points de contact de (P), par suite sa demi-distance focale c est égale au rayon de la sphère mobile.

Appelons r le rayon d'un cercle ayant pour centre le point M de l'ellipse (E) et qui coupe à angle droit le cercle (C). On a

$$r^2 = \overline{MO}^2 - b^2.$$

Appelons F, F' les foyers de (E),

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\,\overline{MO}^2 + 2c^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

d'où

$$r^2 = \frac{\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 2a^2}{2} = \left(\frac{MF - MF'}{2}\right)^2;$$

ainsi

$$r = \frac{\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}}{2},$$

et comme

$$a = \frac{\mathrm{MF} + \mathrm{MF'}}{2},$$

on a donc

$$\mathrm{MF} = r + a,$$
$$\mathrm{MF'} = a - r.$$

On peut alors conclure que le *cercle de centre arbitraire* M *sur* (E), *et qui coupe orthogonalement* (C), *est toujours tangent aux cercles fixes* (Γ) *de centres* F *et* F′, *et de rayon de longueur a, lesquels constituent l'enveloppe cherchée.*

Autrement : Menons la tangente MG à (E) et abaissons sur cette droite la perpendiculaire FG qui coupe F′M au point L.

Par le centre O menons la parallèle OI à FL.

Elle coupe F′L au point I, le segment OI est égal à FG.

On voit de même que OI′ est égal à la perpendiculaire F′K abaissée sur la tangente en M à (E).

On a

$$\mathrm{FG} \times \mathrm{F'K} = b^2.$$

On a donc aussi

$$\mathrm{OI} \times \mathrm{OI'} = b^2.$$

Le cercle de centre M, qui passe par I, I′, coupe alors orthogonalement le cercle (C), et comme ce cercle de centre M est tangent en I, I′ aux cercles fixes (Γ), *ces cercles constituent l'enveloppe cherchée.*

Autrement : En rédigeant ces anciennes démonstrations j'ai remarqué qu'on a encore la suivante :

Des points F, F′ comme centres décrivons les cercles (Γ) qui passent par les extrémités du petit axe de (E). Le lieu des centres M des cercles qui leur sont tangents est une ellipse, qui a pour foyers les centres F, F′, de ces cercles et qui passe par B. Cette courbe n'est autre alors que (E). Le point O étant un centre de similitude des cercles (Γ), la droite de contact II′ passe par ce point et l'on a

$$\mathrm{OI} \times \mathrm{OI}' = \overline{\mathrm{OB}}^2.$$

Le cercle, dont le centre M est sur l'ellipse, est donc en outre orthogonal au cercle (C), et comme ce cercle, lorsque M varie de position sur (E), est toujours tangent aux cercles (Γ), *ceux-ci constituent l'enveloppe cherchée*.

Remarque. — Les cercles (Γ) sont égaux au cercle décrit par le centre de la sphère mobile dont le tore est l'enveloppe.

Leurs projections sur le plan de ce dernier cercle sont des ellipses égales à (E).

[D]

SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE;

PAR M. E. IAGGI.

PREMIER MÉMOIRE.

Le problème de transformation qui fait l'objet de ce Mémoire est le suivant :

Étant données deux fonctions quelconques $F(x)$ *et* $\Phi(x)$, *existe-t-il des* SUBSTITUTIONS DE TRANSFORMATION $t(x)$ *et* $\tau(x)$ *telles que l'on ait identiquement*

$$(1) \qquad F(t) = \Phi(x), \qquad \Phi(\tau) = F(x)$$

et, dans le cas où il en existe, quelles sont les propriétés des fonctions t et τ, et enfin comment peut-on déterminer F *et* Φ *lorsqu'on se donne les fonctions t et τ?*

On voit que ce problème général comprend comme cas particulier le problème de la périodicité générale des fonctions que nous avons étudié précédemment, puisqu'il suffit de supposer que F et Φ sont identiques pour que t et τ soient des substitutions laissant F invariable.

1. Supposons tout d'abord que F et Φ soient des fonctions complètes uniformes; alors les équations (1) déterminent des fonctions t et τ qui, décomposées en fonctions uniformes (partielles ou complètes), sont solutions simples de ces équations, sauf peut-être en des points x particuliers qui sont les points multiples des groupes de transformation composés l'un des fonctions t, l'autre des fonctions τ; on le démontre facilement de la même manière que nous avons démontré que toute fonction complète uniforme F admet des substitutions la laissant invariable, qui sont racines simples de l'équation $F(s) = F(x)$ sauf aux points multiples du groupe.

Au contraire, si F et Φ sont des fonctions complètes multiformes se décomposant respectivement en dehors de leurs multiplicités en fonctions partielles uniformes $f_1, f_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, les équations (1) se décomposent, chacune, en une série d'équations :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} f_1(t) = \varphi_{\alpha_1}(x), & \varphi_1(\tau) = f_{\beta_1}(x), \\ f_2(t) = \varphi_{\alpha_2}(x), & \varphi_2(\tau) = f_{\beta_2}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ sont les indices $1, 2, \ldots,$

dans un certain ordre; et l'on voit que F et Φ devraient satisfaire à certaines conditions pour qu'existent simultanément toutes les équations $f_n(t) = \varphi_{\alpha_n}(x)$ ou toutes les équations $\varphi_n(\tau) = f_{\beta_n}(x)$. Ce n'est donc que dans des cas exceptionnels que deux fonctions multiformes F et Φ peuvent être transformées l'une en l'autre par des substitutions s ou τ; mais il en existe évidemment de telles, car si $F = \chi(f)$, et $\Phi = \chi(\varphi)$ où χ est une fonction complète multiforme et f et φ des fonctions complètes uniformes, les fonctions F et Φ admettent évidemment les substitutions de transformation de f et de φ; c'est le cas où, dans les équations (2),

$$\alpha_n = \beta_n = n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les fonctions partielles f_n et φ_n étant obtenues par une *même* fonction partielle, partie de χ.

Nous considérerons donc particulièrement le cas de deux fonctions complètes uniformes quelconques F et Φ qui, toujours, ont des substitutions les transformant l'une en l'autre.

Nous désignerons, dans tous les cas, par *groupe* (FΦ) *de transformation* l'ensemble de toutes les fonctions t, racines de la première équation (1), qui transforment F en Φ; par *groupe* (ΦF) *de transformation* l'ensemble de toutes les fonctions τ, racines de la seconde équation (1), qui transforment Φ en F.

Nous désignerons aussi par *groupe* (F) le groupe des substitutions s qui laissent F invariable et sont les racines de l'équation

$$(3) \qquad F(s) = F(x);$$

et par *groupe* (Φ) le groupe de substitutions σ qui laissent Φ invariable et sont les racines de l'équation

$$(4) \qquad \Phi(\sigma) = \Phi(x).$$

Les groupes de transformation ($F\Phi$) et (ΦF) jouissent de propriétés générales simples que nous démontrerons dans ce qui suit.

2. De ce que les équations (1) sont symétriques l'une de l'autre on déduit que les *substitutions* τ *du groupe* (ΦF) *sont les inverses des substitutions* t *du groupe* ($F\Phi$); on le vérifie facilement en substituant à x l'inverse t_{-n} de t_n dans l'équation

$$F\left(t_n(x)\right) = \Phi(x);$$

on a ainsi en supposant $t_n\left(t_{-n}(x)\right) = x$ (¹) :

$$F(x) = \Phi\left(t_{-n}(x)\right),$$

ce qui prouve que t_{-n} est l'une des fonctions τ du groupe (ΦF); il en résulte immédiatement que, sauf dans des cas particuliers que nous étudierons plus tard, le même groupe de transformation, ($F\Phi$) par exemple, ne contient pas généralement l'inverse d'aucune de ses substitutions, c'est-à-dire n'a pas d'élément *commun* avec le deuxième groupe (ΦF).

Si dans la première équation (1) on fait une substitution τ quelconque de (ΦF), on obtient

$$(5) \qquad F\left(t\left(\tau(x)\right)\right) = \Phi\left(\tau(x)\right) = F(x).$$

Donc, $t\left(\tau(x)\right)$ est, ou x, ou une substitution s du groupe (F); en faisant dans la seconde équation (1) une substitution t quelconque de ($F\Phi$), on verrait de même

(¹) Nous rappelons que si t_{-n} est multiforme et t_n uniforme, on a nécessairement $t_n(t_{-n}) = x$ quelle que soit la fonction partielle t_n choisie, mais il n'en est pas de même pour $t_{-n}(t_n)$ qui n'est égal à x que pour une fonction partielle t_{-n} convenablement choisie, et, en général, a pour valeurs toutes les substitutions x, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... de la fonction uniforme $t_n(x)$.

que $\tau(t(x))$ est, ou x, ou une substitution σ du groupe Φ, c'est-à-dire que :

I. *Les substitutions t de* $(F\Phi)$ *transforment le groupe de transformation* (ΦF) *en le groupe* (F) *des substitutions d'invariabilité de* $F(x)$ *et les substitutions* τ *du groupe de transformation* (ΦF) *transforment le groupe de transformation* $(F\Phi)$ *en le groupe* (Φ) *de substitutions d'invariabilité de* $\Phi(x)$.

Si dans la première équation (1) on fait une substitution σ du groupe (Φ) de $\Phi(x)$, on a

$$F\big(t(\sigma(x))\big) = \Phi(\sigma(x)) = \Phi(x). \tag{6}$$

Donc $t(\sigma(x))$ est encore une substitution t du groupe de transformation $(F\Phi)$; on voit de même, en faisant une substitution s du groupe (F) dans la seconde équation (1)

$$\Phi\big(\tau(s(x))\big) = F(s(x)) = F(x), \tag{6'}$$

que $\tau(s(x))$ est encore une substitution τ du groupe (ΦF); c'est-à-dire que :

II. *Les substitutions s du groupe* (F) *de* $F(x)$ *ne font que permuter les éléments du groupe de transformation* (ΦF) *et les substitutions σ du groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *ne font que permuter les éléments du groupe de transformation* $(F\Phi)$.

Si dans l'équation (3) on fait une substitution t quelconque du groupe $(F\Phi)$, on a

$$F\big(s(t(x))\big) = F(t(x)) = \Phi(x); \tag{7}$$

$s(t(x))$ est donc encore une substitution t du groupe de transformation $(F\Phi)$; et, de même, si dans l'équation (4) on fait une substitution τ quelconque du groupe (ΦF), l'équation

$$(7') \qquad \Phi\big(\sigma(\tau(x))\big) = \Phi(\tau(x)) = F(x)$$

montre que $\sigma(\tau(x))$ est encore une substitution τ de (ΦF); c'est-à-dire que :

III. *Le groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *est transformé en le groupe de transformation* (ΦF) *par les substitutions du groupe* (ΦF) *lui-même et le groupe* (F) *de* $F(x)$ *est transformé en le groupe de transformation* $(F\Phi)$ *par les substitutions du groupe* $(F\Phi)$ *lui-même.*

Les théorèmes I, II, III expriment les propriétés corrélatives les plus générales des quatre groupes (F), (Φ), $(F\Phi)$, (ΦF); à ces propriétés nous ajouterons les suivantes qui sont relatives aux points multiples des groupes $(F\Phi)$, (ΦF), c'est-à-dire aux points x où quelques substitutions t, ou τ, s'égalent.

3. Si l'on désigne par F_{-1}, Φ_{-1} les fonctions *inverses* des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, les quatre groupes considérés peuvent être représentés par les égalités

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} (F) & F_{-1}\big(F(x)\big) = x, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \\ (\Phi) & \Phi_{-1}\big(\Phi(x)\big) = x, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \end{array} \right.$$

$$(9) \left\{ \begin{array}{ll} (F\Phi) & F_{-1}\big(\Phi(x)\big) = t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \\ (\Phi F) & \Phi_{-1}\big(F(x)\big) = \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots. \end{array} \right.$$

Les points multiples de (F), où quelques-unes des s s'égalent, sont les points $a, a', a'', \ldots$, pour lesquels $F(x)$ prend des valeurs b, b', ... qui sont les points multiples de la fonction complète multiforme $F_{-1}(x)$, ou si l'on veut les points critiques des fonctions partielles uniformes en lesquelles $F_{-1}(x)$ se décompose ; or, dire que deux au moins des substitutions t s'égalent, c'est dire que deux fonctions partielles composant la fonction complète multiforme $F_{-1}(\Phi(x))$ s'égalent : il est donc nécessaire et suffisant pour cela que $\Phi(x)$ soit égale à l'une des valeurs b indiquées plus haut, qui sont déterminées par les points multiples a du groupe (F) sous la forme

$$b = F(\alpha);$$

puisqu'on doit avoir

$$\Phi(x) = b = F(\alpha),$$

les points multiples du groupe de transformation (FΦ) (où deux substitutions t au moins s'égalent) *sont donc les transformés* $\tau(a)$ *par les substitutions* τ *du groupe* (ΦF) *des points multiples* a *du groupe* (F) *de* $F(x)$.

On verrait de même que les points multiples du groupe de transformation (ΦF) (où deux substitutions τ au moins s'égalent) *sont les transformés* $t(\alpha)$ *des points multiples* α *du groupe* (Φ) *de* $\Phi(x)$ *par les substitutions du groupe* (FΦ).

4. Les propriétés que nous avons démontrées appartiennent à tout couple de groupes de transformation (FΦ), (ΦF), c'est-à-dire aux groupes de transformation de deux fonctions complètes uniformes F et Φ *quelconques*, et aux groupes de transformation de deux fonctions complètes multiformes F et Φ, lorsque celles-ci possèdent des groupes de transformation. Il en est de même des propriétés suivantes de tout couple de fonctions F et Φ elles-mêmes qui ont des substitutions de transformation.

Considérons les groupes (FΦ) et (ΦF) de transformation de deux fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ et supposons qu'on puisse poser

$$F(x) = \Psi(f(x)), \qquad \Phi(x) = \Psi(\varphi(x)),$$

où f et φ sont des fonctions qui admettent des substitutions de transformation dont nous désignerons les groupes respectifs par $(f\varphi)$ et (φf) (ce qui a lieu nécessairement si f et φ sont des fonctions complètes uniformes) et où Ψ est une fonction *périodique* (ce qui a lieu nécessairement si Ψ est complète uniforme). Il est évident que les substitutions qui changent f en φ, changent F en Φ, et par conséquent le groupe $(f\varphi)$ est un sous-groupe du groupe de transformation $(F\Phi)$; de même, (φf) est un sous-groupe du groupe de transformation (ΦF). Pour que $(f\varphi)$ coïncide avec $(F\Phi)$, il est nécessaire qu'il n'existe aucune substitution $t(x)$ changeant $f(x)$ en une fonction $S(\varphi(x))$ pour laquelle on aurait

$$\Psi(S(z)) = \Psi(z)$$

et, par suite,

$$F(t) = \Psi(f(t)) = \Psi\big(S(\varphi(x))\big) = \Psi(\varphi(x)) = \Phi(x).$$

C'est ce qui arrive si Ψ_z est une fonction *non-périodique,* c'est-à-dire n'admettant aucune substitution $S(z)$ (ce qui se produit, par exemple, si Ψ est rationnelle linéaire, ou est multiforme non-périodique, par exemple est l'inverse d'une fonction uniforme).

Au contraire, si Ψ_z est une fonction périodique ayant des substitutions S_z, l'équation

$$F(t) = \Phi(x) \qquad \text{ou} \qquad \psi(f(t)) = \Psi(\varphi(x))$$

donne pour le groupe $(F\Phi)$

$$f_{-1}\Big(\Psi_{-1}\big(\Psi(\varphi(x))\big)\Big) = t_1, \quad t_2, \quad \ldots$$

où, puisque $\Psi_{-1}(\Psi(z)) = S(z)$,

$$f_{-1}(S(\varphi(x))) = t_1, \quad t_2, \quad \ldots,$$

et l'on voit que le groupe $(F\Phi)$ ne se réduit au groupe $(f\varphi)$, qui est déterminé par $f_{-1}(\varphi(x))$, que si S_z se réduit à z, ou enfin, si Ψ est non-périodique (rationnelle linéaire ou multiforme non-périodique).

On conclut de là :

1° Que toutes les fonctions uniformes qui ont mêmes groupes de transformation que deux fonctions uniformes données F et Φ sont comprises dans les formules

$$(10) \qquad \frac{\lambda F + \mu}{\nu F + \rho}, \quad \frac{\lambda \Phi + \mu}{\nu \Phi + \rho};$$

2° Que tout couple de fonctions de la forme

$$\Psi(F), \quad \Psi(\Phi),$$

où Ψ, F, Φ sont complètes uniformes et Ψ non linéaire admet les substitutions de transformation de F et de Φ, mais *en admet aussi d'autres,* en sorte que $(F\Phi)$ et (ΦF) ne sont que des sous-groupes des groupes de transformation des deux fonctions considérées.

3° Que, d'une manière générale, les groupes de transformation des fonctions $\Psi(F)$ et $\Psi(\Phi)$ ne sont identiques aux groupes des fonctions F et Φ (uniformes ou multiformes) qu'autant que Ψ est une fonction non-périodique, c'est-à-dire une fonction linéaire ou une fonction multiforme non-périodique. Dans tous les cas, nous pourrons dire que les fonctions (10) ont mêmes groupes de transformation que F et Φ.

On voit que les propriétés des fonctions relativement à leurs groupes de transformation sont analogues à celles qui sont relatives aux groupes de substitutions d'invariabilité.

Cette analogie peut se remarquer encore à l'égard de la discontinuité ou de la continuité des groupes : on voit facilement qu'un groupe de transformation $(F\Phi)$ ou (ΦF) ne peut être continu qu'autant que les fonctions F et Φ sont toutes deux linéales ou aréales, c'est-à-dire qu'il y ait des fonctions partielles $f_1, f_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ infiniment voisines quel que soit x [équations (2)] :

Deux fonctions ponctales F *et* Φ (*uniformes ou multiformes*) *ont donc des groupes de transformation* $(F\Phi)$, (ΦF) DISCONTINUS. *Au contraire, les groupes relatifs à deux fonctions* F *et* Φ *sont simplement continus si* F *et* Φ *sont linéales, doublement continus si* F *et* Φ *sont aréales.*

De ce que les fonctions ayant des groupes de transformation donnée sont de la forme (10), où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires, et F et Φ un couple de ces fonctions, on conclut que F et Φ sont les quotients des intégrales respectives de deux équations linéaires homogènes du deuxième ordre dont les coefficients ne dépendent que des substitutions de transformation données. Avant de former ces équations, nous donnerons encore quelques propriétés des substitutions de transformation.

5. Posons

$$\Phi(x) = \Psi_1(F(x)).$$

$\Psi(z)$ n'est jamais une fonction composée; elle n'est une fonction complète uniforme que dans des cas très particuliers, même lorsque F et Φ sont complètes uniformes. Soient donc d'une manière générale $\psi_1, \psi'_1, \psi''_1, \ldots$ les fonctions partielles uniformes en lesquelles la fonction complète multiforme Ψ se décompose en dehors de ses multiplicités.

Soient

$$t'_1,\quad t''_1,\quad t'''_1,\quad \ldots,\quad t_1^{(n)},\quad \ldots,\quad = \mathrm{F}_{-1}(\Phi(x))$$

les substitutions du groupe de transformation $(\mathrm{F}\Phi)$ et soient $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)}, \ldots$, les itérées de $t_1^{(n)}$; soient, d'autre part, $\psi_1^{(p)}, \psi_2^{(p)}, \ldots$, les itérées de $\psi_1^{(p)}$. En faisant la substitution $t_1^{(n)}$ dans $\mathrm{F}(x)$, on a

$$(11)\qquad \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x) = \psi_1^{(p)}(\mathrm{F}(x)),$$

où $\psi_1^{(p)}$ est l'une des fonctions partielles uniformes en lesquelles Ψ_1 se décompose. Faisant plusieurs fois de suite la substitution $t_1^{(n)}$, on a

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}(t_2^{(n)}) = \psi_1^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) \;= \psi_2^{(p)}(\mathrm{F}(x)),\\ \mathrm{F}(t_3^{(n)}) = \psi_2^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) \;= \psi_3^{(p)}(\mathrm{F}(x)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathrm{F}(t_\mu^{(n)}) = \psi_{\mu-1}^{(p)}(\mathrm{F}(t_1^{(n)})) = \psi_\mu^{(p)}(\mathrm{F}(x)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

Supposons qu'il existe un nombre entier fini μ tel que $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$ (ce qui exige que Ψ soit algébrique); on a alors

$$(13)\qquad \mathrm{F}(t_\mu^{(n)}) = \mathrm{F}(x),$$

ce qui signifie que $t_\mu^{(n)}$ est une des substitutions s qui laissent $\mathrm{F}(x)$ invariable. Faisant encore la substitution $t_1^{(n)}$, on a

$$(14)\qquad \mathrm{F}(t_{\mu+1}^{(n)}) = \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x),$$

et, par conséquent, l'itérée $t_{\mu+1}^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fait partie, comme $t_1^{(n)}$, du groupe de transformation $(\mathrm{F}\Phi)$, et l'on verrait de la même manière que $(\mathrm{F}\Phi)$ contient toutes les itérées de $t_1^{(n)}$ de la forme

$$t_{m\mu+1}^{(n)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les réciproques sont évidentes :

1° Si $t_\mu^{(n)}$ est identique à une substitution s du groupe (F), l'équation (13) et la dernière équation (12) montrent que $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$.

2° Si $t_{\mu+1}^{(n)}$ fait partie du groupe de transformation (FΦ), comme $t_1^{(n)}$, l'équation (14) où l'on substitue à x l'inverse $\tau_1^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ donne l'équation (13) et, par conséquent, $t_\mu^{(n)}$ est l'une des substitutions s du groupe (F) et $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$.

Des équations

$$\mathrm{F}(t_{\mu-1}^{(p)}) = \psi_{\mu-1}^{(p)}(\mathrm{F}(x)), \qquad \psi_\mu^{(p)}(z) = z,$$

on déduit encore

$$\psi_1^{(p)}\big(\mathrm{F}(t_{\mu-1}^{(n)})\big) = \psi_\mu^{(p)}(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{F}(x),$$

c'est-à-dire

$$\Phi(t_{\mu-1}^{(n)}) = \mathrm{F}(x), \tag{15}$$

et, par conséquent, que $t_{\mu-1}^{(n)}$ est l'une des substitutions τ du groupe (ΦF); la réciproque est évidente, c'est-à-dire que, si l'une des itérées $t_{\mu-1}^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fait partie du groupe (ΦF), $t_\mu^{(n)}$ appartient au groupe (F); mais on voit de plus, en faisant la substitution $t_1^{(n)}$ dans l'équation précédente,

$$\Phi(t_\mu^{(n)}) = \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x), \tag{16}$$

que $t_\mu^{(n)}$ est une des substitutions σ du groupe Φ, c'est-à-dire que l'hypothèse faite, $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$, n'est réalisée que lorsque $\mathrm{F}(x)$ et $\Phi(x)$ ont des substitutions communes les laissant invariables. Les théorèmes généraux I, II, III conduisent à la même conclusion lorsqu'on suppose, ce qui a lieu ici, que les groupes de transformation (FΦ) et (ΦF) ont des substitutions communes, *inverses les unes des autres*. Ces mêmes théorèmes permettent de démontrer la réciproque de la proposition précédente : si (F) et (Φ) ont des substitutions communes, il en est de même de (FΦ) et (ΦF), nous n'y insistons pas.

D'après ce qui précède, on voit qu'il est impossible que l'itérée $t_2^{(n)}$ de $t_1^{(n)}$ fasse partie du même groupe (FΦ), à moins que, μ étant égal à 1,

$$\Phi(x) = \mathrm{F}(t_2^{(n)}) = \Phi(t_1^{(n)}), \qquad \mathrm{F}(t_1^{(n)}) = \Phi(x) = \mathrm{F}(x),$$

et, par suite, que les deux fonctions F_x, Φ_x étant identiques, il n'y ait plus à proprement parler de transformations.

Mais le cas où $\mu = 2$, $\psi_2(z) = z$, est particulièrement intéressant : ψ_1 est alors *inverse d'elle-même*, c'est-à-dire que l'équation qui lie F et Φ est *symétrique* par rapport à F et Φ. Les itérées *impaires*

$$t_1^{(p)},\quad t_3^{(p)},\quad t_5^{(p)},\quad \ldots,$$

transforment $\mathrm{F}(x)$ en $\Phi(x)$ et réciproquement. Les itérées paires

$$t_2^{(p)},\quad t_4^{(p)},\quad \ldots$$

laissent invariables à la fois $\mathrm{F}(x)$ et $\Phi(x)$. Le cas particulier où $t_1^{(p)}$ est inverse d'elle-même est compris dans le cas précédent. Si Ψ est une fonction complète uniforme, l'hypothèse $\Psi_2(z) = z$ exige que cette fonction soit linéaire et inverse d'elle-même, c'est-à-dire que Φ soit de l'une des deux formes

$$(17) \qquad \mathrm{A} - \mathrm{F}(x), \qquad \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{B}}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{A}}.$$

La première forme, dans laquelle on suppose A nul, donne le cas particulier des substitutions t changeant $F(x)$ de signe.

Les substitutions

$$t = (4m+2)K + 2m'iK' + x,$$

qui changent de signe $\operatorname{sn}(x \mid 2K, iK')$ et qui, itérées, laissent invariable cette fonction, en sont un exemple.

Les substitutions

$$t = 4mK + (2m'+1)iK' + x$$

qui changent $\operatorname{sn} x$ en $\frac{1}{k \operatorname{sn} x}$ et qui, itérées, laissent invariable cette fonction, sont un exemple du second cas $\left(A = O,\ B = \frac{1}{k}\right)$.

Dans le cas plus général où μ est quelconque, mais fini, l'hypothèse que Ψ soit fonction complète uniforme entraîne également la condition que cette fonction et, par suite, ses itérées, soient linéaires (du genre elliptique). Au contraire, lorsque Ψ est une fonction complète uniforme non linéaire, il n'y a pas de valeur finie de μ pour laquelle l'itérée $\Psi_\mu(z)$ se réduit à z. Dans quelques cas, il pourra arriver que $\Psi_\mu(z)$ tende vers z, μ croissant indéfiniment (et l'on peut aussi considérer ce cas s'il s'agit d'une fonction partielle ψ, Ψ étant multiforme); alors $t_\mu^{(n)}$ tend vers une substitution s du groupe (F) et, par suite, aussi de (Φ); mais cette limite est aussi une substitution du groupe (ΦF). Il s'ensuit que cette limite $t(x)$ devrait être une substitution laissant invariables $F(x)$ et $\Phi(x)$ et, d'autre part, transformant Φ en F :

$$F(t) = F(x), \qquad \Phi(t) = \Phi(x), \qquad \Phi(t) = F(x).$$

Ces équations sont incompatibles, à moins que la limite $t(x)$ ne se réduise à une constante et que cette constante ne soit un point singulier essentiel commun aux deux fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ [nous avons vu déjà que les points essentiels d'une fonction périodique $F(x)$ se présentent comme limites, pour n infini des substitutions $s_n(x)$ de $F(x)$].

Il est évident que, dans tous les cas où Ψ est une fonction complète uniforme, les équations

$$F(t_\mu^{(p)}) = \Psi_\mu(F(x)) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

sont vérifiées à la fois par toutes les substitutions $t^{(p)}$ du groupe $(F\Phi)$; et qu'en particulier, si μ étant fini,

$$\Psi_\mu(z) = z,$$

toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $t_\mu^{(p)}$ (p quelconque) sont des substitutions communes à (F) et (Φ), c'est-à-dire que toutes les propriétés démontrées sur $t_1^{(p)}$ sont vraies pour toutes les substitutions $t_1, t_1', t_1'', \ldots$ de $(F\Phi)$. On peut démontrer que ceci est vrai, non seulement lorsque Ψ est complète uniforme et, par suite, linéaire lorsque $\Psi_\mu = z$, mais même lorsque Ψ_1 est multiforme et se décompose, en dehors de ses multiplicités, en fonctions partielles ψ_1, $\psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_1^{(p)}, \ldots$. En effet, les fonctions ψ_1 subissent entre elles certaines permutations lorsque z décrit un contour fermé autour d'un de leurs points critiques ; de plus, on peut choisir un contour fermé, passant par un point z quelconque, de manière que $\psi_1^{(p)}$ soit remplacée par l'une quelconque des autres fonctions choisie à l'avance $\psi_1^{(q)}$ par exemple ([1]). Si donc on suppose que

---

([1]) Si cela n'était pas, la fonction Ψ_1, ensemble des ψ_1, ne serait pas une fonction *complète unique*, mais une fonction *composée*, ce qui ne peut être.

la $\mu^{\text{ième}}$ itérée de $\psi_1^{(p)}(z)$ se réduit à z :

$$\psi_\mu^{(p)}(z) = z,$$

il en sera de même pour les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées de ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, ..., car $\psi_1^{(p)}$ peut être remplacée successivement dans cette égalité par ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, ..., en faisant décrire à z des contours fermés convenablement choisis. D'autre part, toutes les substitutions t donnent des égalités de la forme

$$F(t_1^{(n)}) = \psi_1^{(p)}(F(x)),$$

et en prenant les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées,

$$F(t_\mu^{(n)}) = \psi_\mu^{(p)}(F(x)).$$

Toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $\psi_\mu(z)$ se réduisant à z, il s'ensuit que toutes les $\mu^{\text{ièmes}}$ itérées $t_\mu^{(n)}$ des substitutions t de $(F\Phi)$ sont des substitutions de (F) et de (Φ), et, par suite, *toutes les substitutions de* $(F\Phi)$ *jouissent des propriétés démontrées précédemment sur l'une d'elles dans l'hypothèse* $\psi_\mu^{(p)}(z) = z$; les substitutions τ de (ΦF) inverses des t, jouissent évidemment de propriétés corrélatives qu'on énoncerait en permutant les lettres F et Φ dans les énoncés relatifs aux substitutions t.

6. Supposons écrites toutes les égalités

$$F(t_q^{(n)}(x)) = \psi_q^{(p)}(F(x)),$$

dont le nombre est infini si F est transcendante; le nombre des $\psi_q^{(p)}$ distinctes n'est pas nécessairement infini et est égal à μ fois l'ordre de la fonction multiforme Ψ_1, ordre qui peut être fini; il s'ensuit que, dans les égalités précédentes, des substitutions $t^{(n)}$ distinctes produisent la même transformation de $F(x)$.

Supposons que

$$F\left(t_{q'}^{(n')}(x)\right) = \psi_{q'}^{(p')}\left(F(x)\right).$$

On aura alors

$$F\left(t_q^{(n)}\left(t_{q'}^{(n')}(x)\right)\right) = \psi_q^{(p)}\left(\psi_{q'}^{(p')}\left(F(x)\right)\right),$$

et l'on voit que, d'une manière générale, la substitution à x de

$$(18) \qquad t_q^{(n)}\left(t_{q'}^{(n')}\left(t_{q''}^{(n'')}(\ldots(x)\ldots)\right)\right),$$

où les $n, n', n'', \ldots$ sont tous distincts, transforme $F(x)$ en la fonction

$$(19) \qquad \psi_q^{(p)}\left(\psi_{q'}^{(p')}\left(\psi_{q''}^{(p'')}(\ldots F(x)\ldots)\right)\right),$$

où les $p, p', p'', \ldots$ ne sont pas tous distincts en vertu de la remarque faite plus haut.

D'ailleurs $q, q', q'', \ldots$ prennent toutes les valeurs possibles; mais dans les fonctions précédentes que nous désignerons par $S^{(m)}\left(F(x)\right)$ ou $S^{(m)}(z)$, $\left(z = F(x)\right)$, il suffit que $q, q', q'', \ldots$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, \mu - 1$, en vertu de l'égalité

$$\psi_{\mu+q}^{(p)}(z) = \psi_q^{(p)}(z),$$

pour qu'on obtienne toutes les fonctions $S^{(m)}$ distinctes; au contraire, si l'on pose

$$t_\mu^{(n)}(x) = s_1^{(n)}(x),$$

$s_1^{(n)}$ et toutes ses itérées étant des substitutions de (F), et s'il existe un nombre ν_n tel que

$$s_{\nu_n}^{(n)}(x) = x$$

toutes les itérées $t_q^{(n)}$ (distinctes) de $t_1^{(n)}$ se réduisent aux $\mu\nu_n - 1$ qu'on obtient par les valeurs suivantes de q :

$$q = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mu\nu_n - 1.$$

Ce raisonnement s'applique à tous les nombres q, q', q'', ...; les nombres ν, ν', ν'', ... correspondants ne sont pas nécessairement égaux et peuvent d'ailleurs être infinis. Dans tous les cas, l'ensemble de toutes les substitutions possibles de la forme (18) (qui comprennent comme on l'a vu celles formées avec les inverses τ des t) est *un groupe de substitutions d'invariabilité de certaines fonctions périodiques de* x *: soit* (E) *ce groupe.*

D'autre part l'ensemble de toutes les fonctions $S^{(m)}(z)$ forme *un groupe de substitutions d'invariabilité de certaines fonctions périodiques de* $z = F(x)$ *: soit* (G) *ce groupe.*

Si le nombre des $S^{(m)}(z)$ est fini, on peut former une fonction $G(z)$ de groupe (G), au moyen d'une fonction symétrique du premier ordre de l'une des formes

$$z\prod_m S^{(m)}(z), \quad z + \sum_m S^{(m)}(z), \quad \frac{1}{z} + \sum_m \frac{1}{S^{(m)}(z)}$$

qui d'ailleurs sont fonctions linéaires l'une de l'autre (*voir* la Note précédente); si ces trois fonctions se réduisaient à des constantes, on prendrait une fonction du second ordre se réduisant alors au premier, par exemple

$$z^2 + \sum_m [S^{(m)}(z)]^2;$$

enfin si le nombre des $S^{(m)}(z)$ est infini, on prendra la troisième forme écrite plus haut si celle-ci n'est pas constante et est convergente. On sait que si les sommes analogues à la précédente formées au moyen des puissances 1, 2, 3, ..., $\omega - 1$ sont constantes ou divergentes, et s'il n'en est pas de même pour la $\omega^{\text{ième}}$, on peut prendre celle-ci pour fonction G :

$$(20) \qquad G(z) = \frac{1}{z^\omega} + \sum_m \frac{1}{[S^{(m)}(z)]^\omega};$$

s'il n'existait pas de nombre ω fini tel que cette série soit convergente et non constante, on sait qu'il faudrait introduire des fonctions $h^{(m)}(z)$ qui rendent convergente la première série, mais dont la détermination est restée jusqu'ici ambiguë, en sorte que nous nous en tiendrons au cas précédent.

La fonction $G(z)$, (20), où ω est le plus petit possible, ainsi que toutes ses transformées linéaires, sont, comme on sait, *toutes les fonctions périodiques de groupe* (G).

On pourrait de la même manière, au moyen des substitutions (18) du groupe (E), former toutes les fonctions périodiques $E(x)$ de ce groupe; mais, les fonctions de z de groupe (G) étant formées, on peut procéder autrement; il est évident d'après la manière dont nous les avons formées ainsi que leurs substitutions $S^{(m)}(z)$ que les fonctions de groupe (E) ne sont autres que celles de groupe (G) dans lesquelles on remplace z par $F(x)$, en sorte qu'on peut écrire, ω étant déterminé comme il est dit plus haut :

$$(21) \quad E(x) = G(F(x)) = \frac{1}{[F(x)]^\omega} + \sum_m \frac{1}{[S^{(m)}(F(x))]^\omega}.$$

Cette fonction et toutes ses transformées linéaires *sont toutes les fonctions de groupe* (E). Selon ce que nous avons vu du nombre des fonctions $S^{(m)}(z)$ distinctes, il est évident que la formation du groupe (G) et de la fonction $G(z)$ est beaucoup plus simple que la formation *directe* du groupe (E) et de la fonction $E(x)$: il arrivera par exemple, dans de nombreux cas, que (E) ait un nombre infini de substitutions (18) et que cependant (G) n'ait qu'un nombre fini de substitutions $S^{(m)}(z)$ (19). C'est à ce sujet que se montre surtout l'utilité des considérations précédentes.

Nous avons supposé qu'il existait un nombre fini μ tel que $\psi_\mu(z) = z$; dans le cas où μ est infini, on peut de la même manière constituer des groupes (E) et (G) et nous n'insistons pas.

7. Les considérations précédentes supposent simplement l'existence des groupes (F), (Φ), (FΦ), (ΦF) et s'appliquent donc non seulement aux fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, complètes uniformes, mais à toute couple de fonctions complètes multiformes $F(x)$, $\Phi(x)$ (ponctales, linéales ou aréales) qui satisfont à cette double condition d'être périodiques et d'être transformables l'une en l'autre. Le cas particulier où $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont complètes uniformes (cas déjà très étendu, puisqu'il s'agit alors de deux fonctions complètes uniformes *quelconques*) est surtout intéressant.

Le cas où μ est fini doit être considéré spécialement et fournit le théorème suivant, évident d'après ce qui précède :

Soit $F(x)$ *une fonction complète uniforme et soit* (F) *son groupe de substitutions. Si l'on peut changer les constantes du groupe, de manière à laisser aux substitutions* $s_n(x)$ *la même forme et de manière qu'elles satisfassent aux conditions (notamment de discontinuité) nécessaires et suffisantes pour qu'existent des fonctions uniformes du groupe, on aura ainsi constitué un groupe* (E) *tel qu'il existe des fonctions uniformes* $E(x)$ *de ce groupe, qui sont de même nature* *que* $F(x)$. *Si, de plus, on peut choisir les nouvelles constantes, de manière que la* $\mu^{\text{ième}}$ *itérée d'une substitution* t *de* (E) *soit identique à une substitution* s *de* (F), *il en sera de même pour toutes les autres substitutions* t, *et :*

1° $F(t)$ *sera une fonction algébrique, généralement multiforme, d'ordre inférieur à* μ, *de* $F(x)$;

2° *Toute fonction uniforme* $E(x)$ *du nouveau groupe* (E) *sera une fonction algébrique rationnelle de degré au moins* μ *de toute fonction uniforme* $F(x)$ *du groupe donné.*

Les transformations rationnelles de degré impair μ de la fonction $F(x) = \operatorname{sn} x$ en donnent immédiatement un exemple : les substitutions s de (F) sont ici de l'une et l'autre forme

$$a + x, \quad a' - x;$$

les substitutions t sont de la forme

$$t = \frac{a}{\mu} + x;$$

et $F(t)$ est une fonction d'ordre $2 < \mu$. La fonction $E(x)$ est une nouvelle fonction de même nature que $\operatorname{sn} x$ et est fonction rationnelle *de degré* μ de la première.

Les transformations paires de $\operatorname{sn} x$ en sont aussi un exemple simple.

La fonction p de Weierstrass est une transformée de degré $\mu = 2$, dans le cas où $F(t)$ a la première forme (17) :

$$F(t) = -F(x), \qquad (A = 0),$$

La transformation de Gauss est relative au cas où $F(t)$ a la seconde forme (17) :

$$F(t) = \frac{1}{k\,F(x)} \qquad \left(A = 0,\ B = \frac{1}{k}\right),$$

et la nouvelle fonction est une fonction linéaire de

$$F(x)+S(F(x)) = \operatorname{sn} x + \frac{1}{k \operatorname{sn} x} = \frac{1+k \operatorname{sn}^2 x}{k \operatorname{sn} x}.$$

On voit que les transformations algébriques des fonctions elliptiques, qui ont pour but de former, avec une fonction donnée, d'autres de même nature, ne sont pas particulières aux fonctions elliptiques, mais, au contraire, constituent une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions uniformes et peuvent même s'étendre en certains cas aux fonctions multiformes. L'importance des transformations dans la théorie particulière des fonctions elliptiques montre l'importance des considérations générales qui précèdent. Nous verrons plus tard d'autres exemples simples de ces transformations, concernant la fonction modulaire et les fonctions fuchsiennes ou automorphes.

Remarquons encore que nous avons déjà considéré (¹) le cas d'une fonction complète uniforme $E(x)$, fonction complète uniforme d'une deuxième $F(x)$

$$E(x) = G(F(x)),$$

le groupe (F) étant alors un sous-groupe du groupe (E), et que de l'égalité précédente nous avons conclu que les substitutions t de (E) qui n'appartiennent pas à (F), transforment $F(x) = z$ en les substitutions $S^{(m)}(z)$ qui laissent invariable la fonction complète uniforme $G(z)$, ce qui constitue une réciproque des propositions démontrées précédemment.

(¹) *Propriétés générales des substitutions, etc.* (*Nouv. Ann.*, 1901, p. 544).

BIBLIOGRAPHIE.

Guide du calculateur (Astronomie, Géodésie, Navigation, etc.); par M. *J. Boccardi,* privat-docent à l'Université, chef de service à l'Observatoire de Catane. — 2 vol. in-folio, 1902. A Paris, chez A. Hermann, rue de la Sorbonne, 6 et 12.

C'est avec un véritable plaisir que j'ai lu les deux Volumes que M. Boccardi vient de publier sous le titre de *Guide du calculateur.* L'ensemble des règles que doit appliquer un bon calculateur n'était pas encore codifié en effet; les conseils des maîtres, la pratique constante nous enseignaient seuls les meilleurs moyens de diriger un calcul.

Mais il n'est pas besoin d'avoir fréquenté beaucoup de calculateurs pour s'apercevoir que ces moyens sont pour ainsi dire constants, abstraction faite des procédés de vérification un peu particuliers que peut suggérer à chacun son inclination d'esprit personnelle.

Avec l'aide du Livre de M. Boccardi, on apprendra seul ces règles universellement suivies par les calculateurs, imposées par l'expérience. L'auteur ne craint pas d'entrer dans les plus minutieux détails, qui, à première vue, peuvent paraître insignifiants, mais dont l'observation est d'une importance fondamentale dès que l'on doit effectuer un calcul un peu long. Il a eu soin, de plus, de donner de nombreux types de calculs, mettant en évidence les dispositions qu'il faut adopter pour éviter toute perte de temps.

Il me serait impossible de faire ici une analyse détaillée du *Guide du calculateur;* je voudrais seulement choisir, parmi les excellents conseils qu'on y trouve, quelques-uns de ceux qui sont d'une application générale, et ne concernent pas uniquement l'Astronomie et la Géodésie.

Les conseils relatifs au choix des Tables de logarithmes suivant le calcul à effectuer, trop longs pour être rapportés, méritent une attention particulière.

A propos de l'usage des logarithmes, je suis aussi complètement de l'avis de l'auteur lorsqu'il dit ne pas aimer à se servir des compléments : la soustraction, en effet, n'est pas une opération plus difficile que l'addition ; et il est certain que, pour toute personne exercée, calculer une expression de la forme $\frac{ab}{cd}$ en ajoutant ensemble les logarithmes de a et de b, et les compléments des logarithmes de c et d, est une opération plus longue et plus difficile à contrôler que d'ajouter séparément les logarithmes de a et b, ceux de c et d, et de retrancher la seconde somme de la première : d'ailleurs, d'une façon générale, on ne doit jamais opérer par addition ou soustraction que sur deux nombres; les chances d'erreur sont ainsi beaucoup diminuées, et l'on a l'avantage de pouvoir faire l'opération par la gauche, ce qui s'obtient facilement avec un peu d'habitude, et ce qui offre une certaine importance, comme le montre avec raison M. Boccardi.

L'auteur insiste encore avec raison sur ce fait qu'on ne fait jamais trop de vérifications. « Que de fois, dit-il, une erreur résiste au premier contrôle qui se décèle au second ! » Et une expérience personnelle me permet d'ajouter que l'on peut repasser un calcul en faisant plusieurs fois de suite la même erreur au même endroit sans s'en apercevoir, de sorte que M. Boccardi a mille fois raison de recommander les vérifications qui rompent les habitudes de l'esprit, ne serait-ce que de se servir de Tables d'antilogarithmes au lieu de Tables de logarithmes, par exemple.

Il faut aussi toujours calculer sans se presser : car la recherche des erreurs, inévitables quand on veut aller trop vite, exige souvent plus de temps qu'il n'aurait fallu en employer pour obtenir un résultat exact en calculant avec prudence.

Heureux si ces quelques détails suffisent à faire comprendre le fruit que l'on pourra retirer de la lecture attentive de l'Ouvrage de M. Boccardi; je me contenterai, en terminant, d'en indiquer les principales divisions.

La première Partie, d'un caractère plus théorique, est consacrée aux *Règles pour les calculs en général,* et divisée en trois Sections : *Avant les calculs, Dans le cours des calculs, Après les calculs.*

La seconde Partie, intitulée : *Règles pour les calculs spéciaux,* contient surtout des types de calcul raisonnés relatifs aux problèmes suivants : Interpolation ; Méthode des moindres carrés ; Calculs de précession ; Ephémérides d'une planète ou d'une comète ; Détermination d'une première orbite au moyen de trois observations ; Correction d'une première orbite ; Perturbations spéciales ; Détermination d'un point géodésique, etc. Pour chacun de ces problèmes, l'auteur indique la meilleure méthode à suivre dans la pratique, résume l'ensemble des formules à employer, et insiste sur les meilleures dispositions à adopter, de sorte que nous avons réellement entre les mains un manuel complet et suffisant par lui-même pour la presque totalité des calculs astronomiques. H. ANDOYER.

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère une famille de sphères passant toutes par un même cercle réel. On demande de démontrer que cette famille fait partie d'une infinité de systèmes triples orthogonaux et de déterminer d'une manière générale tous ces systèmes triples.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la transformation ponctuelle définie par les équations*

$$X = yz, \qquad Y = zx, \qquad Z = xy,$$

elle fait correspondre à une direction partant du point (x, y, z) *et définie par les différentielles* dx, dy, dz *une direction partant de même du point* (X, Y, Z) *et définie par les différentielles correspondantes* dX, dY, dZ. *Déterminer les cas où les deux directions correspondantes sont parallèles.*

Appliquer la théorie au point pour lequel on a

$$x = y = z = 1.$$

(Octobre 1901.)

Épreuve écrite. — I. *On demande de déterminer tous les hélicoïdes qui sont des surfaces minima. Pour cela on déterminera la surface minima qui passe par une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit et dont le plan tangent en chaque point de cette hélice fait un angle constant avec l'axe du cylindre.*

Retrouver en particulier l'hélicoïde réglé à plan directeur et la surface minima de révolution.

II. *Déterminer les lignes de courbure de ces hélicoïdes.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation*

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - n\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

calculer : 1° ses invariants; 2° ceux des équations qu'on en déduit en appliquant la méthode de Laplace.

Intégrer l'équation dans le cas où $m = -n = 2$.

(Mars 1902.)

Épreuve écrite. — *Étant donnée une surface quelconque* (S) *et un point fixe* O *on fait correspondre à un point quelconque* M *de* (S) *le point* M′ *situé à la distance* 1 *sur le rayon* OM. *On établit ainsi une correspondance point par point entre la surface* (S) *et une sphère* (Σ) *de centre* O *et de rayon* 1.

Il existe sur la surface (S) *deux familles de lignes orthogonales auxquelles correspondent sur la sphère* (Σ) *deux familles de lignes orthogonales.*

I. *Montrer que l'une de ces familles de* (S) *est formée des courbes lieux des points dont la distance au point* O *demeure constante.*

II. *Déterminer complètement (en termes finis) les deux familles de* (S) *dans le cas où cette surface est un ellipsoïde à trois axes inégaux.*

Épreuve pratique. — I. *Former l'équation aux dérivées partielles dont dépend la différence des rayons de courbure principaux des surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure le système orthogonal pour lequel l'élément linéaire de la sphère* *prend la forme*

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

II. *Montrer que ce système sphérique orthogonal est formé de deux familles de cercles.* (Octobre 1902.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une surface* (M), *déterminer les différentes congruences de droites jouissant de la propriété suivante : les droites étant liées respectivement aux plans tangents de la surface* (M), *la congruence reste constamment formée de normales à une surface, lorsqu'on déforme la surface* (M) *de façon qu'elle reste applicable sur sa forme primitive.*

II. *On suppose qu'une congruence de droites soit construite en menant par chaque point* M *d'une surface* (M) *une droite* MP *suivant une loi déterminée.*

1° *Établir qu'il n'est pas possible, en général, d'associer à chaque point* M *de* (M) *une sphère tangente à* (M) *en ce point et telle que la corde joignant les deux points de contact de cette sphère avec son enveloppe soit la droite* MP *de la congruence issue de* M.

2° *Démontrer que si le problème est possible d'une infinité de manières, la droite* MP *peut être construite en joignant le point* M *au point correspondant d'une surface ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure que* (M).

Épreuve pratique. — *On considère la surface* S *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$X = \frac{k(a-c)u + k(b-a)v + b - c}{\sqrt{(a-b)(a-c)(u-v)}},$$

$$Y = \frac{\sqrt{b-c}\sqrt{u^2 - \dfrac{(1+ku)^2}{a-b}}}{u-v},$$

$$Z = \frac{\sqrt{c-b}\sqrt{v^2 - \dfrac{(1+kv)^2}{a-c}}}{u-v},$$

dans lesquelles u et v désignent des variables indépendantes et a, b, c, k des constantes.

Un trièdre trirectangle Mxyz *se meut de manière que dans chacune de ses positions l'arête* Mz *soit normale en* M *à la surface* S *et l'arête* Mx *tangente à la courbe* (v) *de* S *qui passe au sommet* M.

Exprimer, en fonction de u et v, les différentes quantités ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 *qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile considéré.*

Étudier, en particulier, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S; *déterminer, en un point de cette surface, les rayons de courbure principaux.*

(Juillet 1902.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étude de la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Éléments qui se conservent dans le développement de cette surface.*

II. *Trouver la section droite d'un cylindre, sachant que, pour une hélice tracée sur ce cylindre, le rayon de courbure est une fonction linéaire de l'arc. Étudier pour une pareille hélice :* 1° *le lieu des centres de courbure;* 2° *le lieu des centres des sphères osculatrices;* 3° *le lieu des points centraux des normales principales.*

(*Voir* TISSERAND et PAINLEVÉ, *Exercices d'Analyse*, p. 112 et suiv.) (Juillet 1902.)

QUESTION DE COURS. — *Une courbe plane roule sans glisser sur une autre courbe plane. On demande :*

1° *Le lieu des points d'inflexion des trajectoires décrites par les différents points du plan de la courbe mobile;*

2° *Le lieu des centres de courbure des lignes enveloppées par les droites du plan mobile.*

Appliquer les résultats obtenus à l'étude du cas où des points liés à la courbe mobile décrivent deux droites dans le plan de la courbe fixe.

PROBLÈME. — *On considère la surface de révolution définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u).$$

1° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur le plan* xOy;

2° *Déterminer le méridien de telle sorte que toutes ces courbes projections des asymptotiques soient des cercles; on examinera en particulier le cas où ces cercles passeraient par l'origine* O. (Novembre 1902.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un plan mobile* P *passe par un axe vertical fixe* Ox *et tourne autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante* ω. *Une barre pesante* AB *de longueur* $2a$ *et de masse* M *est assujettie à rester dans le plan* P, *sur lequel elle peut glisser sans frottement; en outre le centre* C *de la barre est rattaché à un point fixe* O *de l'axe par un fil inextensible et sans masse, de longueur* l.

Trouver le mouvement relatif de la barre par rapport au plan P.

On prendra comme axes, dans le plan P, *l'axe fixe* Ox *suivant la verticale descendante et un axe perpendiculaire* Oy.

On appellera θ *l'angle du fil* OC *avec* Ox *et* φ *l'angle de la barre* AB *avec* Ox.

On supposera qu'à l'instant initial $t = 0$, θ *et* φ *partent de valeurs données* θ_0 *et* φ_0, *et que le système parte du repos relatif.*

On cherchera en particulier les positions d'équilibre relatif du système.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La Terre est regardée comme une sphère homogène fixe, dont une circonférence de grand cercle a une longueur de* $40\,000\,000^{\mathrm{m}}$ *et dont l'attraction sur un point de masse* m *et situé sur sa surface est* mg, g *étant exprimé par le nombre* 9,8, *quand on prend comme* *unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde.*

Calculer, d'après la loi de l'attraction universelle, la vitesse avec laquelle arriverait à la surface de la Terre un point matériel pesant abandonné sans vitesse :

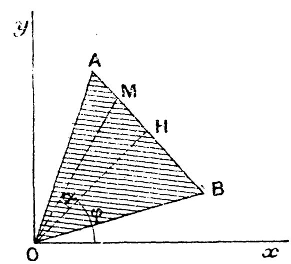
1° *A une distance du centre de la Terre égale à deux rayons terrestres;*

2° *A une distance du centre de la Terre égale à soixante rayons terrestres.*

Que deviendrait la vitesse d'arrivée, si la distance de la position initiale au centre augmentait indéfiniment?

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un triangle équilatéral matériel* OAB *pouvant glisser sur un plan horizontal fixe* xOy *est assu-*

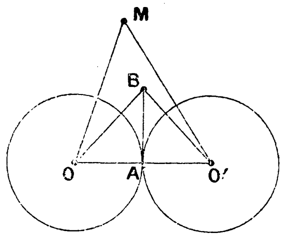


jetti à tourner autour de son sommet O *qui est fixe. Un point matériel* M *de masse* 1 *est assujetti à glisser sur le côté* AB *et est attaché au sommet* O *par un fil élastique et sans masse* OM *dont la longueur à l'état naturel (quand il n'est pas allongé) est égale à la hauteur* $OH = a$ *du triangle. On admet que la tension de ce fil est proportionnelle à son allongement à partir de l'état naturel* a, *de telle sorte que, quand le fil a une longueur* $OM = r$, *sa tension a pour expression* $2k(r-a)$, k *désignant une constante positive.*

Trouver le mouvement du système, en supposant les liaisons réalisées sans frottements.

NOTATIONS ET CONDITIONS INITIALES. — *On appellera* r *la distance* OM, α *l'angle* HOM; φ *l'angle* xOH, I *le moment* *d'inertie du triangle par rapport au point* O, *et l'on remarquera que* $\cos\alpha = \frac{a}{r}\cdot$ *On prendra comme paramètres indépendants* r *et* φ *et l'on admettra qu'à l'instant initial le système part du repos, le mobile* M *étant en* A.

Épreuve pratique. — *En employant le système d'unités C. G. S., on considère deux sphères matérielles, homogènes identiques, tangentes entre elles au point* A, *ayant*



pour rayon commun 1^{cm} *et possédant une densité* ρ *telle que l'attraction newtonienne de chacune d'elles sur un point de masse* 1 *placé sur sa surface soit égale à une dyne.*

1° *Calculer l'attraction newtonienne de l'ensemble des deux sphères, d'abord sur un point de masse* 1 *placé en* B *à égale distance des centres* O *et* O' *des deux sphères,*

$$OB = O'B = \frac{4}{3};$$

puis sur un point de masse 1 *placé au centre* O *d'une des sphères;*

2° *En appelant* r *et* r' *les distances d'un point quelconque* M *aux centres* O *et* O' *des deux sphères, former l'équation des surfaces de niveau d'abord à l'extérieur des deux sphères, puis dans l'intérieur de l'une d'elles.*

Étudier en particulier celle des surfaces de niveau qui passe par le point B. (Octobre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1829.

(1899, p. 338.)

On donne une conique (S) *et un triangle* ABC *conjugué par rapport à cette conique.*

Soient m *un point de la courbe et* (ε) *une conique tangente à* (S) *au point* m *et circonscrite à* ABC; *on demande le lieu du point d'intersection de la tangente commune au point* m *avec la seconde corde commune aux courbes* (S) *et* (ε).

Résoudre la même question en supposant que la conique (S) *est inscrite dans le triangle* ABC.

(E. GENTY.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

1° Prenons ABC pour triangle de référence; l'équation de (S) est

$$l^2x^2 + m^2y^2 = n^2z^2.$$

Un point m de cette courbe peut être défini par le paramètre φ et les relations

$$lx = nz\cos\varphi, \qquad my = nz\sin\varphi;$$

la tangente en m est

$$(1) \qquad lx\cos\varphi + my\sin\varphi = nz.$$

Une conique (ε) aura pour équation

$$l^2x^2 + m^2y^2 - n^2z^2$$
$$+ (lx\cos\varphi + my\sin\varphi - nz)(Ax + By + Cz) = 0.$$

Exprimant que cette courbe est circonscrite à ABC, on trouve

$$A = -\frac{l}{\cos\varphi}, \qquad B = -\frac{m}{\sin\varphi}, \qquad C = -n,$$

en sorte que la seconde sécante commune à (S) et (ε) est

$$\frac{lx}{\cos\varphi} + \frac{my}{\sin\varphi} + nz = 0. \tag{2}$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donnera le lieu cherché. De (1) et (2) on tire

$$\begin{aligned}\frac{lx}{-\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)} &= \frac{my}{\sin\varphi(1+\cos^2\varphi)}\\ &= \frac{nz}{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}\\ &= \frac{-lx+my}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi)}\\ &= \frac{lx+my}{\sin\varphi-\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\sin\varphi+\cos\varphi = M(1-\sin\varphi\cos\varphi), \tag{3}$$

$$\sin\varphi-\cos\varphi = N(1+\sin\varphi\cos\varphi), \tag{4}$$

en posant

$$M = \frac{nz}{lx+my}, \qquad N = \frac{nz}{-lx+my}.$$

En élevant (3) et (4) au carré et posant, pour abréger, $\sin 2\varphi = u$, on a

$$\frac{M^2u^2}{4} - (M^2+1)u + M^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{N^2u^2}{4} + (N^2+1)u + N^2 - 1 = 0.$$

L'élimination de u entre ces deux équations donne, après simplifications,

$$8(1-M^2N^2)(M^2+N^2+2M^2N^2) - (M^2-N^2)^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned}-16M^4N^4 - 8M^2N^2(M^2+N^2)\\ - M^4 - N^4 + 18M^2N^2 + 8(M^2+N^2) = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant M et N par leurs valeurs, on trouve une équation qui se met aisément sous la forme symétrique suivante :

$$(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2)(- l^2x^2 + m^2y^2 - n^2z^2) \times (- l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2) - l^2m^2n^2x^2y^2z^2 = 0.$$

Courbe du sixième degré.

2° Soit

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy = 0$$

la conique (S) inscrite dans ABC. Un point de cette courbe peut être défini à l'aide du paramètre θ et des deux équations

$$px = rz\cos^4\theta, \qquad qy = rz\sin^4\theta;$$

la tangente est

$$(5)\qquad px\sin^2\theta + qy\cos^2\theta - rz\sin^2\theta\cos^2\theta = 0,$$

en sorte que la conique (ε) est

$$p^2x^2 + q^2y^2 + \ldots - 2pqxy + (px\sin^2\theta + qy\cos^2\theta - rz\sin^2\theta\cos^2\theta)(Ax + By + Cz) = 0.$$

Écrivant que les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2 sont nuls, on trouve les valeurs de A, B, C, et la corde commune a pour équation

$$(6)\qquad -\frac{px}{\sin^2\theta} - \frac{qy}{\cos^2\theta} + \frac{rz}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0.$$

L'élimination de θ entre (5) et (6) donnera le lieu dont les coordonnées sont d'ailleurs exprimables, comme celles du lieu précédent, en fonctions rationnelles d'un paramètre. De (5) et (6) on tire

$$\frac{-px}{\cos^4\theta(1 + \sin^2\theta)} = \frac{qy}{\sin^4\theta(1 + \cos^2\theta)} = \frac{rz}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{qy + px}{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 + \sin^2\theta\cos^2\theta)} = \frac{qp - pz}{1 - \sin^2\theta\cos^2\theta};$$

d'où

$$1 + \sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{qy + px}{rz},$$

$$\sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{px + qy - rz}{rz}$$

et

$$(7) \qquad \sin^2 2\theta = \frac{4(px + qy - rz)}{rz}.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\frac{rz}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{-px + qy}{1 - \sin^2\theta \cos^2\theta} = \frac{rz(-px + qy)}{2rz - px - qy};$$

d'où

$$(8) \qquad \cos^2 2\theta = \frac{(-px - qy + 2rz)^2}{(px - qy)^2}.$$

De (7) et (8) on tire

$$\frac{(px + qy - 2rz)^2}{(px - qy)^2} + \frac{4(px + qy - rz)}{rz} = 1.$$

C'est l'équation du lieu; on voit que c'est une cubique; son équation se met aisément sous la forme

$$(px - qy + rz)(px + qy - rz) \\ \times (px - qy - rz) + pqrxyz = 0.$$

La courbe est tangente aux côtés du triangle.

1964.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe déterminée par l'intersection de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \textit{et de} \qquad \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

(G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. C. Alasia.

Pour abréger nous poserons

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=p, \qquad \frac{b^2}{a^2+b^2}=q, \qquad \frac{r^2}{b^2+r^2}=u.$$

On a, alors

$$x=[(r^2-a^2)q\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}},$$
$$y=[(r^2-a^2)\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}},$$
$$z=a\left[\left(q+\frac{r^2}{a^2+b^2}\right)\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\frac{dx^2}{d\varphi^2}=(r^2-a^2)q\cos^2\varphi,$$
$$\frac{dy^2}{d\varphi^2}=(r^2-a^2)\sin^2\varphi,$$
$$\frac{dz^2}{d\varphi^2}=p\frac{(r^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2+b^2)\cos^2\varphi+(b^2+r^2)\sin^2\varphi}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\frac{b^2+r^2\sin^2\varphi}{(a^2+b^2)+(r^2-a^2)\sin^2\varphi}}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{b^2}{b^2+r^2}\operatorname{tang}^2\omega,$$

et l'intégration nous donnera

$$(1)\qquad s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{r^2-a^2}{b^2+r^2}}\int\frac{d\omega}{1-u\sin^2\omega}(1-p\sin^2\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

En posant $u=e^2$ et $p=\sin^2\eta$, cette intégrale se réduit à la forme la plus simple de l'intégrale elliptique à paramètre circulaire.

[R8aα]

SUR L'HERPOLHODIE;

PAR M. H. PADÉ.

1. Les deux équations qui définissent l'herpolhodie et le mouvement du pôle sur cette courbe, telles que les a données M. Darboux dans une Note de la *Mécanique* de Despeyrous, s'obtiennent aisément et au même point de vue, en ayant simplement égard à l'égalité de la vitesse absolue du pôle décrivant cette herpolhodie et de la vitesse relative du même point décrivant, dans le système invariable mobile autour du point fixe, la polhodie. Cette égalité résulte, d'ailleurs, immédiatement de ce que la vitesse d'entraînement est nulle.

2. Soient

O le point fixe;

Ox, Oy, Oz les axes de l'ellipsoïde d'inertie du système autour de ce point;

A, B, C les moments principaux d'inertie correspondants;

m la position du pôle à l'instant t; x, y, z ses coordonnées;

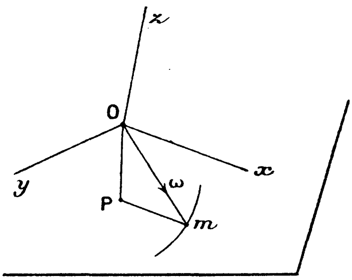
$O\omega$ la rotation instantanée à l'instant t; p, q, r ses projections sur Ox, Oy, Oz;

P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan fixe tangent en m à l'ellipsoïde d'inertie.

3. Rapportons, dans son plan, l'herpolhodie au système de coordonnées polaires ρ, χ, défini par le pôle P et le sens positif de rotation autour de $\overline{\mathrm{OP}}$.

La vitesse du point m décrivant l'herpolhodie a $\frac{d\rho}{dt}$ pour composante suivant $\overline{\mathrm{P}m}$ et $\rho^2\frac{d\chi}{dt}$ pour moment autour de $\overline{\mathrm{OP}}$.

D'un autre côté, la vitesse relative de m ayant pour



projections, sur $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$, les vecteurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et, par suite, pour moment résultant autour de O, le vecteur dont les projections sur les axes sont y

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt},\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt},\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt},$$

on a les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{dx}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}x},\overline{\mathrm{P}m})\\ &\quad+\frac{dy}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}y},\overline{\mathrm{P}m})+\frac{dz}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}z},\overline{\mathrm{P}m}),\\ \rho^2\frac{d\chi}{dt} &= \left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}x},\overline{\mathrm{OP}})\\ &\quad+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}y},\overline{\mathrm{OP}})\\ &\quad+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}z},\overline{\mathrm{OP}}).\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les seconds membres en fonction, d'abord, de p, q, r; puis, ensuite, de ρ; c'est un calcul facile.

4. Nous avons à faire usage (*voir* Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II) des équations d'Euler

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr,\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq. \end{aligned}\right.$$

Elles donnent immédiatement les deux intégrales premières

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= D\mu^2,\\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= D^2\mu^2, \end{aligned}$$

D et μ désignant deux constantes positives qui, en raison de l'interprétation géométrique, découverte par Poinsot, des premiers membres de ces deux intégrales, donnent lieu aux relations

$$\sqrt{D}\,\mu = \frac{O\omega}{Om}, \qquad \sqrt{D} = \frac{1}{OP};$$

$D\mu$ est la longueur de l'axe résultant, autour de O, des quantités de mouvement, axe qui a pour projections sur Ox, Oy, Oz les vecteurs Ap, Bq, Cr.

On a immédiatement

$$x = \overline{Om}\cos(\overline{Ox}, \overline{Om}) = \overline{Om}\,\frac{p}{\overline{O\omega}} = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,p,$$

en sorte que

$$(1)\qquad x = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,p, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,q, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,r;$$

comme, d'autre part,

$$Om^2 = OP^2 + Pm^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{D} + \rho^2,$$

on en conclut

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mu^2 + D\mu^2\rho^2,$$

et l'on a ainsi ce second système d'équations

$$(\beta)\qquad \begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = D\mu^2\rho^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2. \end{cases}$$

Les équations (α) donnent $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ en fonction de p, q, r, et les équations (β) donnent p, q, r en fonction de ρ.

5. De (1) et (α) on déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{B-C}{A}qr,$$

en sorte que

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{B-C}{A}qr, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{C-A}{B}rp, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{A-B}{C}pq. \end{cases}$$

De (1), (2) et (β) on tire

$$\begin{aligned}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{1}{D\mu^2}p\left(\frac{A-B}{C}q^2 + \frac{A-C}{B}r^2\right), \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}[A(A-A)p^2 + B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2], \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}[A(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)], \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}(AD\mu^2 - D^2\mu^2), \\ &= \frac{A-D}{BC}p.\end{aligned}$$

Ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{A-D}{BC}p, \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{B-D}{CA}q, \\ x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{C-D}{AB}r. \end{cases}$$

Enfin, les cosinus des formules (A) s'évaluent aussi aisément

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos(\overline{Ox}, \overline{OP}) = \dfrac{A}{D\mu}p, \\ \cos(\overline{Oy}, \overline{OP}) = \dfrac{B}{D\mu}q, \\ \cos(\overline{Oz}, \overline{OP}) = \dfrac{C}{D\mu}r; \end{cases}$$

et, comme

$$\cos(\overline{Ox}, \overline{Pm}) = \frac{\text{Proj}_{ox}\overline{Pm}}{\rho} = \frac{x - \dfrac{1}{\sqrt{D}}\dfrac{A}{D\mu}p}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,\frac{D-A}{D}\,\frac{p}{\rho},$$

on a aussi :

$$(5)\qquad \begin{cases} \cos(\overline{Ox}, \overline{Pm}) = \dfrac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,\dfrac{D-A}{D}\,\dfrac{p}{\rho}, \\ \cos(\overline{Oy}, \overline{Pm}) = \dfrac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,\dfrac{D-B}{D}\,\dfrac{q}{\rho}, \\ \cos(\overline{Oz}, \overline{Pm}) = \dfrac{1}{\sqrt{D}\,\mu}\,\dfrac{D-C}{D}\,\dfrac{r}{\rho}. \end{cases}$$

6. En tenant compte des formules (2), (3), (4) et (5), les équations (A) deviennent

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{D^2\mu^2}\left[\frac{(D-A)(B-C)}{A} + \frac{(D-B)(C-A)}{B} + \frac{(D-C)(A-B)}{C}\right]pqr,$$

$$\rho^2\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{ABCD\mu}[(A-D)A^2p^2 + (B-D)B^2q^2 + (C-D)C^2r^2]$$

ou, en posant $\Delta = (B - C)(C - A)(A - B)$ et après les réductions immédiates,

$$
(B)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho\frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{D\mu^2}\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)pqr \\
&= \frac{\Delta}{ABCD\,\mu^2}\,pqr, \\
\rho^2\frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{ABCD\,\mu}\left(A^3p^2 + B^3q^2 + C^3r^2 - D^3\mu^2\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les seconds membres en fonction de ρ, au moyen des formules (β).

7. La quantité $A^3p^2 + B^3q^2 + C^3r^2 - D^3\mu^2$, que nous désignerons par H, est donnée immédiatement par l'équation

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \mu^2 + D\mu^2\rho^2 \\
A & B & C & D\,\mu^2 + 0 \\
A^2 & B^2 & C^2 & D^2\mu^2 + 0 \\
A^3 & B^3 & C^3 & D^3\mu^2 + H
\end{vmatrix} = 0,
$$

dont le premier nombre, eu égard à la composition de la quatrième colonne, se décompose en deux déterminants dont l'un est le produit de μ^2 par le déterminant de Vandermonde relatif aux quatre quantités A, B, C, D, c'est-à-dire $\mu^2\Delta(D - A)(D - B)(D - C)$, et dont l'autre, développé suivant les éléments de la quatrième colonne, est égal à $-D\mu^2\rho^2 ABC\Delta + H\Delta$, en sorte que l'équation s'écrit

$$H\Delta - D\mu^2\rho^2 ABC\Delta + \mu^2\Delta(D - A)(D - B)(D - C) = 0$$

et donne

$$(6)\qquad H = ABCD\,\mu^2(\rho^2 + E),$$

en posant

$$E = \frac{(A - D)(B - D)(C - D)}{ABCD}.$$

De (β) on tire

$$p^2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu^2 + D\mu^2\rho^2 & 1 & 1 \\ D\mu^2 + 0 & B & C \\ D^2\mu^2 + 0 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{\mu^2(D-B)(B-C)(C-D) + D\mu^2\rho^2 BC(C-B)}{\Delta}$$

$$= \frac{BCD\mu^2(C-B)}{\Delta}(\rho^2 - a),$$

en posant

$$a = \frac{(D-B)(D-C)}{BCD}.$$

On a, par suite, b et c désignant les quantités déduites de a par une permutation circulaire effectuée sur A, B, C,

$$p^2 q^2 r^2 = -\frac{A^2B^2C^2D^3\mu^6}{\Delta^2}(\rho^2 + a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c),$$

$$(7) \qquad pqr = \frac{ABCD\sqrt{D}\,\mu^3}{\Delta}\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}.$$

8. En tenant compte des formules (6) et (7), les équations (B) deviennent enfin

$$(C) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho\frac{d\rho}{dt} &= \sqrt{D}\,\mu\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}, \\ \rho^2\frac{d\chi}{dt} &= \mu(\rho^2 + E). \end{aligned} \right.$$

9. Si l'on ne tient pas à mettre en évidence l'unité d'origine des équations (C), il est plus rapide de remplacer, comme on le fait généralement, la première des équations (A) par celle-ci

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

qui se déduit immédiatement de la relation

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \mathrm{OP}^2,$$

et d'où se tire de suite, par les formules (1) et (2), la première des relations (B).

On peut, dans ce cas, écrire aussi directement l'équation différentielle de l'herpolhodie en partant de la formule

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\chi}{d\rho},$$

V désignant l'angle de $\overline{\mathrm{P}m}$ avec la tangente à l'herpolhodie.

Les cosinus directeurs de cette tangente étant

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}, \qquad \ldots,$$

et ceux de $\overline{\mathrm{P}m}$ étant donnés par (5), on a, de suite,

$$\operatorname{tang} V = \frac{[(\mathrm{D}-\mathrm{B})qr' - (\mathrm{D}-\mathrm{C})rq']^2 + \ldots}{[(\mathrm{D}-\mathrm{A})pp' + (\mathrm{D}-\mathrm{B})qq' + (\mathrm{D}-\mathrm{C})rr']^2}.$$

Or, en vertu des équations d'Euler (α)

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}-\mathrm{B})qr' &- (\mathrm{D}-\mathrm{C})rq' \\ &= \frac{p}{\mathrm{BC}}[(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{D}-\mathrm{B})\mathrm{B}q^2 + (\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{D}-\mathrm{C})\mathrm{C}r^2];\end{aligned}$$

ajoutant, dans la parenthèse, $(\mathrm{A}-\mathrm{A})(\mathrm{D}-\mathrm{A})\mathrm{A}p^2$, et tenant compte des équations (β), cette parenthèse se réduit à $-\mathrm{H}$, de sorte que le numérateur $\operatorname{tang}^2 V$ est

$$\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2}(\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2) = \frac{\mathrm{H}^2\mathrm{D}^2\mu^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2};$$

quant au dénominateur, il est évidemment égal à

$$\mathrm{D}^2(pp' + qq' + rr')^2 = \frac{\Delta^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2}p^2q^2r^2.$$

On voit que finalement

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{\mu}{\Delta} \frac{H}{pqr}.$$

H et pqr ayant été calculés en fonction de ρ (n° 7), on obtient l'équation différentielle de l'herpolhodie.

[F5aα]

SUR LA MULTIPLICATION PAR 5 D'UNE PÉRIODE DE LA FONCTION $\wp u$;

PAR M. J. SIRE, à Nancy.

On sait que si

$$z = \wp\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega'}{5}\right)$$

est donné,

$$x = \wp(u \mid \omega, \omega')$$

s'obtient par la résolution d'une équation du cinquième degré. En effet, si l'on regarde z comme une fonction elliptique aux périodes 2ω, $2\omega'$, la formule de décomposition en éléments simples donne

$$z = c + \wp u + \left[\wp\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + \wp\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right)\right] + \left[\wp\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) + \wp\left(u + \frac{4\omega'}{5}\right)\right];$$

la constante c étant définie par l'équation

$$c + 2\wp\left(\frac{2\omega'}{5}\right) + 2\wp\left(\frac{4\omega'}{5}\right) = 0.$$

Si l'on applique à chacune des parenthèses la formule

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2(\wp u \wp v - \frac{1}{2}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2},$$

et si l'on pose

$$a = \wp\left(\frac{2\omega'}{5}\right), \qquad b = \wp\left(\frac{4\omega'}{5}\right),$$

il vient

$$z = x - 2a - 2b + \frac{2(ax - \frac{1}{2}g_2)(x+a) - g_3}{(x-a)^2} + \frac{2(bx - \frac{1}{2}g_2)(x+b) - g_3}{(x-b)^2},$$

équation du cinquième degré en x qui admet pour racines

$$\wp u, \quad \wp\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right), \quad \wp\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right),$$
$$\wp\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right), \quad \wp\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right).$$

Je me propose de trouver une expression simple de la fonction cyclique de ces racines :

$$\psi(u) = \wp u + \alpha\, \wp\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + \alpha^2 \wp\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) + \alpha^3 \wp\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) + \alpha^4 \wp\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right),$$

où $\alpha = e^{\frac{2i\pi r}{5}}$, r désignant un nombre entier non multiple de 5. Je considère à cet effet la fonction

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_1(u) = &-\zeta u - \alpha\, \zeta\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) - \alpha^2 \zeta\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) \\ &- \alpha^3 \zeta\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) - \alpha^4 \zeta\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right), \end{aligned} \right.$$

qui admet pour dérivée $\psi(u)$; si, dans cette fonction, je remplace u par $u + \frac{2\omega'}{5}$, j'obtiens

$$(2) \qquad \Psi_1\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha\, \Psi_1(u) - 2\eta',$$

en remarquant que

$$\zeta\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \zeta\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right) + 2\eta'.$$

Posant

$$\Psi_1(u) = \Psi(u) - h,$$

il vient, en tenant compte de (2),

$$\Psi\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha\,\Psi(u) + h(1 - \alpha) - 2\eta'.$$

Si la constante h est déterminée de telle façon que

$$h = \frac{2\eta'}{1 - \alpha},$$

il en résulte

$$\Psi\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha\,\Psi(u) \tag{3}$$

$\left(\alpha = e^{\frac{2i\pi r}{5}}\right.$, r non multiple de $\left.5\right)$. D'ailleurs

$$\Psi(u + 2\omega) = \Psi(u); \tag{4}$$

ceci résulte de ce que la somme $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)$ des résidus qui figurent dans (1) est nulle.

Les relations (3) et (4) montrent que $\Psi(u)$ est dans le premier parallélogramme des périodes 2ω, $\frac{2\omega'}{5}$, une fonction à multiplicateurs constants 1 et α; elle admet dans ce parallélogramme comme pôle simple de résidu -1 le point $u = 0$, puisque $\Psi_1(u)$ possède, d'après (1), dans le premier parallélogramme des périodes 2ω, $2\omega'$, comme pôles simples de résidu -1, les points $u = 2k\frac{\omega'}{5}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$; on a donc

$$\Psi(u) = e^{\rho u}\frac{\sigma(u - v)}{\sigma u\,\sigma v}, \tag{5}$$

ρ et v désignant des constantes que je vais déterminer.

Pour rendre le calcul plus clair, je poserai $\frac{\omega'}{5} = \omega'_1$ et je désignerai par η'_1 ce que devient η' quand on remplace ω' par ω'_1; utilisant des formules bien connues relatives à $\sigma(u \mid \omega, \omega'_1)$ on a

$$\Psi(u + 2\omega) = e^{2(\rho\omega - \eta v)}\, \Psi(u),$$
$$\Psi(u + 2\omega'_1) = e^{2(\rho\omega'_1 - \eta'_1 v)}\, \Psi(u);$$

pour que la fonction $e^{\rho u} \frac{\sigma(u - v)}{\sigma u\, \sigma v}$ admette les multiplicateurs 1 et α, il suffira de poser

$$\rho\omega - \eta v = 0,$$
$$\rho\omega'_1 - \eta'_1 v = \frac{\pi i r}{5},$$

ce qui donne

$$v = \frac{2r\omega}{5}, \qquad \rho = \frac{2r\eta}{5},$$

en remarquant que

$$\eta\omega'_1 - \eta'_1 \omega = \frac{\pi i}{2}.$$

On a donc finalement

$$\Psi(u) = e^{\frac{2\eta u}{5}} \frac{\sigma\left(u - 2\frac{r\omega}{5}\right)}{\sigma u\, \sigma\left(\frac{2r\omega}{5}\right)}.$$

Cette relation permet de se rendre compte que $\Psi^5(u)$ admet les périodes 2ω, $2\omega'_1$; comme cette fonction admet l'origine comme pôle d'ordre 5, on a donc

$$\Psi^5(u) = a_0 + a_1\, p u + a_2\, p' u + a_3\, p'' u + a_4\, p''' u,$$

où pu, comme dans ce qui suivra, est la fonction construite avec les périodes 2ω, $2\omega'_1$. En remarquant que $\Psi^5(u)$ s'annule pour $u = v$ $\left(v = \frac{2r\omega}{5}\right)$, ainsi que ses quatre premières dérivées, on en déduit avec M. Kiépert,

$$\Psi^5(u) = C \begin{vmatrix} pu - pv & p'u - p'v & p''u - p''v & p'''u - p'''v \\ p'v & p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v \\ p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v \\ p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v & p^{\text{VI}}v \end{vmatrix},$$

C étant une constante qui se détermine en cherchant la limite de $[u\Psi(u)]^5$ pour $u = 0$.

Dérivant, il vient

$$5\Psi^4(u)\Psi'(u) = C \begin{vmatrix} p'u & p''u & p'''u & p^{\text{IV}}u \\ p'v & p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v \\ p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v \\ p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v & p^{\text{VI}}v \end{vmatrix},$$

et, puisque $\Psi'(u) = \psi(u)$, j'ai ainsi obtenu l'expression de $\psi(u)$ que je me proposais de retrouver. On peut en conclure facilement que l'équation du cinquième degré en $x = p(u \mid \omega, \omega')$ est résoluble par radicaux, quand en même temps que $z = p(u \mid \omega, \omega'_1)$ on donne la dérivée $p'(u \mid \omega, \omega'_1)$, les racines 5ièmes de l'unité et les invariants de la fonction $p(u \mid \omega, \omega'_1)$.

Le problème que je viens d'examiner n'est qu'un cas très particulier du problème traité par M. Kiépert dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle*, t. 76. L'auteur, pour calculer les n valeurs de $p(u \mid \omega, \omega')$ qui correspondent à $p\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, part de la fonction

$$f(u) = e^{\rho u} \frac{\sigma(u - v)}{\sigma u \, \sigma v},$$

où

$$v = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

$$\rho = \frac{2\lambda\eta + 2\mu\eta'}{n},$$

λ et μ désignant des entiers, sans indiquer comment il a été amené à considérer cette fonction. La méthode que j'ai suivie, dans le cas où $n = 5$, montre suffisamment de quelle manière on peut introduire la fonction $f(u)$.

[D]

SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE;

PAR M. E. IAGGI.

SECOND MÉMOIRE.

8. Nous avons, dans notre premier Mémoire, étudié les propriétés des substitutions; nous terminons et complétons ce travail par la détermination des fonctions F et Φ, lorsque les groupes de transformation $(F\Phi)$ et (ΦF) sont donnés. Si l'on remarque que les substitutions s de (F) et σ de (Φ) sont déterminées par les groupes donnés $(F\Phi)$, (ΦF) (propriété I), les équations différentielles linéaires dont nous avons parlé ne sont autres que celles qu'on peut former avec les s et σ de (F) et de (Φ).

Mais nous allons les former directement au moyen des t et τ et cette formation constituera une première méthode de détermination des fonctions F et Φ dont les groupes de transformation sont donnés.

Première méthode. — Nous nous placerons dans le cas de deux fonctions *complètes uniformes* F et Φ; quoique la méthode s'applique à certains cas de fonctions multiformes ponctales, et même linéales et aréales, ces derniers cas sont soumis à certaines conditions que nous ne pourrons déterminer que dans la suite.

Supposons d'abord qu'il existe des fonctions entières des groupes donnés; nous poserons, en supprimant les accents pour simplifier,

$$t = x + r, \qquad \tau = x + \rho.$$

Les fonctions r, ρ sont, comme les fonctions t, τ, racines simples des équations

$$(22) \qquad \begin{cases} \Phi(x) = \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(x+r), \\ \mathrm{F}(x) = \Phi(\tau) = \Phi(x+\rho); \end{cases}$$

les fonctions t et les fonctions τ ne sont en effet racines multiples de ces équations que lorsque x est en un point multiple des groupes.

Les fonctions F et Φ, étant supposées entières, sont développables par la série de Taylor dans une région que nous supposerons comprendre tous les transformés t et τ de x. Les équations (22) prennent alors la forme suivante :

$$(23) \qquad \begin{cases} \Phi(x) = \mathrm{F}(x) + r\,\mathrm{F}'(x) + r^2\dfrac{\mathrm{F}''(x)}{2} + \ldots, \\ \mathrm{F}(x) = \Phi(x) + \rho\,\Phi'(x) + \rho^2\dfrac{\Phi''(x)}{2} + \ldots. \end{cases}$$

Les racines de ces équations sont les fonctions r, ρ, supposées données, et *ce sont des racines simples,* x étant un point ordinaire autre qu'un point multiple des groupes de transformation.

Si, dans chacune de ces équations, on réunit tous les termes dans un même membre, on obtient une fonction entière de r et une fonction entière de ρ, dont on connaît les zéros, qui est décomposable en un produit de facteurs primaires et qui donne, par conséquent [1],

$$(24)\qquad \begin{cases} \sum\left(l-\frac{1}{r}\right)=\frac{F'}{F-\Phi}, \\ \sum\left(\lambda-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\Phi'}{\Phi-F}, \end{cases}$$

où les fonctions l et les fonctions λ sont certaines fonctions qui rendent convergentes les séries indiquées et qu'on peut annuler lorsque $\sum\frac{1}{r}$ et $\sum\frac{1}{\rho}$ sont convergentes.

Posons

$$A=e^{\int\sum\left(l-\frac{1}{r}\right)dx},\qquad B=e^{\int\sum\left(\lambda-\frac{1}{\rho}\right)dx},$$

$$(25)\qquad \frac{A'}{A}=\frac{F'}{F-\Phi},\qquad \frac{B'}{B}=\frac{\Phi'}{\Phi-F}.$$

On a alors

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}=\frac{F'-\Phi'}{F-\Phi},$$

d'où

$$F-\Phi=cAB,$$

c étant une constante. Les équations (25) s'écrivent alors

$$(26)\qquad F'=cBA',\qquad \Phi'=-cAB',$$

d'où, avec deux constantes c, c',

$$(27)\quad F(x)=c'+c\int BA'\,dx,\qquad \Phi(x)=c'-c\int AB'\,dx,$$

où les limites sont les mêmes dans les deux intégrales, car F et Φ se correspondent.

Considérons maintenant le cas général de deux fonc-

---

[1] *Voir* notre Note : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1902).

tions uniformes méromorphes, et posons

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad \Phi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

f_1, f_2, φ_1, φ_2 étant des fonctions entières. Les équations (22) sont alors

$$(28) \qquad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{f_1(x+r)}{f_2(x+r)}, \qquad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x+\rho)}{\varphi_2(x+\rho)}.$$

Les r et les ρ sont des racines simples de ces équations, x n'étant pas un point multiple des groupes. Supposons les fonctions entières f et φ développables en séries de Taylor dans une région contenant tous les transformés t et τ de x; on aura alors, en écrivant simplement f, f', ..., φ, φ', ... pour $f(x)$, $f'(x)$, ..., $\varphi(x)$,

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1(x) f_2(x+r) - \varphi_2(x) f_1(x+r) = 0 \\ &\quad = (\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1) + r(\varphi_1 f_2' - \varphi_2 f_1') \\ &\qquad + \frac{r^2}{2}(\varphi_1 f_2'' - \varphi_2 f_1'') + \frac{r^3}{6}(\varphi_1 f_2''' - \varphi_2 f_1''') + \ldots, \\ &f_1(x)\varphi_2(x+\rho) - f_2(x)\varphi_1(x+\rho) = 0 \\ &\quad = (f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2) + \rho(f_1\varphi_2' - f_2\varphi_1') \\ &\qquad + \frac{\rho^2}{2}(f_1\varphi_2'' - f_2\varphi_1'') + \frac{\rho^3}{6}(f_1\varphi_2''' - f_2\varphi_1''') + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Les premiers membres sont des fonctions entières de r et de ρ respectivement dont on connaît les zéros et auxquels la décomposition en facteurs primaires est applicable. Par conséquent, si nous posons

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_1 = \sum\left(l_1 - \frac{1}{r}\right), && B_1 = \sum\left(\lambda_1 - \frac{1}{\rho}\right), \\ &A_2 = \sum\left(l_2 - \frac{1}{r^2}\right), && B_2 = \sum\left(\lambda_2 - \frac{1}{\rho^2}\right), \\ &A_3 = \sum\left(l_3 - \frac{1}{r^3}\right), && B_3 = \sum\left(\lambda_3 - \frac{1}{\rho^3}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

où les fonctions $l_1, l_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ rendent convergentes les séries indiquées formées avec les fonctions r et les fonctions ρ données, on aura (*loc. cit.*)

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi_1 f'_2 - \varphi_2 f'_1}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_1,\\
&\frac{\varphi_1 f''_2 - \varphi_2 f''_1}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_2 + A_1^2,\\
&\frac{\varphi_1 f'''_2 - \varphi_2 f'''_1}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = 2A_3 + 3A_2A_1 + A_1^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{f_1 \varphi'_2 - f_2 \varphi'_1}{f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1} = B_1,\\
&\frac{f_1 \varphi''_2 - f_2 \varphi''_1}{f_1 \varphi^2 - f_2 \varphi_1} = B_3 + B_1^2,\\
&\frac{f_1 \varphi'''_2 - f_2 \varphi'''_1}{f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1} = 2B_3 + 3B_2B_1 + B_1^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Or les équations écrites sur la première ligne donnent

$$\frac{\varphi_1 f'_2 - \varphi_2 f'_1 + f_2 \varphi'_1 - f_1 \varphi'_2}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_1 + B_1;$$

posant pour un instant

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha = e^{\int A_1\,dx}, && \beta = e^{\int B_1\,dx},\\
&\frac{\alpha'}{\alpha} = A_1, && \frac{\beta'}{\beta} = B_1,
\end{aligned}\right.$$

on aura donc

$$(33)\qquad \varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 = \alpha\beta,$$

la constante d'intégration pouvant rentrer dans α ou β qui ne sont déterminés qu'à un facteur constant près.

Les équations (31) s'écrivent alors

$$(34)\qquad \varphi_1 f'_2 - \varphi_2 f'_1 = \alpha\beta A_1 = \alpha'\beta,$$

$$(35)\qquad \varphi_1 f''_2 - \varphi_2 f''_1 = \alpha\beta(A_2 + A_1^2),$$

$$(36)\qquad \varphi_1 f'''_2 - \varphi_2 f'''_1 = \alpha\beta(2A_3 + 3A_2A_1 + A_1^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(37)\qquad \varphi'_1 f_2 - \varphi'_2 f_1 = \alpha\beta B_1 = \alpha\beta',$$

$$(38)\qquad \varphi''_1 f_2 - \varphi''_2 f_1 = \alpha\beta(B_2 + B_1^2),$$

$$(39)\qquad \varphi'''_1 f_2 - \varphi'''_2 f_1 = \alpha\beta(2B_3 + 3B_2B_1 + B_1^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les équations (33), (34), (35), linéaires par rapport à φ_1, φ_2, donnent l'équation

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} f_2 & f_1 & 1 \\ f'_2 & f'_1 & A_1 \\ f''_2 & f''_1 & A_1 + A_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dérivant (34) en tenant compte de (35), on trouve, en remarquant que $\frac{d}{dx}\alpha\beta = \alpha\beta(A_1 + B_1)$,

$$(41)\qquad \varphi'_1 f'_2 - \varphi'_2 f'_1 = \alpha\beta(A_1B_1 + A'_1 - A_2).$$

En dérivant (37) et tenant compte de (38) on aurait une autre expression de la même fonction, qu'on peut obtenir en permutant, dans la précédente, les A et les B de même indice; on en conclut la relation nécessaire suivante entre les t et les τ données :

$$(42)\qquad A'_1 - A_2 = B'_1 - B_2.$$

Cette remarque faite, dérivons (35) en tenant compte de (36); on trouve

$$(43)\qquad \begin{cases} \varphi'_1 f''_2 - \varphi'_2 f''_1 \\ \quad = \alpha\beta\big(B_1(A_2 + A_1^2) + A'_2 + 2A_1A'_1 - 2A_3 - 2A_2A_1\big). \end{cases}$$

Les équations (37), (41), (43), linéaires par rapport à φ'_1 et φ'_2, donnent l'équation

$$(44)\quad \begin{vmatrix} f_2 & f_1 & B_1 \\ f'_2 & f'_1 & B_1 A_1 + A'_1 - A_2 \\ f''_2 & f''_1 & B_1(A_2 + A_1^2) + A'_2 + 2A_1A'_1 - 2A_3 - 2A_2A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe les déterminants (40), (44), par rapport aux éléments de la troisième colonne, et si l'on élimine le mineur $(f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2)$, on obtient l'équation

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_2 f''_1 - f_1 f''_2}{f_2 f'_1 - f_1 f'_2} &= \frac{2A_1(A'_1 - A_2) + A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} \\ &= 2A_1 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2}. \end{aligned} \right.$$

Posons pour un instant

$$u = e^{\int \left(2A_1 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2}\right) dx}.$$

Nous aurons alors

$$(46)\qquad f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = u,$$

$$(47)\qquad f_2 f''_1 - f_1 f''_2 = u',$$

et, au moyen de l'équation (40),

$$(48)\qquad f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2 = A_1 u' - (A_2 + A_1^2) u.$$

Ces trois équations sont de la même forme que celles qui nous ont conduit à l'équation aux fonctions Θ relatives à un groupe donné de substitutions d'invariabilité. [*Détermination des fonctions, etc.* (*Nouv. Ann.*, 1902).]

En opérant de la même manière que dans ce cas, on trouve l'équation suivante, à laquelle satisfont f_1, f_2 et toutes les fonctions $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ dont les quotients sont les fonctions F cherchées,

$$u f'' - u' f' + (A_1 u' - (A_2 + A_1^2) u) f = 0$$

ou, en vertu de la valeur de u écrite plus haut,

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} & f'' - \left[2A_1 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} \right] f' \\ & \quad + \left[A_1^2 - A_2 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} A_1 \right] f = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtiendrait de même l'équation aux fonctions φ :

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi'' - \left[2B_1 + \frac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2} \right] \varphi' \\ & \quad + \left[B_1^2 - B_2 + \frac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2} B_1 \right] \varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où nous nous sommes placé, où F et Φ sont fonctions complètes uniformes, et où les fonctions f et φ sont uniformes entières, les fonctions f sont identiques aux fonctions entières Θ qu'on peut déterminer par les substitutions de (F) et qui sont les intégrales d'une équation de la forme (*loc. cit.*)

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0,$$

où Φ et Ψ sont formées au moyen des substitutions de (F) : il s'ensuit que cette équation est identique à l'équation (49) et l'on obtient par cette identification deux relations entre les quantités $r = t - x$ provenant du groupe de transformation (FΦ) et les *périodes* $p = s - x$ provenant du groupe (F). Les fonctions φ conduisent à des relations analogues entre les quantités $\rho = \tau - x$ et les *périodes* $\pi = \sigma - x$ de (Φ).

On peut obtenir une infinité de relations entre les t et les τ de la forme (42) par des moyens analogues à ceux qui ont servi à établir celle-ci ; nous n'y insistons pas.

Remarquons encore que l'hypothèse faite que $F(x)$ et $\Phi(x)$ soient uniformes n'est pas *nécessaire*, car cette hypothèse ne nous a servis qu'à mettre F et Φ sous forme de quotients de fonctions entières auxquelles notre théorème sur les zéros des fonctions entières est toujours applicable (*Nouv. Ann.*, 1902); mais nous avons vu (*loc. cit.*) qu'il existe des fonctions complètes multiformes (ponctales, linéales ou aréales) qui se mettent sous forme de quotients de fonctions pseudo-entières (fonctions qui ne deviennent infinies pour aucune valeur finie de x), auxquelles la décomposition en facteurs et le théorème sur les zéros sont applicables. Dans tous les cas où les groupes $(F\Phi)$ et (ΦF) sont donnés, on pourra donc appliquer les équations (49) et (50); on doit observer seulement que, lorsque les séries

$$\sum \frac{1}{r}, \quad \sum \frac{1}{r^2}, \quad \sum \frac{1}{r^3},$$

$$\sum \frac{1}{\rho}, \quad \sum \frac{1}{\rho^2}, \quad \sum \frac{1}{\rho^3}$$

ne sont pas convergentes, il reste une ambiguïté dans le choix des fonctions l, λ à introduire (30); ce n'est que lorsque ces séries sont convergentes que tous les coefficients de (49), (50) sont bien déterminés. Cependant, dans le cas où $\sum \frac{1}{r^2}$ est convergente sans que $\sum \frac{1}{r}$ le soit, on peut le plus souvent (*loc. cit.*) annuler A_1 et faire

$$A_2 = -\sum \frac{1}{r^2}, \qquad A_3 = -\sum \frac{1}{r^3};$$

l'équation (49) est alors

$$f'' + \frac{A'_2 - 2A_3}{A_2} f' - A_2 f = 0.$$

Le cas que nous avons traité d'abord où il existe des fonctions entières F et Φ des groupes donnés est compris dans le cas général résolu par les équations (49) et (50); les fonctions f et φ sont alors elles-mêmes des fonctions F et Φ et les équations (49) et (50) doivent être satisfaites par $f = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, d'où les relations

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_1^2 - A_2 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} A_1 = 0, \\ & B_1^2 - B_2 + \frac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2} B_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

conditions nécessaires et suffisantes pour que, parmi les fonctions F et Φ des groupes donnés, il y en ait qui soient entières.

Seconde méthode. — Posons

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} & z = F(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}, \\ & \zeta = \Phi(x) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots}. \end{aligned} \right.$$

Les équations

$$\Phi(x) = F(t), \qquad F(x) = \Phi(\tau)$$

s'écrivent

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} & \zeta = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots}, \\ & z = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations, qu'on peut mettre sous forme entière par rapport à t et τ,

$$a_0 - b_0\zeta + (a_1 - b_1\zeta)t + (a_2 - b_2\zeta)t^2 + \dots = 0,$$
$$\alpha_0 - \beta_0 z + (\alpha_1 - \beta_1 z)\tau + (\alpha_2 - \beta_2 z)\tau^2 + \dots = 0$$

ont pour racines *simples* les substitutions t et τ données.

Si l'on pose

$$(54)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 = \sum\left(m_1 - \dfrac{1}{t}\right), & \mathcal{B}_1 = \sum\left(\mu_1 - \dfrac{1}{\tau}\right), \\ \mathcal{A}_2 = \sum\left(m_2 - \dfrac{1}{t^2}\right), & \mathcal{B}_2 = \sum\left(\mu_2 - \dfrac{1}{\tau^2}\right), \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les fonctions $m\ldots$, $\mu\ldots$ rendent convergentes les séries indiquées, on aura

$$(55)\quad \begin{cases} \dfrac{a_1 - b_1\zeta}{a_0 - b_0\zeta} = \mathcal{A}_1, \\ \dfrac{a_2 - b_2\zeta}{a_0 - b_0\zeta} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_2 + \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_1^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1 - \beta_1 z}{\alpha_0 - \beta_0 z} = \mathcal{B}_1, \\ \dfrac{\alpha_2 - \beta_2 z}{\alpha_0 - \beta_0 z} = \dfrac{1}{2}\mathcal{B}_2 + \dfrac{1}{2}\mathcal{B}_1^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Toutes les fonctions cherchées étant les transformations linéaires de z et de ζ, on peut prendre pour fonctions F et Φ les fonctions déterminées par les seconds membres d'une équation (55) et d'une équation (56); toutefois il restera à déterminer les coefficients d'une transformation linéaire de l'une au moyen de l'autre, pour que les deux fonctions obtenues *se correspondent* (¹).

La méthode que nous venons d'indiquer et qui

(¹) Les quantités m_1, m_2, ..., μ_1, μ_2, ... peuvent être telles pour que $\mathcal{A}_1$, et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$, et $\mathcal{B}_2$, ... se correspondent; c'est, par exemple, ce qui arrive lorsque les quantités m, μ sont toutes nulles.

est analogue à la seconde méthode que nous avons donnée (*Nouv. Ann.*, 1903) pour déterminer les fonctions $F(x)$ de groupe (F) donné, donne lieu à une discussion analogue. Pour ne point trop allonger cette Note, nous prions le lecteur de se reporter à la Note précédente et nous ne rappellerons que cette remarque : s'il existe un nombre ω tel que $\sum \frac{1}{t^\omega}$ soit convergente et que les séries $\sum \frac{1}{t^n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \omega - 1)$ soient divergentes ou constantes, on a l'une des fonctions ζ cherchées du groupe de transformation (ΦF) par la fonction $\sum \frac{1}{t^\omega}$; la même remarque s'applique aux séries en τ.

Les deux méthodes que nous venons d'exposer pour la recherche des fonctions F et Φ dont les groupes de transformation sont donnés présentent les mêmes avantages et aussi les mêmes difficultés que les deux méthodes que nous avons données précédemment pour déterminer les fonctions $F(x)$ dont on donne le groupe de substitutions; pour la comparaison de ces méthodes il suffit de se reporter à la Note précédente. On appliquera facilement ces méthodes, à titre d'exercice, aux substitutions qui transforment $\sin x$ en $\cos x$, ou réciproquement, et à celles qui transforment $\operatorname{sn} x$ en $\operatorname{sn}(K + x)$ ou réciproquement.

La théorie générale que nous avons indiquée brièvement a de nombreuses et importantes applications; nous verrons notamment dans la suite comment elle conduit aux transformations de Lie pour les équations différentielles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1903.
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Deux points P, P_1, *rapportés à un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *ont pour coordonnées* a, b, c *et* a_1, b_1, c_1. *De ces points partent respectivement deux droites* [D] *et* [D_1] *ayant pour cosinus directeurs* α, β, γ *et* α_1, β_1, γ_1. *L'axe des* z *est vertical.*

Deux points pesants, placés d'abord en P *et* P_1, *sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites* [D] *et* [D_1], *sur lesquelles ils occupent, au bout du temps* t, *les positions* M *et* M_1.

I. *Exprimer les coordonnées des points* M *et* M_1 *en fonction du temps.*

Les masses des deux points étant μ *et* μ_1, *déterminer le mouvement de leur centre de gravité* G.

En supposant $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, *trouver à quelles conditions doivent satisfaire* α, α_1, β, β_1, *et quelle doit être la valeur du rapport* $\frac{\mu}{\mu_1}$ *pour que* G *décrive une droite verticale.*

II. *Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface-lieu de la droite* MM_1, *quand le temps varie.*

Mettre en évidence les génératrices rectilignes de cette surface.

Calculer les coordonnées de son sommet.

III. *Le mètre étant pris pour unité de longueur, on* *suppose que l'on ait*

$$a = b = 0, \qquad c = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 1,$$

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas particulier, calculer le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, *de telle sorte que* G *parcoure une droite verticale : calculer, en outre, sa vitesse* v *à l'instant où il vient rencontrer l'axe des* y, *ainsi que la durée* t *de sa chute jusqu'à cet instant. Ces valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde pour la vitesse, en prenant* 9,8 *pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.*

N. B. — *Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de la résistance de l'air dans le mouvement des points* M *et* M_1.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. On sait, d'après la théorie du plan incliné, que chacun des points M et M_1 décrit la droite correspondante d'un mouvement uniformément varié dont l'accélération est égale à la projection de l'accélération de la pesanteur sur cette droite.

Si donc on suppose l'axe Oz dirigé *du bas vers le haut*, l'accélération du point M sur la droite D est égale à $-g\gamma$, et ses projections sur les trois axes sont respectivement

$$-g\alpha\gamma, \quad -g\beta\gamma, \quad -g\gamma^2,$$

ce qui donne immédiatement, pour les coordonnées du point M au bout du temps t,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a - \frac{1}{2} g\alpha\gamma t^2, \\ y &= b - \frac{1}{2} g\beta\gamma t^2, \\ z &= c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2 \end{aligned} \right.$$

et, de même pour le point M_1,

$$(1')\qquad \begin{cases} x = a_1 - \frac{1}{2} g \alpha_1 \gamma_1 t^2, \\ y = b_1 - \frac{1}{2} g \beta_1 \gamma_1 t^2, \\ z = c_1 - \frac{1}{2} g \gamma_1^2 t^2. \end{cases}$$

Les coordonnées du centre de gravité G, égales, comme on sait, à

$$X = \frac{\mu x + \mu_1 x_1}{\mu + \mu_1}, \qquad Y = \frac{\mu y + \mu_1 y_1}{\mu + \mu_1}, \qquad Z = \frac{\mu z + \mu_1 z_1}{\mu + \mu_1},$$

sont donc données par

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\mu a + \mu_1 a_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Y = \dfrac{\mu b + \mu_1 b_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Z = \dfrac{\mu c + \mu_1 c_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \gamma^2 + \mu_1 \gamma_1^2}{\mu + \mu_1} t^2, \end{cases}$$

équations de même forme que les précédentes, qui définissent par suite aussi un mouvement rectiligne uniformément varié.

La droite décrite par le point G sera, d'ailleurs, verticale si X et Y sont indépendants de t, c'est-à-dire si

$$\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1 = 0,$$
$$\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse où $\gamma = \gamma_1$, ces égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = -\frac{\mu_1}{\mu},$$

et, puisque les égalités

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

donnent ici

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

on a

$$-\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha_1^2+\beta_1^2}} = \pm 1.$$

Or, les masses μ et μ_1 étant essentiellement positives, la valeur -1 seule convient. On a donc finalement

$$(3) \qquad \alpha = -\alpha_1, \qquad \beta = -\beta_1, \qquad \mu = \mu_1.$$

En d'autres termes, les droites D et D_1 également inclinées sur Oxy le sont en sens contraire, leurs projections sur ce plan étant parallèles, et les masses des points M et M_1 sont égales.

Si, en outre, on tient compte de l'égalité $c = c_1$, on voit que les coordonnées du point G se réduisent alors à

$$X = \frac{a + a_1}{2}, \qquad Y = \frac{b + b_1}{2}, \qquad Z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

II. Si, dans les équations de la droite MM_1

$$\frac{X - x}{x - x_1} = \frac{Y - y}{y - y_1} = \frac{Z - z}{z - z_1},$$

on remplace x, y, z, x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs (en tenant compte des hypothèses $c = c_1$, $\gamma = \gamma_1$), et si l'on pose $\frac{1}{2} g\gamma t^2 = \theta$, on a

$$\frac{X - a + \theta\alpha}{a - a_1 - 2\theta\alpha} = \frac{Y - b + \theta\beta}{b - b_1 - 2\theta\beta}, \qquad Z = c - \theta\gamma.$$

Éliminant θ entre ces équations, on a, pour la surface décrite par la droite MM_1, l'équation

$$\frac{\gamma(X - a) - \alpha(Z - c)}{\gamma(a - a_1) + 2\alpha(Z - c)} = \frac{\gamma(Y - b) - \beta(Z - c)}{\gamma(b - b_1) + 2\beta(Z - c)}$$

qu'on peut écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &2(Z-c)\left[\beta\left(X-\frac{a+a_1}{2}\right)-\alpha\left(Y-\frac{b+b_1}{2}\right)\right]\\ &\qquad+\gamma\left[(b-b_1)\left(X-\frac{a+a_1}{2}\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left.-(a-a_1)\left(Y-\frac{b+b_1}{2}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation définit un paraboloïde hyperbolique. On voit immédiatement qu'elle se simplifie beaucoup lorsqu'on transporte l'origine au point $\left(\frac{a+a_1}{2}, \frac{b+b_1}{2}, c\right)$, centre de gravité des points P et P_1. Elle devient alors

$$(4\ bis)\quad 2Z'(\beta X'-\alpha Y')+\gamma[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y']=0.$$

Les plans directeurs de ce paraboloïde sont

$$Z'=0,\qquad \beta X'-\alpha Y'=0,$$

et ses deux systèmes de génératrices rectilignes

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} \beta X'-\alpha Y'&=\lambda[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y'],\\ 2\lambda Z'&=-\gamma;\end{aligned}\right.$$

$$(\mu)\quad \left\{\begin{aligned} 2Z'&=\mu[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y'],\\ \mu(\beta X'-\alpha Y')&=-\gamma.\end{aligned}\right.$$

Les plans directeurs étant rectangulaires, le paraboloïde est équilatère, et son sommet est à la rencontre des deux génératrices respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs.

La génératrice (μ) perpendiculaire au plan $Z'=0$ est celle pour laquelle $\mu=\infty$, c'est-à-dire

$$(5)\qquad X'=0,\qquad Y'=0,$$

et la génératrice (λ) perpendiculaire au plan

$$\beta X'-\alpha Y'=0$$

est celle pour laquelle

$$[(b-b_1)\lambda - \beta]\beta + [(a-a_1)\lambda - \alpha]\alpha = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta(b-b_1)+\alpha(a-a_1)},$$

ce qui, porté dans la seconde équation (λ), donne

$$(6) \qquad Z' = -\frac{\gamma}{2}\,\frac{\alpha(a-a_1)+\beta(b-b_1)}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Le sommet étant défini, par rapport aux nouveaux axes, par les équations (5) et (6), ses coordonnées rapportées aux anciens seront

$$X = \frac{a+a_1}{2},$$

$$Y = \frac{b+b_1}{2},$$

$$Z = c - \frac{\gamma}{2}\,\frac{\alpha(a-a_1)+\beta(b-b_1)}{\alpha^2+\beta^2}.$$

III. Avec les données de l'énoncé, les formules (3), où l'on remplace par ρ le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, deviennent

$$X = -\frac{2\rho-\sqrt{3}}{8(\rho+1)}gt^2, \qquad Y = \frac{2}{\rho+1}, \qquad Z = 1 - \frac{2\rho+1}{8(\rho+1)}gt^2.$$

Pour que le point défini par ces coordonnées décrive une verticale, il faut et il suffit que X soit indépendant de t (Y l'étant déjà), ce qui donne

$$2\rho = \sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a, dès lors,

$$Z = 1 - \frac{\sqrt{3}+1}{4(\sqrt{3}+2)}gt^2.$$

Lorsque le point rencontre l'axe Oy, son Z est nul, et le temps de la chute est, dès lors, donné par

$$1 - \frac{\sqrt{3}+1}{4(\sqrt{3}+2)} \times 9{,}8\, t^2 = 0\,;$$

d'où

$$t = 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{9{,}8(1+\sqrt{3})}}$$

ou, en multipliant haut et bas sous le radical par $\sqrt{3}-1$,

$$t = \sqrt{\frac{2(1+\sqrt{3})}{9{,}8}} = 0^{s},746.$$

Si nous représentons le mouvement vertical du point par l'équation

$$Z = 1 - \frac{g' t^2}{2}$$

$\left(\text{où } g' = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}+2)}\, g\right)$, nous venons de trouver, pour le temps de la chute,

$$t = \sqrt{\frac{2}{g'}}.$$

D'autre part, la vitesse est donnée en valeur absolue par

$$v = g' t.$$

On a donc, pour la vitesse à l'instant considéré,

$$v = g'\sqrt{\frac{2}{g'}} = \sqrt{2g'}$$

et, par suite,

$$vt = 2.$$

Donc

$$v = \frac{2}{t} = \frac{2}{0{,}746} = 2^{m},678.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. Les segments parcourus dans le même temps par M et M_1 sur les droites D et D_1 à partir des points P et P_1 sont proportionnels aux projections de l'accélération g sur ces droites. Ces points engendrent donc des ponctuelles semblables, et la droite qui les joint décrit un paraboloïde hyperbolique. Comme, d'autre part, le centre de gravité G divise le segment MM_1 dans un rapport constant (inverse de celui des masses μ et μ_1), il décrit une génératrice Δ de ce paraboloïde, de même système que D et D_1, et, de plus, il engendre sur cette génératrice une ponctuelle semblable aux ponctuelles (M) et (M_1). Le mouvement de G est donc rectiligne et uniformément varié.

Si Δ est verticale, le plan directeur correspondant est vertical, et les droites D et D_1 étant alors parallèles à un même plan vertical ont leurs projections horizontales parallèles. Leurs inclinaisons supposées égales $(\gamma = \gamma_1)$ doivent être de sens contraire, sans quoi le paraboloïde se réduirait au plan des deux droites parallèles qu'on obtiendrait alors, et Δ ne saurait être verticale tant que D et D_1 ne le seraient pas.

Sur ces droites inclinées, M et M_1 parcourent des segments égaux entre eux dans le même temps. Donc, la projection horizontale de MM_1 passe par un point fixe, milieu de la projection horizontale de PP_1, et le centre de gravité G ne peut décrire une verticale qu'autant qu'il se projette horizontalement en ce point fixe, ce qui exige que G soit au milieu de MM_1, c'est-à-dire que $\mu = \mu_1$.

II. Lorsque, en outre, $c = c_1$, c'est-à-dire lorsque les points de départ P et P_1 sont au même niveau, la droite MM_1 reste constamment horizontale et engendre, par suite, en s'appuyant sur D et D_1, un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal, l'autre étant parallèle à D et D_1, par suite vertical. Ce paraboloïde est donc équilatère.

Les génératrices du premier système, qui ne sont autres que les droites MM_1, rencontrent toutes, comme nous venons de le voir, la verticale Δ décrite par G.

Les génératrices du second système, parallèles au second plan directeur, rencontrent toutes la perpendiculaire commune π à D et D_1, qui est évidemment une génératrice du premier système, puisque horizontale.

Les génératrices Δ et π respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs déterminent un plan tangent perpendiculaire à l'axe, celui-ci étant parallèle à l'intersection des plans directeurs. Leur point de rencontre, milieu de la perpendiculaire commune à D et D_1, n'est donc autre que le sommet du paraboloïde.

BIBLIOGRAPHIE.

De l'expérience en Géométrie; par M. *C. de Freycinet*. — In-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1903.

La Géométrie est-elle uniquement rationnelle, ou bien a-t-elle une origine expérimentale?

Telle est la question que M. de Freycinet traite dans son dernier Ouvrage avec son talent habituel. On lit avec plaisir, et sans fatigue, cette discussion pleine d'aperçus originaux et faite avec une netteté et une précision remarquables.

La réponse à la question dépend évidemment du caractère que l'on reconnaît aux axiomes. S'ils sont d'ordre purement logique, s'ils rentrent dans la catégorie des vérités évidentes par elles-mêmes, la Géométrie est uniquement mathématique comme l'Arithmétique. Au contraire, si ces axiomes, dépourvus du caractère de nécessité, doivent être recherchés dans les enseignements de l'expérience, la Géométrie se rapproche de la Physique mathématique.

L'auteur se rattache à cette dernière manière de voir, tout en précisant le sens de la notion expérimentale en Géométrie.

Dans les sciences naturelles, l'expérimentation porte sur des choses concrètes et se réduit à la constatation d'un fait matériel. En Géométrie, les expériences existent aussi à l'origine; mais elles sont idéalisées et généralisées.

Les axiomes géométriques correspondant à des réalités, il ne nous appartient pas de rejeter arbitrairement ceux dont la forme ne convient pas à notre esprit.

Aussi, sans nier l'intérêt des Géométries *abstraites*, M. de Freycinet s'attache à la seule Géométrie euclidienne, où le rôle de l'expérience apparaît sans restriction.

Le premier Chapitre comprend l'étude des principaux concepts de la Géométrie. Ces notions fondamentales ont leur origine dans l'expérience universelle; elles nous sont suggérées par la vue du monde extérieur.

La raison intervient pour compléter l'expérience presque inconsciente : elle épure l'image reçue et crée un type idéal dont les qualités ne procèdent pas de notre entendement, mais nous sont dévoilées par l'observation de la nature.

L'auteur examine successivement les notions relatives à l'espace, la distance, le volume, la surface, la ligne, le point. Pour ces dernières, on voit apparaître nettement le travail d'abstraction qui, de l'étude des corps de la nature, nous conduit à la conception des figures géométriques.

La notion de parallélisme est ensuite développée.

Après avoir rappelé les définitions classiques et signalé les inconvénients qu'elles présentent, M. de Freycinet propose la formule suivante : *Deux droites sont parallèles quand elles sont partout à la même distance l'une de l'autre.* Il restera, bien entendu, à montrer la possibilité d'un tel système de droites, et à préciser l'idée de distance; mais ceci fait, la nouvelle définition présente sur les autres deux avantages : le parallélisme ainsi dépeint est susceptible d'une vérification expérimentale; en second lieu, il n'introduit pas, à la base de la Géométrie élémentaire, la notion de l'infini.

Le second Chapitre comprend l'étude des axiomes géométriques. L'auteur signale en passant un certain nombre d'entre eux, qui sont d'ordre purement logique, et n'appartiennent pas en propre à la Géométrie.

Les autres, que l'on nommera *lois naturelles,* se réduisent à un petit nombre de propriétés essentielles du point et de la droite; la logique est impuissante à les établir et M. de Freycinet s'attache à en montrer l'origine expérimentale.

1° La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

Cet axiome peut, il est vrai, s'établir logiquement, en partant de certaines propriétés de la ligne droite et en s'aidant de considérations analytiques. Mais la démonstration est fort longue.

De cet axiome fondamental résulte naturellement la notion de distance : distance de deux points, distance d'un point à une droite, etc.

2° D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.

C'est là une vérité qu'on présente souvent comme une évidence que la raison proclame. Mais l'expérience est nécessaire pour établir la coïncidence de deux droites qui ont deux points communs.

3° Une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens.

Cette propriété est celle qui paraît la plus évidente par elle-même et l'on peut, dit l'auteur, se demander s'il est nécessaire d'en faire une loi naturelle.

Mais le concept de la droite n'est que la résultante de nos impressions physiques et, ici encore, c'est l'expérience qui, en dernière analyse, prononce.

4° La ligne droite peut servir d'axe de rotation.

L'expérience seule nous apprend qu'une figure invariable peut tourner autour d'une droite sans subir aucune déformation.

5° Une ligne droite, qui a commencé par s'éloigner d'une autre, ne peut pas ensuite s'en rapprocher.

La vérification expérimentale est aisée. Il est à remarquer que l'axiome se borne à la constatation du phénomène de divergence dans sa généralité. La loi de variation de la distance d'un point de l'une des droites à l'autre est inutile.

Cet axiome est la base d'une nouvelle théorie des droites parallèles. On en déduit immédiatement l'existence des droites parallèles, et l'on démontre ensuite sans difficulté que, par un point, l'on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Ainsi, l'auteur évite le postulatum d'Euclide. Sans se refuser à admettre ce principe, il regrette de ne pas le voir se présenter à nous *sous ces apparences de simplicité et de clarté que nous confondons si volontiers avec l'évidence, et qui achèvent d'entraîner notre adhésion.*

6° Dans un plan, on peut tracer des lignes droites dans tous les sens.

Cet axiome fondamental du plan est encore reconnu par le témoignage des sens.

Le Chapitre est complété par quelques remarques sur les types élémentaires de la Géométrie.

La Géométrie ordinaire, qui prend pour types fondamentaux la droite et le plan, est en harmonie avec les faits naturels et avec nos propres concepts.

Une Géométrie *abstraite* basée sur d'autres éléments peut être susceptible d'un développement logique; mais elle est nécessairement artificielle et imparfaite.

Le dernier Chapitre a pour titre : *Du problème géométrique.*

On peut définir la Géométrie : l'étude des propriétés des figures. Elle fournit par voie de conséquence la mesure de certains éléments à la faveur des relations qui expriment ces propriétés.

L'auteur partage la Géométrie *concrète* en Géométrie ancienne ou spéciale et Géométrie moderne ou générale.

La première se borne à l'étude individuelle des types.

La Géométrie moderne prolonge et élargit la Géométrie ancienne, sans la remplacer. Elle fournit, pour l'étude des formes et des questions qu'elles soulèvent, une méthode plus sûre.

M. de Freycinet examine successivement la méthode de Descartes, qui permet de substituer la notion de groupes généraux à celle de spécimens particuliers, puis l'invention de Leibnitz, qui arriva à point pour suppléer à l'insuffisance du calcul purement algébrique.

La Géométrie moderne, qui a pris tant d'extension, ne diffère pas, malgré son caractère d'abstraction, de la Géométrie ancienne. Elle emprunte les mêmes notions expérimentales, et vit des matériaux que celle-ci a amassés et lui fournit libéralement.

Dans ce résumé du beau Livre de M. de Freycinet, nous avons, le plus souvent, reproduit exactement le texte de l'auteur. Ces quelques extraits suffiront peut-être à montrer que, suivant son habitude, M. de Freycinet sait rendre attrayants les sujets les plus abstraits, et que son impeccable logique n'est pas dépourvue d'agrément.

Les mathématiciens ne sont pas les seuls qui liront avec intérêt et profit cet Ouvrage sincère. H. Deroide.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

Épreuve écrite. — *Mouvement d'un mobile sollicité d'un centre fixe par une force* $f\left(\frac{m}{r^2}+\frac{n}{r^3}\right)$ *et animé d'une vitesse initiale.*

Solution.

On peut supposer la masse du mobile égale à 1. On appliquera les théorèmes des aires et des forces vives. Les intégrales obtenues sont trigonométriques ou logarithmiques. Soient r_0, v_0, φ_0 le rayon vecteur initial, la vitesse initiale et l'angle de la vitesse initiale avec le vecteur, il y a deux cas principaux à distinguer :

1° Si

$$r_0^2 v_0^2 \sin^2\varphi_0 > n,$$

les intégrales qui se présentent sont trigonométriques et les résultats se rapprochent de ceux que donne la loi de Newton. Si

$$v_0^2 > \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

on a une courbe présentant un rayon vecteur minimum et des branches infinies. Si

$$v_0^2 < \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

la courbe a un rayon vecteur maximum et un rayon vecteur minimum.

2° Si

$$r_0^2 v_0^2 \sin^2 \varphi_0 < n,$$

les intégrales sont logarithmiques; la courbe admet l'origine comme point asymptote. Si

$$v_0^2 < \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

il y a un parallèle maximum. Si

$$v_0^2 > \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

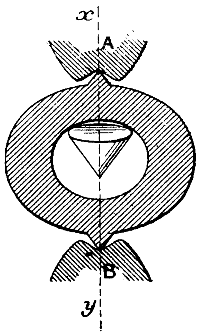
la courbe s'étend à l'infini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Tracé d'une came.*

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *On considère un système matériel soumis à des liaisons moyennant lesquelles le système admet une fonction des forces; démontrer que toute position du système pour laquelle la fonction des forces prend une valeur minima est une position d'équilibre stable;*

2° *On considère le système d'un solide invariable* PESANT *tournant sans frottement autour d'un axe* VERTICAL *xy et*



d'une masse pesante glissant sans frottement sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est xy et qui est lié invariablement au solide.

Déterminer le mouvement de ce système et les valeurs MAXIMA *et* MINIMA *de la somme des réactions des appuis de l'axe estimées parallèlement à cet axe.*

Achever ce dernier calcul dans le cas où la vitesse initiale de la petite masse pesante est perpendiculaire au plan de cette masse et de l'axe xy. (Novembre 1902.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY *et la chaînette*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

un triangle ABC, *dont l'angle* A *est égal à* 90° *et le côté* AB *à* a, *glisse sur* OXY *de manière que* AC *reste tangent à la chaînette et que le sommet* B *parcoure* OX *avec une vitesse constante* $a\lambda$. *Trouver, pour une position donnée de* ABC, *le centre instantané, le cercle des inflexions, le lieu des points où l'accélération tangentielle est nulle. Déterminer l'accélération du point* A *en fonction de l'angle* α *de* AC *avec* OX.

Le centre instantané est au point où AC *touche la chaînette, l'accélération de* A *a pour composantes*

$$\frac{dv}{dt}\,\lambda^2 a \cos^2\alpha, \qquad \frac{v^2}{\rho} = \lambda^2 a \sin\alpha\cos\alpha.$$

II. *Mouvement d'un point* M *assujetti à rester sur une sphère et attiré vers un diamètre* ZZ' *par une force* $\frac{m\lambda^2 R^4}{u^3}$, λ *étant une constante,* u *la distance de* M *à* ZZ'. *Pression sur la sphère.*

Cas où, à l'instant initial, M *est sur le grand cercle perpendiculaire à* ZZ', *sa vitesse faisant un angle de* 45° *avec cet axe.*

La pression est constante

$$m\,R\left(\theta_0'^2 + \psi_0'^2 \sin^2\theta_0 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta_0}\right);$$

dans le cas particulier, équations de la forme

$$dt = \pm \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\omega^2 + (\lambda^2 - 2\omega^2)\cos^2\theta}},$$

$$d\psi = \pm \frac{\omega \, d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)\cot^2\theta}}$$

$$(\omega = \theta'_0 = \psi'_0).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le poids de l'air en équilibre relatif dans un cylindre droit, de* 1^{m} *de hauteur, de* 2^{m} *de rayon de base, faisant* 50 *tours par seconde autour de son axe et communiquant avec l'atmosphère par deux trous aux centres des bases. Pression atmosphérique :* 1^{kg} *par centimètre carré; poids de* 1^{l} *d'air :* $1^{\text{g}},29$; $g = 9^{\text{m}},81$.

Le poids cherché est 74718^{g}. (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Figure d'équilibre d'un fil contenu dans un plan et dont chaque élément ds est repoussé d'une droite* OX *du plan par une force perpendiculaire à* OX *et égale au quotient de ds par le carré de sa distance à la droite.*

SOLUTION.

Les équations connues, avec $y > 0$, donnent

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{c}\right), \qquad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a^2 y}{c} + \frac{a^2}{c^2} - 1,$$

a et c étant des constantes dont la première est > 0; $\frac{1}{y}$ doit être $>$ la plus grande des valeurs, $\frac{1}{\alpha}$, qui annulent $\frac{dy^2}{dx^2}$; si $\alpha > 0$, y devra être compris entre 0 et α, forme rappelant la cycloïde; si $\alpha < 0$, on a une courbe infinie; pour $\frac{1}{c} = 0$, on a un cercle.

II. *Dans un plan vertical, un disque circulaire pesant de centre* A *est assujetti à rouler sans glisser sur un disque fixe et égal* O : *l'angle de* OA *avec la verticale ascendante* OZ *ayant pour cosinus* $\frac{7}{8}$, *le disque* A *est abandonné* *sans vitesse à l'action de son poids; déterminer son mouvement.*

SOLUTION.

On trouve aisément :

$$\frac{3}{2}MR^2 \times 4\frac{d\theta^2}{dt^2} = 4Mg\left(\frac{7}{8} - \cos\theta\right), \quad N = \frac{7}{3}Mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right).$$

III. *Mouvement d'un cube homogène, soustrait à toute action extérieure, autour d'un de ses sommets.*

(Novembre 1902.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une circonférence homogène de rayon* R *et de masse* $2\lambda^2 m$ *peut librement tourner autour d'un diamètre vertical fixe.*

Un point matériel M *pesant et de masse* m *peut librement glisser sur cette circonférence sans pouvoir la quitter.*

A l'instant initial, la circonférence est animée d'une rotation ω *autour de son diamètre fixe et la vitesse relative du point* M *sur cette circonférence est nulle.*

Étudier le mouvement du système, indiquer les différentes formes de la trajectoire sphérique décrite par le point M *et calculer, en fonction de la position du système, la réaction de la circonférence sur le point* M.

SOLUTION.

En définissant la position de la circonférence par un angle θ et celle du point M par l'angle φ du rayon avec la verticale descendante, appliquant le théorème des forces vives et le principe des aires, on a deux intégrales premières qui donnent immédiatement

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2g}{R}\cos\varphi + h\right)(\lambda^2 + \sin^2\varphi) - C^2}{\lambda^2 + \sin^2\varphi},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\lambda^2 + \sin^2\varphi}.$$

Si l'on pose $u = \cos\varphi$,

$$F(u) = \left(\frac{2g}{R}u + h\right)(\lambda^2 + 1 - u^2) - C^2,$$

la discussion se ramène à l'étude du signe de $F(u)$ qui, en vertu des conditions initiales, admet la racine u_0; la substitution des valeurs $\pm\sqrt{\lambda^2+1}$ montre que les trois racines sont réelles, l'une d'elles étant inférieure à -1; quant à la troisième, elle est forcément comprise entre -1 et $+\sqrt{\lambda^2+1}$; elle peut donc être comprise dans l'un quelconque des trois intervalles

$$-1, \quad u_0, \quad +1, \quad +\sqrt{\lambda^2+1},$$

et cela dépend, comme on le voit facilement sur l'équation $F(u)=0$ débarrassée de la solution u_0, de la position de ω^2 par rapport aux deux quantités

$$H = \frac{g}{Ru_0}, \qquad H' = \frac{2g\lambda^2}{R(\lambda^2+1-u_0^2)(1+u_0)}.$$

Si $u_0 < 0$, H est négatif et la trajectoire de M est une espèce de rosace tracée sur la sphère et ayant pour nœud le point le plus bas ou bien une espèce de sinusoïde sphérique comprise entre deux parallèles suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H'. Dans les deux cas la trajectoire est au-dessous du parallèle initial.

Si $u_0 > 0$, H et H' sont tous deux positifs et $H > H'$. On trouve encore la courbe en rosace ou la courbe sinusoïdale suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H', mais, dans ce dernier cas, la trajectoire est au-dessous ou au-dessus du parallèle initial suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H.

Comme cas limites, on voit que si ω^2 est égal à H', $F(u)$ admet la racine $+1$ et le temps devient infini quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$. La trajectoire est une sorte de spirale asymptote au point le plus bas de la sphère; enfin, si ω^2 est égal à H, ce qui ne peut arriver que si $u_0 > 0$, c'est-à-dire si le parallèle initial est au-dessous du centre, la trajectoire est un parallèle décrit d'un mouvement uniforme.

Pour calculer facilement les deux composantes de la réaction normale il suffit d'écrire en coordonnées polaires ε, θ, φ, les équations du mouvement du point M considéré comme entièrement libre, puis d'y remplacer r par la valeur constante R et les dérivées de θ et φ par leurs expressions en fonction de φ déduites des équations du mouvement du système.

Épreuve pratique. — *On a un parallélépipède rectangle* ABCD, A'B'C'D' *solide et homogène; on considère les deux droites indéfinies fixes* D *et* Δ *confondues avec* AB *et* C'B', *puis le plan fixe* P *mené par* D *perpendiculairement à* Δ. *On suppose que le parallélépipède soit lancé à partir de la position précédente et ne puisse se mouvoir qu'en satisfaisant aux conditions suivantes :* 1° *le sommet* A *reste sur la droite fixe* D; 2° *le sommet* C' *reste sur la droite fixe* Δ; 3° *le sommet* B *reste sur le plan fixe* P.

On pose $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, *on désigne par* m *la masse du parallélépipède, par* v_0 *la vitesse initiale de* A *sur la droite* D *et l'on demande d'exprimer au moyen de* a, b, c, m, v_0 *la force vive initiale du solide.*

Solution.

On trouve facilement la relation entre les vitesses initiales v_0 et u_0 de A sur D et C' sur Δ et, au moyen de u_0, v_0, on a immédiatement la vitesse du centre de gravité milieu de AC'.

Pour avoir la force vive dans le mouvement autour du centre de gravité, il faut calculer les composantes p, q, r de la rotation initiale suivant les axes du parallélépipède.

La translation du centre de gravité étant connue, si, au moyen des formules générales des vitesses, on exprime que la vitesse de A est sur D, que celle de C' est sur Δ et que celle de B est dans P, on a cinq équations linéaires se réduisant à trois et déterminant les valeurs de p, q, r à l'instant initial. Le calcul des moments d'inertie du parallélépipède et l'application du théorème de König permettent alors de trouver l'expression de la force vive initiale en fonction des données.

(Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — *Une tige homogène horizontale* AOB *peut librement tourner autour d'un axe vertical fixe* Oz. *Une autre tige pesante* CAD *normale à* AB *peut librement tourner autour d'elle. Étudier le mouvement du système. Étudier d'une façon détaillée le cas où le système part du repos.*

Solution.

En appelant θ l'angle dont tourne la tige AB et φ celui que fait la tige CD avec la verticale, on calcule la force vive du système; elle ne contient pas θ et il en est de même de la fonction de forces; on a donc deux intégrales immédiates, l'une par le théorème des forces vives, l'autre par l'équation de Lagrange relative au paramètre θ. On en déduit une équation de la forme

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{F(\varphi)},$$

et l'étude du signe de $F(\varphi)$ se ramène à l'étude d'un polynome du troisième degré en $\cos\varphi$, polynome dont les trois racines sont toujours réelles. Le mouvement de rotation de CD autour de AB est périodique, il peut être oscillatoire de deux façons différentes ou encore révolutif.

θ est donné en fonction de φ par une quadrature

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = R(\cos\varphi) + \frac{K}{\sqrt{F(\varphi)}},$$

et, à chaque période, θ augmente d'une quantité constante.

Si le système part du repos le mouvement de CD est toujours oscillatoire et la constante K étant nulle, le mouvement de rotation de AB est une oscillation périodique.

Épreuve pratique. — *On donne une parabole de paramètre* $\frac{1}{2}$ *et une droite* Oz *issue de son sommet et faisant avec l'axe un angle de* $45°$. *On demande de déterminer complètement l'ellipsoïde central d'inertie du solide homogène et de densité* 1 *engendré par la rotation autour de* Oz *du segment de parabole limité par cette droite.*

(Novembre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1952.

(1902, p. 576.)

Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

jouissant de la propriété que, si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.

(LAGUERRE.)

SOLUTION

Par M. E. LANDAU.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le dénominateur $f(x)$ ne disparaît pas pour $x=0$; car si le développement de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x renfermait des termes à exposants négatifs

$$(1)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{a_0}{x^s}+\frac{a_1}{x^{s-1}}+\ldots+\frac{a_{s-1}}{x}+a_s+a_{s+1}x+\ldots,$$

on aurait

$$\frac{x^s\varphi(x)}{f(x)}=a_0+a_1x+\ldots+a_sx^s+\ldots,$$

où les coefficients sont les mêmes que dans (1); on obtient donc toutes les fractions rationnelles satisfaisant aux conditions du problème en ne cherchant que celles où $f(0)\neq 0$ et en les divisant par une puissance quelconque x à exposant entier et $\geqq 0$.

On connaît bien l'exemple de la progression géométrique

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots\qquad(|x|<1),$$

appartenant aux fonctions cherchées; on en déduit successivement ces autres fonctions qui ne sont guère plus générales :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{1-x^k}=1+x^k+x^{2k}+\ldots,$$

k désignant un entier positif quelconque,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}&=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k}\\&=(b_0+b_1x+\ldots+b_{k-1}x^{k-1})(1+x^k+x^{2k}+\ldots)\\&=b_0+b_1x+\ldots+b_{k-1}x^{k-1}+b_0x^k+\ldots\\&\qquad+b_{k-1}x^{2k-1}+b_0x^{2k}+\ldots,\end{aligned}$$

où $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ désignent k nombres dont chacun égale soit zéro, soit $+1$, soit -1, enfin

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + \ldots \\ &\quad + a_{m-1}x^{m-1} + \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}}{1 - x^k}x^m \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots \\ &\quad + a_{m-1}x^{m-1} + b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \ldots \\ &\quad + b_{k-1}x^{m+k-1} + b_0 x^{m+k} + \ldots \\ &\quad + b_{k-1}x^{m+2k-1} + b_0 x^{m+2k} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

où m désigne un entier $\geqq 1$, k un entier $\geqq 1$, et $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ des nombres quelconques égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.

Je dis maintenant que, inversement, toute série

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ &\qquad (a_n = 0, +1, -1),\end{aligned}\right.$$

si elle représente une fonction rationnelle, est contenue dans le type (2) et peut, par conséquent, être mise sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = G(x) + H(x)\frac{x^m}{1 - x^k},$$

$G(x)$ et $H(x)$ désignant des polynomes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement.

En effet, soient, dans (3), ρ le degré de $\varphi(x)$, r celui de $f(x)$; l'on sait que les coefficients a_n satisfont, pour tout nombre ν supérieur ou égal au plus grand τ des deux nombres 0 et $\rho - r + 1$, à une formule de récurrence

$$(4)\qquad a_{\nu+r} = \gamma_1 a_{\nu+r-1} + \gamma_2 a_{\nu+r-2} + \ldots + \gamma_r a_\nu,$$

où $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ sont des constantes. On en conclut que, par une succession de r coefficients $a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{\nu+r-1}$, le coefficient suivant $a_{\nu+r}$ est complètement déterminé, quel que soit le rang ν où cette suite commence, ν étant $\geqq \tau$.

Je considère maintenant les $3^r + r$ nombres

$$a_\tau,\quad a_{\tau+1},\quad \ldots,\quad a_{\tau+3^r+r-1};$$

ils renferment 3^r+1 systèmes de r coefficients successifs

$$(5) \qquad a_\nu, \quad a_{\nu+1}, \quad \ldots, \quad a_{\nu+r-1},$$

savoir pour $\nu = \tau, \tau+1, \ldots, \tau+3^r$. Chaque a_r ne pouvant avoir, par hypothèse, que trois valeurs distinctes, un système de r coefficients ne peut être formé que du nombre fini de 3^r manières différentes; parmi les 3^r+1 systèmes (5), il faut donc qu'il y en ait au moins deux qui soient égaux terme à terme; il existe donc deux nombres m et k $(m \geqq \tau, k \geqq 1)$ tels que

$$a_m = a_{m+k}, \quad a_{m+1} = a_{m+k+1}, \quad \ldots, \quad a_{m+r-1} = a_{m+k+r-1}.$$

En vertu de (4), on en déduit successivement

$$a_{m+r} = a_{m+k+r}, \quad a_{m+r+1} = a_{m+k+r+1}, \quad \ldots,$$

en un mot,

$$a_\lambda = a_\nu,$$

pour

$$\lambda \equiv \nu \pmod{k}, \quad \lambda \geqq m, \quad \nu \geqq m.$$

A partir de l'indice m, les coefficients se répètent donc périodiquement de k en k; en posant

$$a_m = b_0, \quad a_{m+1} = b_1, \quad \ldots, \quad a_{m+k-1} = b_{k-1};$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots \\ &+ a_{m-1}x^{m-1} + b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \ldots \\ &+ b_{k-1}x^{m+k-1} + b_0 x^{m+k} + \ldots \\ &+ b_{k-1}x^{m+2k-1} + b_0 x^{m+2k} + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui coïncide bien avec (2).

La solution générale du problème proposé est donc

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^s}\left(G(x) + H(x)\frac{x^m}{1-x^k}\right) \qquad (s \geqq 0, m \geqq 1, k \geqq 1),$$

où $G(x)$ et $H(x)$ désignent des polynomes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement, dont les coefficients sont tous égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.

L' « ESPERANTO » ET LES MATHÉMATIQUES.

Les lecteurs des *Nouvelles Annales* se rappellent sans doute une Lettre de M. Méray, insérée dans ce Journal (1900, p. 34), et dans laquelle l'éminent géomètre attirait l'attention des mathématiciens sur les avantages considérables que présente la langue internationale *Esperanto,* création du Docteur L. Zamenhof, de Varsovie.

Deux ans se sont écoulés depuis la publication de cette Lettre, et l'Espéranto n'a cessé de se répandre, en France et à l'étranger. Des cours ont été créés un peu partout, et plusieurs personnes l'ont adopté *exclusivement* pour leurs relations internationales. Enfin, de nombreuses publications sur des sujets littéraires, philosophiques, médicaux, etc., attestent que l'Espéranto se prête, avec une souplesse et une clarté parfaites, à l'expression de toutes les idées humaines.

S'il est une catégorie de personnes que doit toucher l'idée de la langue internationale, c'est assurément celle des savants et en particulier des mathématiciens purs, dont les sujets d'étude sont internationaux par excellence. Et, de fait, quelques travaux mathématiques ont été publiés en Espéranto. Nous citerons : le *Cadran solaire de Dijon,* de M. Gruey, directeur de l'Observatoire de Besançon; *Sur le Ve Postulat d'Euclide,* de l'abbé Dombrovski, de Kovno (Russie); *Sur la construction d'un curieux Cadran solaire,* du capitaine Polianski, de Khabarovsk (Sibérie) (1); une *Étude sur*

(1) Ce dernier travail a été inspiré par celui de M. Gruey.

la résistance des Poutres, du Docteur Federico Villareal, professeur à la Faculté des Sciences de Lima (Pérou). Mais ces travaux, il faut le reconnaître, sont peu nombreux encore. Et la cause en doit être attribuée à l'absence d'un vocabulaire mathématique. Le Dictionnaire du Docteur Zamenhof (*Universala Vortaro*), très complet pour tout ce qui concerne les idées générales, contient peu de termes techniques, et c'est l'obligation de créer des néologismes en trop grand nombre qui, jusqu'à ce jour, a sans doute effrayé les auteurs de Mémoires mathématiques en Espéranto (1).

Convaincue des services considérables que l'Espéranto est appelé à rendre à la Science, la Rédaction des *Nouvelles Annales* a décidé de publier, dans le plus bref délai, un vocabulaire des termes mathématiques en Espéranto, avec traduction dans les langues *française, allemande, anglaise* et *italienne*. M. Gauthier-Villars veut bien ouvrir les colonnes du *Supplément* à ce vocabulaire, dont l'élaboration est due à M. Hoffbauer, ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous commencerons cette publication dans le Numéro de septembre, et nous l'achèverons, espérons-nous, dans les premiers mois de l'année 1904.

Jusqu'à cette époque, rien ne sera modifié dans le corps même du journal : nous estimons, en effet, que l'introduction d'une autre langue que le français est subordonnée à *l'assentiment formel de nos lecteurs*.

---

(1) Nous devons pourtant citer le petit vocabulaire que M. Cerětti a publié dans le *Periodico di Matematica* (mai-juin 1903). Mais ce travail, d'ailleurs fort estimable, ne fournit qu'un nombre restreint des termes indispensables à la rédaction mathématique et ne peut servir qu'aux personnes connaissant la langue italienne.

Nous prions donc instamment ces derniers de vouloir bien nous envoyer, dès maintenant, et tant que durera la publication du vocabulaire, l'expression de leur sentiment, favorable ou non, sur l'introduction de l'Espéranto dans la rédaction mathématique.

Notre conduite ultérieure nous sera dictée par les résultats de ce plébiscite.

Enfin, nous provoquons de nos lecteurs espérantistes, toutes les observations critiques que pourra leur suggérer le vocabulaire (omissions, néologismes contestables, etc.).

Aujourd'hui seulement, et à titre tout à fait exceptionnel, nous publierons une courte Note rédigée par l'un de nous, en texte espéranto accompagné de la traduction française. Ceux de nos lecteurs qui ne connaissent pas l'Espéranto reconnaîtront, nous en sommes convaincus, s'ils veulent bien se donner la peine de jeter les yeux sur ce petit travail, la transparence de la langue internationale, même pour les personnes non initiées. Les espérantistes trouveront au passage un très petit nombre de néologismes; leur sens ne présente aucune difficulté et ils figureront d'ailleurs dans le vocabulaire [1].

La Rédaction.

---

[1] Ceux de nos lecteurs qui ignorent les premiers principes de l'Espéranto, peuvent les acquérir dans l'excellente brochure : *Premières leçons d'Espéranto*, par Th. Cart, chez Hachette et Cie. Paris. Prix : 0f,30.

PRUVO SIMPLA DE LA FERMAT'A TEOREMO;

De S° R. BRICARD.

DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE FERMAT;

Par M. R. BRICARD.

Se p estas primo, m entjero iu, la nombro $m^p - m$ estas oblo de p.

Soient p un nombre premier, m un entier quelconque : le nombre $m^p - m$ est multiple de p.

Ni skribu, per la sistemo de nombrofarado m-uma ĉiujn entjerojn p-ciferajn, kies nombro (enhavante la *nulon*) estas m^p.

El ĉi tiuj nombroj, la m jenaj :

Écrivons, dans le système de numération de base m, tous les entiers de p chiffres : leur nombre (y compris *zéro*) est m^p.

Parmi ces nombres les m suivants :

$$(0\ 0\ \ldots\ 0),$$
$$(1\ 1\ \ldots\ 1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(\overline{m-1}\ \overline{m-1}\ \ldots\ \overline{m-1})$$

konsistas ĉia el unu cifero p-foje ripetita.

Estu

sont constitués chacun d'un chiffre répété p fois.

Soit

$$A_1 = (a\ b\ \ldots\ l)$$

unu el la $m^p - m$ aliaj

l'un des $m^p - m$ autres

nombroj. Mi pretendas *ke la p nombroj*

nombres. Je dis *que les p nombres*

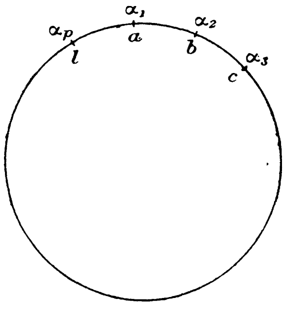
$$
\begin{aligned}
A_1 &= (a\ b\ \ldots\ l),\\
A_2 &= (b\ \ldots\ l\ a),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_p &= (l\ a\ b\ \ldots)
\end{aligned}
$$

kiuj devenas de A_1, *per cirkla ŝanĝado, ĉiuj diferencas unu de la alia.*

qui proviennent de A_1, *par permutation circulaire, sont tous différents les uns des autres.*

Supozinte efektive ke (ekzemple) A_1 identas A_h, ni p-onigu cirklon, kaj je la dividpunktoj $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, ni apudigu la ciferojn de A_1, kiel montras la jena figuro.

Supposons en effet que, par exemple, A_1 soit identique à A_h; divisons un cercle en p parties égales, et, à côté des points de division $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, écrivons les chiffres de A_1, comme sur la figure suivante.



Se A_h identas A_1, la unua cifero de A_h estas la unua cifero de A_1, t. e. : a. Sed la unua cifero de A_h estas la h^a cifero de A_1. Sekve, la h^a cifero de A_1,

Si A_h est identique à A_1, le premier chiffre de A_h est le premier chiffre de A_1, c'est-à-dire a. Mais le premier chiffre de A_h est le $h^{\text{ième}}$ chiffre de A_1. Par kiu estas la h^a cifero de A_h, estas *a*. Sed la h^a cifero de A_h estas la $2h^a$ cifero de A_1, k. t. p.

Videble, oni povas geometrie esprimi ĉi-tion, dirante :

Se oni alkondukas rektojn de la punkto α_1 al la punkto α_h, de la punkto α_h al la punkto α_{2h}, k. t. p., la ciferoj, apudaj je la vertikoj de la formita regula stelmultangulo, estas samaj.

Sed, ĉar p estas primo, tiu multangulo estas necese p-angulo. Sekve, la nombro A_1 konsistas el identaj ciferoj, kaj ne povas esti unu el la $m^p - m$ nombroj nun konsiderataj.

De tio rezultas tuj ke tiuj $m^p - m$ nombroj estas *p-opigeblaj*.

Ĉi tio povas nur okazi, se $m^p - m$ estas entjero dividebla per p.

K. O. D. P.

suite, le $h^{\text{ième}}$ chiffre de A_1, c'est-à-dire le $h^{\text{ième}}$ chiffre de A_h, est *a*. Mais le $h^{\text{ième}}$ chiffre de A_h est le $2h^{\text{ième}}$ chiffre de A_1, etc.

On voit que l'on peut exprimer géométriquement ce fait, et dire :

Joignons par des droites le point α_1 au point α_h, le point α_h au point α_{2h}, etc. : les chiffres, inscrits à côté des sommets du polygone régulier étoilé ainsi formé, sont identiques.

Mais, comme p est un nombre premier, ce polygone a nécessairement p sommets. Par conséquent le nombre A_1 se compose de chiffres identiques et ne peut être l'un des $m^p - m$ nombres actuellement considérés.

De là résulte immédiatement que ces $m^p - m$ nombres peuvent être *répartis par groupes de p*.

Cela ne peut avoir lieu que si $m^p - m$ est un nombre entier divisible par p.

C. Q. F. D.

[J2a]

UN PARADOXE DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. G. LECHALAS.

Sous le titre qui précède, M. de Montessus a complété d'une façon fort intéressante, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de janvier 1903, ce que dit Joseph Bertrand du problème :

Quelle est la probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?

Mais il n'a fait que poursuivre le développement mathématique indiqué par le célèbre professeur sans en faire la critique. Or il nous semble qu'il y a quelque chose à dire à ce point de vue.

C'est avec pleine raison que Joseph Bertrand a dit : « L'infini n'est pas un nombre; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements », et la raison en est que l'on peut dérouler, pour ainsi dire, l'infini d'une infinité de manières, conduisant aux résultats les plus variés.

Si, par exemple, je prends la suite naturelle des entiers et si, après l'avoir arrêtée à un nombre quelconque et avoir groupé d'une façon quelconque les entiers ainsi choisis, je marque l'un d'eux au hasard, il y aura toujours (1) une chance égale à $\frac{1}{2}$ pour que le

(1) Approximativement, bien entendu, si je me suis arrêté après un nombre impair.

nombre marqué soit pair. Si, au contraire, je considère la suite illimitée des entiers et si je la suppose classée de telle sorte que deux groupes de deux nombres impairs soient constamment séparés par un seul nombre pair, la chance en question ne sera plus que de $\frac{1}{3}$, bien que les deux séries infinies comprennent identiquement les mêmes nombres.

Cet exemple suggère deux réflexions. La première confirme pleinement la remarque de Bertrand : du moment que l'infini s'introduit dans un problème de probabilité, celui-ci devient susceptible de multiples solutions, parce que son énoncé peut se préciser de multiples façons. Mais, en même temps, nous voyons, dans notre exemple, qu'il peut fort bien y avoir, parmi tous les énoncés complétés, un énoncé qui réponde seul réellement à la pensée de celui qui le pose sous sa forme générale.

Si pratiquement on ne peut réaliser la suite illimitée des entiers sur laquelle nous venons de raisonner, *on admet* qu'au contraire on peut opérer sur le continu, qui recèle l'infini dans ses flancs, et le problème posé par Bertrand sur les cordes plus grandes que le côté du triangle équilatéral va donner lieu aux mêmes distinctions et conduire aux mêmes conclusions.

De même que, dans le cas de la suite des entiers, nous disions que le problème véritable posé par l'énoncé général supposait ces nombres rangés selon leur ordre naturel, de même ici nous dirons qu'un point marqué au hasard sur une ligne a d'égales chances de tomber sur un quelconque des segments égaux de longueur quelconque dans lesquels aura été divisée cette ligne, qu'un point marqué au hasard sur une surface a des chances égales de tomber dans un quelconque des polygones égaux dans lesquels on aura décomposé cette surface. Semblablement, une droite tracée à partir d'un point a des chances égales de tomber dans l'un quelconque des angles égaux faisant le tour du cadran autour de ce point.

Telles sont bien du reste les hypothèses faites par Bertrand et par M. de Montessus; mais alors l'indétermination résultant de la continuité est levée, et les paradoxes qu'on fait ressortir doivent être purement apparents et s'évanouir devant un examen attentif des divers cas.

Pour montrer qu'il en est bien ainsi, nous choisirons d'abord deux méthodes de tracé de la droite dite *quelconque,* pour lesquelles la solution du paradoxe soit facile. Supposant d'abord donnée la direction de la corde, ce qui ne change rien à la probabilité, nous pouvons achever de la déterminer en prenant au hasard son point d'intersection, soit avec une droite, telle que le diamètre perpendiculaire, soit avec la circonférence même du cercle. Ce point ayant, dans chacun des cas, d'égales chances de tomber sur un segment quelconque du diamètre ou sur un arc quelconque du cercle, on voit immédiatement qu'on obtiendra des probabilités de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{3}$ comme réponses au problème.

Or ici le choix n'est pas difficile. Si, par exemple, nous avons partagé le diamètre et la demi-circonférence en 180 parties égales, nous aurons, d'une part, des parallèles équidistantes et, d'autre part, des parallèles d'autant plus serrées qu'elles sont plus éloignées du centre. Il est clair que, en déterminant la corde par un point pris au hasard sur le plan et non sur telle ou telle ligne, ce point aura, en vertu même des hypothèses de Bertrand, d'égales chances de tomber dans une quelconque des premières bandes, tandis qu'il en aura d'inégales de tomber dans les diverses bandes de l'autre division. Il en serait de même si l'on jetait au hasard sur le plan une droite de la direction voulue. Il n'est donc pas douteux que la seconde méthode proposée doive être écartée.

Si, au lieu de ne considérer qu'une direction, on considérait toute une série de parallèles faisant le tour du cadran et formant entre elles des angles successifs de 1°, on obtiendrait deux réseaux recouvrant le cercle, l'un homogène et l'autre à mailles plus serrées vers la circonférence que vers le centre. Le premier seul peut mesurer la probabilité de chute fortuite d'une droite dans une région ou dans l'autre. Nous pouvons dès maintenant affirmer que $\frac{1}{2}$ est la probabilité pour qu'une corde dépasse le côté du triangle équilatéral, et qu'on devra trouver cette mesure toutes les fois qu'on adoptera un mode de tracé conduisant à un réseau homogène. Il nous reste à confirmer cette affirmation.

Voici un cas qui nous a fort embarrassé avant que nous n'eussions reconnu le principe des réseaux homogènes : c'est le second de Bertrand. On mène une corde quelconque d'un point pris sur la circonférence. Comme le dit justement Bertrand, le choix du point n'importe pas.

« Si l'on trace, continue-t-il, les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent également la recevoir la dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$ (1). »

(1) *Calcul des probabilités*, p. 5.

Au point de vue où nous nous sommes placé, nous ne dirons pas qu'elle *semble,* mais qu'elle *est.*

Rapproché de celui du premier cas, ce résultat surprend, car le fait de passer par un point d'une circonférence est essentiel à toute corde, et le choix du point est incontestablement sans influence sur la probabilité. D'autre part, on applique bien les règles du hasard au choix d'une corde passant par ce point. Mais cherchons à quel réseau répond cette construction, et pour cela répétons-la en prenant successivement toutes les extrémités d'arcs de 1° comptés successivement à partir du point primitif. On obtient ainsi *identiquement* le même réseau que dans le cas des parallèles passant par des points équidistants sur la circonférence : c'est dire qu'il n'est pas homogène et doit conduire en effet au rapport $\frac{1}{3}$.

M. de Montessus (et la chose est très intéressante) a d'ailleurs étudié le problème dans le cas le plus général : une corde quelconque menée d'un point quelconque du plan. Il semble bien qu'il n'y ait là aucune détermination spéciale. Aussi trouve-t-il la probabilité $\frac{1}{2}$.

On se rend du reste aisément compte que la formule conduit à un réseau qui, à la limite, est homogène, car on a des points uniformément répartis sur tout le plan et servant de centres à autant de roses des vents. Cela ne donne pas l'homogénéité, il est vrai, entre tous les éléments du réseau; mais, au fur et à mesure que les points d'irradiation et que les rayons eux-mêmes se multiplient, le champ de l'hétérogénéité se réduit au delà de toute limite.

Ainsi donc l'infini et le continu troublent bien les problèmes de probabilité, mais beaucoup moins que ne le prétend Bertrand. En ce qui concerne particulièrement le continu, il suffit d'en poser l'homogénéité, comme le fait Bertrand lui-même, pour qu'aussitôt toute indétermination disparaisse.

[C2h]

DU CALCUL EXPLICITE DES INTÉGRALES DÉFINIES DU TYPE

$$H_q = \int_0^\pi z^q \sin jz\,dz, \qquad J_q = \int_0^\pi z^q \cos jz\,dz,$$

AVEC QUELQUES APPLICATIONS A LA RECHERCHE DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

Par M. E. ESTANAVE.

Les intégrales dont il va être question se rencontrent dans le développement des fonctions en séries trigonométriques.

Dans les expressions de H_q et J_q, q et j désignent des nombres entiers. En appliquant la méthode de l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} H_m &= \int_0^\pi z^m \sin jz\,dz \\ &= \left(-\frac{1}{j} z^m \cos jz\right)_0^\pi + \frac{m}{j}\int_0^\pi z^{m-1}\cos jz\,dz; \end{aligned}$$

de même

$$J_n = \int_0^\pi z^n \cos jz\,dz = \left(\frac{1}{j} z^n \sin jz\right)_0^\pi - \frac{n}{j}\int_0^\pi z^{n-1}\sin jz\,dz;$$

ou encore

$$\begin{aligned} H_m &= (-1)^{j+1}\frac{\pi^m}{j} + \frac{m}{j} J_{m-1}, \\ J_n &= -\frac{n}{j} H_{n-1}; \end{aligned}$$

ce sont les formules de récurrence.

On a

$$H_1 = (-1)^{j+1}\frac{\pi}{j}, \qquad J_1 = -\frac{2}{j^2} \qquad \text{(pour } j \text{ impair seulement)},$$

car J_1 est nul pour j pair. On peut écrire

$$J_1 = -[1 + (-1)^{j+1}]\frac{1}{j^2}.$$

Nous allons d'abord chercher à exprimer H_m en fonction de H_1 et de J_1, qui viennent d'être calculés.

On a les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll|l} H_1 & = (-1)^{j+1}\dfrac{\pi}{j}, & J_1 = -[1+(-1)^{j+1}]\dfrac{1}{j^2}, \\ H_2 & = \pi H_1 + \dfrac{2}{j} J_1, & J_2 = -\dfrac{2}{j} H_1, \\ H_3 & = \pi^2 H_1 + \dfrac{3}{j} J_2, & J_3 = -\dfrac{3}{j} H_2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_m & = \pi^{m-1} H_1 + \dfrac{m}{j} J_{m-1}. & J_n = -\dfrac{n}{j} H_{n-1}. \end{array}\right.$$

Le calcul direct permet de reconnaître que les intégrales H_p et J_q se divisent chacune en deux catégories, suivant que p et q sont pairs ou impairs.

Occupons-nous des intégrales H_p. En posant $\frac{1}{j} = \lambda$, on a

$$\begin{aligned}
H_2 &= \pi\ H_1 + 2\lambda J_1,\\
H_3 &= \pi^2 H_1 - 2.3\lambda^2 H_1,\\
H_4 &= \pi^3 H_1 - 3.4\lambda^2\pi\ H_1 - 2.3.4\lambda^3 J_1,\\
H_5 &= \pi^4 H_1 - 5.4\lambda^2\pi^2 H_1 + 2.3.4.5\lambda^4 H_1,\\
H_6 &= \pi^5 H_1 - 5.6\lambda^2\pi^3 H_1 + 3.4.5.6\lambda^4\pi\ H_1 + 2.3.4.5.6\lambda^5 J_1,\\
H_7 &= \pi^6 H_1 - 6.7\lambda^2\pi^4 H_1 + 4.5.6.7\pi^2\lambda^4 H_1 - 2.3.4.5.6.7\lambda^6 H_1,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On aperçoit la loi de formation des H_{2p} et des H_{2p+1}. Nous remarquons, en effet, que H_{2p} est un polynome homogène de degré $2p-1$ en π et λ, dont les puissances de π ont même parité et dont tous les coefficients, sauf le dernier, contiennent H_1. Mettons ce terme en J_1 à part, il a pour coefficient $2p!$ Les coefficients numériques des autres termes sont $\frac{2p!}{(n+1)!}$, n étant l'exposant de π dans le terme considéré. Quant aux signes, en faisant abstraction du terme en J_1 et supposant les H ordonnées suivant les puissances décroissantes de π, il sont alternativement positifs et négatifs, le premier étant toujours positif. Les signes des coefficients du terme en J_1 sont alternés quand on passe de H_{2p} à H_{2p+2}. Ces considérations, qui sont évidentes pour $p=1$, $p=2$, $p=3$, ..., vont nous permettre, en supposant la loi vraie pour p, d'écrire la formule

$$H_{2p}=(-1)^{p-1}2p!\,\lambda^{2p-1}J_1+H_1\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p-q}\pi^{2q-1}\lambda^{2(p-q)}\frac{2p!}{2q!}.$$

Nous pouvons démontrer que cette loi est générale en montrant que l'on a

$$H_{2p+2}=(-1)^p(2p+2)!\,\lambda^{2p+1}J_1$$
$$+H_1\sum_{q=1}^{q=p+1}(-1)^{p+1-q}\pi^{2q-1}\lambda^{2(p+1-q)}\frac{(2p+2)!}{2q!},$$

formule obtenue en changeant p en $p+1$. En effet, si l'on multiplie la première par $(2p+1)(2p+2)\lambda^2$ et qu'on ajoute à la seconde, on a

$$(2)\qquad (2p+1)(2p+2)\lambda^2 H_{2p}+H_{2p+2}=\pi^{2p+1}H_1,$$

car le symbole $\sum\limits_{q=1}^{q=p+1}$ peut se dédoubler en deux parties : l'une où q prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots, p$ et l'autre $q=p+1$.

Or, la relation (1) résulte des formules de récurrence. Si, en effet, on y suppose

$$m = 2p + 2, \qquad n = 2p + 1,$$

on a

$$H_{2p+2} = \pi^{2p+1} H_1 + (2p + 2)\lambda J_{2p+1}.$$

Or

$$J_{2p+1} = -(2p + 1)\lambda H_{2p};$$

en remplaçant, on a la relation (2) ci-dessus; ce qui établit que la formule trouvée pour H_{2p} est générale.

On établirait pareillement la formule qui donne H_{2p+1} :

$$H_{2p+1} = H_1 \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{p-q} \pi^{2q} \lambda^{2(p-q)} \frac{(2p+1)!}{(2q+1)!}.$$

En la supposant vraie pour p et démontrant qu'elle est vraie pour $p+1$, on aurait à montrer pour cela que

$$(2p+2)(2p+3)\lambda^2 H_{2p+1} + H_{2p+3} = \pi^{2p+2} H_1,$$

relation qui résulte encore des formules de récurrence.

Transformons maintenant les formules qui donnent H_{2p} et H_{2p+1}; pour cela, remplaçons, dans H_{2p+1}, H_1 par la valeur calculée, ainsi que λ. Il vient

$$H_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{p+j+1-q} \frac{(j\pi)^{2q+1}}{(2q+1)!}.$$

Si nous considérons le développement limité qui se trouve sous le signe $\sum$, nous reconnaissons qu'il peut s'écrire

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{n-q} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

en posant $n = p + j + 1$ et $j\pi = x$.

Or, ceci est le développement de $(-1)^n \sin x$ suivant les puissances de x, limité au terme en x^{2p+1}. Désignons par le symbole $[\sin x]_{2p+1}$ le développement de $\sin x$ limité au terme en x^{2p+1}. Alors, avec ces notations, H_{2p+1} s'écrit

$$H_{2p+1} = (-1)^{p+j+1}\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}}[\sin j\pi]_{2p+1}.$$

Un calcul semblable conduit à l'expression de H_{2p},

$$H_{2p} = \frac{2p!}{j^{2p+1}}\left\{(-1)^p + (-1)^{p+j+1}[\cos j\pi]_{2p}\right\}.$$

De même l'on a

$$J_{2p} = (-1)^{p+j+1}\frac{2p!}{j^{2p+1}}[\sin j\pi]_{2p-1},$$

$$J_{2p+1} = -\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}}\left\{(-1)^p + (-1)^{p+j+1}[\cos j\pi]_{2p}\right\};$$

ce sont les formules qui permettront de calculer H_m et J_n.

Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^\pi z^{2p+1}\sin jz\,dz = (-1)^{p+j+1}\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}}[\sin j\pi]_{2p+1},$$

$$\int_0^\pi z^{2p}\quad\sin jz\,dz = \frac{2p!}{j^{2p+1}}\left\{(-1)^p + (-1)^{p+j+1}[\cos j\pi]_{2p}\right\},$$

$$\int_0^\pi z^{2p}\quad\cos jz\,dz = (-1)^{p+j+1}\frac{2p!}{j^{2p+1}}[\sin j\pi]_{2p-1},$$

$$\int_0^\pi z^{2p+1}\cos jz\,dz = -\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}}\left\{(-1)^p + (-1)^{p+j+1}[\cos j\pi]_{2p}\right\}.$$

On trouve dans les *Nouvelles Tables d'intégrales définies* de Bierens de Haan (Table 218) deux cas particuliers de ces formules, cas relatifs à $p = 0$ et $p = 1$.

Applications. — Nous pouvons nous servir de ces formules pour établir des développements en série. Si, dans la première, on fait $p = 0$, on a

$$\int_0^\pi z \sin jz\, dz = \frac{(-1)^{j+1}\pi}{j};$$

par suite

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z}{2} \sin jz\, dz = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}.$$

Or, si l'on considère la fonction $\frac{z}{2}$ développée en série trigonométrique

$$\frac{z}{2} = A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + \ldots + A_j \sin jz + \ldots;$$

si l'on multiplie les deux membres par $\sin jz\, dz$, et si l'on intègre de 0 à π, on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z}{2} \sin jz\, dz;$$

par suite

$$A_j = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}.$$

On a donc, en donnant à j les valeurs entières $1, 2, 3, \ldots$,

$$\frac{z}{2} = \sin z - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \frac{\sin 4z}{4} + \ldots$$
$$+ (-1)^{j+1}\frac{\sin jz}{j} + \ldots,$$

développement connu, que nous retrouvons ici pour la vérification des formules établies.

De même, si dans la troisième intégrale on fait $p = 1$, on a

$$\int_0^\pi z^2 \cos jz\, dz = (-1)^j \frac{2\pi}{j^2}$$

et, par suite,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z^2}{4}\cos jz\,dz = \frac{(-1)^j}{j^2}.$$

Si l'on considère la fonction $\frac{z^2}{4}$ développée en série trigonométrique

$$\frac{z^2}{4} = A_0 + A_1\cos z + A_2\cos 2z + A_3\cos 3z + \ldots,$$

on a, d'après la méthode de Fourier,

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z^2}{4}\cos jz\,dz = \frac{(-1)^j}{j^2};$$

d'où

$$\frac{z^2}{4} = A_0 - \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 2z}{2^2} - \frac{\cos 3z}{3^2} + \ldots.$$

Pour déterminer A_0, on peut multiplier les deux membres par dz et intégrer de o à π; on a

$$A_0 = \frac{\pi^2}{12},$$

d'où le développement connu

$$\frac{z^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 2z}{2^2} - \frac{\cos 3z}{3^2} + \ldots.$$

De même, si dans la quatrième intégrale nous faisons $p = 0$, nous aurons

$$\int_0^\pi z\cos jz\,dz = -\frac{1}{j^2}[1 + (-1)^{j+1}].$$

Or, considérons le développement

$$z = A_0 + A_1\cos z + A_2\cos 2z + \ldots + A_j\cos jz + \ldots,$$

on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi z\cos jz\,dz = -\frac{2}{\pi j^2}[1 + (-1)^{j+1}],$$

ce qui conduit au développement

$$\frac{\pi z}{4} = A_0 - \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos(2j+1)z.$$

Pour déterminer la constante A_0, multiplions les deux membres par dz et intégrons de o à π, on a

$$A_0 = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi z}{4} = \cos z + \frac{1}{3^2}\cos 3z + \frac{1}{5^2}\cos 5z + \ldots.$$

En considérant la deuxième intégrale pour $p = 1$, on a

$$\int_0^{\pi} z^2 \sin jz\, dz = \frac{2}{j^3}\left[-1 + (-1)^j\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{2}\right)\right].$$

Or, si l'on prend

$$z^2 = A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + \ldots + A_j \sin jz + \ldots,$$

on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z^2 \sin jz\, dz = \frac{4}{\pi j^3}\left[-1 + (-1)^j\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{2}\right)\right].$$

On est ainsi conduit, en donnant à j les valeurs 1, 2, 3, ..., à la formule

$$z^2 = -\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin z}{1^3} + \frac{\sin 3z}{3^3} + \ldots\right) + 2\pi\left(\frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \ldots\right)$$

ou, en remplaçant la deuxième série par sa valeur, à

$$\frac{\sin z}{1^3} + \frac{\sin 3z}{3^3} + \frac{\sin 5z}{5^3} + \ldots = \frac{\pi z(\pi - z)}{2^3},$$

résultat connu.

Nous avons ainsi, pour la vérification des calculs, retrouvé certains résultats connus, en donnant à p des valeurs particulières.

[B10a]

NOTE SUR L'ÉQUATION EN s;

PAR M. J. S.

Considérons la forme quadratique à n variables

$$U + sV; \tag{1}$$

$$U = (\Sigma a_i x_i)^2 \qquad \text{(notation connue)},$$
$$V = \Sigma x_i^2.$$

Soit Δ le discriminant de la forme (1).

Δ se déduit du discriminant de U en remplaçant a_{ii} par $a_{ii} + s$.

Soient A_{ik} le mineur de Δ relatif à l'élément a_{ik}; R le déterminant réciproque de Δ, c'est-à-dire ayant pour éléments les mineurs A_{ik} de Δ.

On a la relation

$$A_\alpha A_\beta - A_{\alpha\beta}^2 = \Delta \times \Delta_{\alpha\beta},$$

en écrivant A_α au lieu de $A_{\alpha\alpha}$ pour abréger. $\Delta_{\alpha\beta}$ représentant le deuxième mineur obtenu en supprimant les lignes et les colonnes de rangs α et β.

La dérivée Δ' de Δ par rapport à s a pour valeur ΣA_α. On a donc les deux relations

$$\Sigma A_\alpha^2 + 2\Sigma A_\alpha A_\beta = \Delta'^2,$$
$$\Sigma A_\alpha A_\beta - \Sigma A_{\alpha\beta}^2 = \Delta \times \Sigma \Delta'_{\alpha\beta}.$$

Éliminons $\Sigma A_\alpha A_\beta$, on a

$$\begin{aligned}\Sigma A_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta}^2 &= \Delta'^2 - 2\Delta\Sigma\Delta_{\alpha\beta},\\ &= \Delta'^2 + \Delta\Delta''.\end{aligned}$$

On obtient la relation

$$\Delta'^2 + \Delta\Delta'' = \Sigma A_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta}^2.$$

Parmi les conséquences immédiates est la suivante :

Théorème. — *Une racine multiple de* $\Delta = 0$ *annule tous les mineurs d'ordre* $n - 1$.

Remarque. — L'équation $R = 0$ est l'équation tangentielle de $U + sV = 0$ dans l'espace à n dimensions.

[D3cα]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

Par M. V. JAMET.

Dans un article paru au mois de novembre 1896, M. Fabry, voulant bien rappeler la tentative que j'avais faite pour amoindrir une petite difficulté relative à cette question, en donnait lui-même une solution simple et directe, à laquelle je me propose d'apporter, à mon tour, une nouvelle simplification. Il s'agit, au fond, d'établir que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz$$

a la même valeur, quand on la calcule en supposant que la variable décrit la demi-droite indéfinie dirigée suivant la partie positive de l'axe des x, que si on la calculait en faisant décrire à la variable une demi-droite indéfinie, issue de l'origine et dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les parties positives des deux axes de coordonnées.

Or, si l'on prend sur cette bissectrice un point M, qu'on le projette en A sur l'axe Ox et qu'on fasse

$$\mathrm{OA} = x, \qquad z = x + yi,$$

l'intégrale

$$\int e^{-z^2}\,dz, \tag{1}$$

calculée tout le long du segment AM, est égale à

$$ie^{-x^2}\int_0^x e^{y^2 - 2ixy}\,dy, \tag{2}$$

et comme l'intégrale (1), calculée tout le long du contour du triangle OAM, est nulle, tout revient à démontrer que l'expression (2) tend vers zéro, quand x est de plus en plus grand. Or celle-ci a un module inférieur à

$$e^{-x^2}\int_0^x e^{y^2}\,dy,$$

et le théorème sera démontré si l'on fait voir que cette dernière expression, égale d'ailleurs à

$$\left(1 - \frac{1}{e^{x^2}}\right) \times \frac{\displaystyle\int_0^x e^{y^2}\,dy}{e^{x^2} - 1},$$

tend vers zéro, quand x est de plus en plus grand. Mais le premier de nos deux facteurs ayant pour limite 1, il suffit d'établir, pour toute valeur positive de x, l'inégalité

$$\frac{\displaystyle\int^x e^{y^2}\,dy}{e^{x^2} - 1} < \frac{1}{x}.$$

ou l'inégalité équivalente

$$x\int_0^x e^{y^2}\,dy - e^{x^2} + 1 < 0.$$

A cet effet, je pose

$$f(x) = x\int_0^x e^{y^2}\,dy - e^{x^2} + 1$$

et j'en conclus

$$f'(x) = \int_0^x e^{y^2}\,dy - xe^{x^2},$$

$$f''(x) = -2x^2e^{x^2};$$

d'où il résulte que la fonction $f'(x)$, nulle avec x et décroissante quand x croît, est négative pour toute valeur positive de x. Or la fonction $f(x)$ est nulle avec x; mais elle décroît quand x augmente; donc elle est négative pour toute valeur positive de x. C. Q. F. D.

[O5h]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES;

PAR M. R. BRICARD.

---

1. On doit à M. Raffy un théorème élégant dont voici l'énoncé :

Considérons une surface ayant ses lignes de courbure planes dans un système. Si par chaque point de l'une de ces lignes de courbure on construit le plan osculateur à la seconde ligne de courbure passant en ce point, tous les plans ainsi obtenus sont parallèles à une même droite.

M. Raffy exprime ce résultat en disant qu'une famille de lignes de courbure planes est *cylindrée* (¹).

Je me propose, dans cette Note, de le rattacher à la proposition générale que voici :

Soient m *un point d'une surface* (S), [C] *et* [C'] *ses deux systèmes de lignes de courbure,* C *la ligne* [C] *et* C' *la ligne* [C'] *qui se croisent au point* m. *En chaque point de* C *menons le plan osculateur à la ligne* [C'] *qui passe par ce point : ces divers plans osculateurs enveloppent une surface développable* (T). *Soit* L *la génératrice de* (T) *qui correspond au point* m; *soient enfin* (T') *la développable analogue à* (T) *qu'on peut définir au moyen de la ligne de courbure* C', *et* L' *la génératrice de* (T') *qui correspond au point* m. *Je dis que les droites* L *et* L' *sont rectangulaires.*

2. Pour démontrer ce théorème, considérons la représentation sphérique de la surface (S).

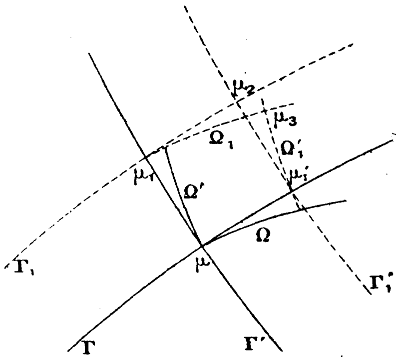
Désignons par (Σ) la sphère sur laquelle se fait la représentation, par Γ et Γ' les courbes tracées sur (Σ) qui sont les *images* des courbes C et C', par [Γ] le système des lignes Γ, par [Γ'] celui des lignes Γ'. [Γ] et [Γ'] forment deux systèmes de lignes orthogonales.

On sait que les lignes de courbure d'une surface et leurs images sphériques se correspondent par parallélisme des tangentes et, par suite, des plans osculateurs. Il résulte de là que si nous menons en chaque point de Γ le plan osculateur à la ligne [Γ'] qui passe en ce point, *la développable* (Θ) *enveloppée par ces plans a*

(¹) Voir *Comptes rendus*, 1899, p. 285. Tout récemment, M. Raffy a déterminé toutes les surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré (*Bulletin de la Soc. math. de France,* 1903, p. 77).

ses génératrices parallèles à celles de (T). En particulier, la génératrice Λ qui correspond au point μ, commun aux courbes Γ et Γ', est parallèle à L. Soient de même (Θ') la développable analogue définie au moyen de la courbe Γ' et Λ' celle de ses génératrices qui correspond au point μ : Λ' est parallèle à L'. *Nous avons à montrer que les droites Λ et Λ' sont rectangulaires.*

3. Traçons à cet effet la courbe Γ_1, appartenant au système $[\Gamma]$ et infiniment voisine de Γ. Soit de même Γ'_1 la courbe $[\Gamma']$ infiniment voisine de Γ' (*voir* la figure).



Désignons par μ, μ_1, μ_2, μ'_1 les sommets du quadrilatère infiniment petit formé par les courbes Γ, Γ', Γ_1, Γ'_1; traçons enfin les cercles Ω, Ω', Ω_1, Ω'_1, osculateurs aux courbes Γ, Γ', Γ_1, Γ'_1, respectivement aux points μ, μ', μ_1, μ'_1.

Prenons comme infiniment petit principal l'un des arcs $\mu\mu_1$, $\mu\mu'_1$, supposés de même ordre. Je dis que *l'angle sous lequel l'un quelconque des cercles* Ω, Ω_1 *est coupé par l'un quelconque des cercles* Ω', Ω'_1 *ne diffère d'un angle droit que d'un infiniment petit* *d'ordre supérieur au premier*. (L'un de ces angles, celui des cercles Ω et Ω', est rigoureusement droit.)

Considérons, par exemple, les cercles Ω_1 et Ω'_1, et soit μ_3 leur point de rencontre. Le cercle Ω_1 étant osculateur à Γ_1 en μ_1, les courbes Ω_1 et Γ_1 se confondent, dans les environs du point μ_1, aux infiniment petits du *troisième* ordre près. Il y a la même relation entre Ω'_1 et Γ'_1, dans les environs du point μ'_1. On a donc, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\text{arc } \mu_1 \mu_3 = \text{arc } \mu_1 \mu_2,$$
$$\text{arc } \mu'_1 \mu_3 = \text{arc } \mu'_1 \mu_2.$$

Cela posé, menons trois arcs de grands cercles, tangents, le premier à Ω_1 et Γ_1 en μ_1, le deuxième à Ω_1 en μ_3, le troisième à Γ_1 en μ_2. Soient θ et θ' les angles que font respectivement le deuxième et le troisième de ces arcs avec le premier. Si l'on appelle ρ le rayon sphérique du cercle Ω_1, c'est-à-dire le rayon de courbure sphérique de la courbe Γ_1 au point μ_1, on a

$$\text{arc } \mu_1 \mu_2 = \theta(\rho + \varepsilon),$$
$$\text{arc } \mu_1 \mu_3 = \theta'(\rho + \varepsilon'),$$

ε et ε' étant des infiniment petits. Les premiers membres étant égaux, on voit que l'on peut écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\theta = \theta'.$$

Autrement dit, l'arc de grand cercle tangent à Γ_1 en μ_2 et l'arc de grand cercle tangent à Ω_1 en μ_3 font entre eux un angle infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

On voit de même que l'arc de grand cercle tangent à Ω'_1 en μ_3 et l'arc de grand cercle tangent à Γ'_1 en μ_2

font entre eux un angle infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Il en résulte immédiatement que l'angle en μ_3 des cercles Ω_1 et Ω'_1 et l'angle en μ_2 des courbes Γ_1 et Γ'_1 sont égaux, au même ordre d'approximation : comme le second de ces angles est droit, notre proposition est établie, en ce qui concerne les cercles Ω_1 et Ω'_1.

On verrait de même (et plus simplement encore) que l'angle sous lequel se coupent les cercles Ω' et Ω_1, et celui sous lequel se coupent Ω et Ω'_1 sont droits, toujours en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Cela établi, appelons α et β les points communs aux cercles Ω et Ω_1, c'est-à-dire les points où le cercle Ω touche son enveloppe, quand on passe de la courbe Γ à la courbe Γ_1. Soient α' et β' les points analogues relatifs au cercle Ω'.

Par les points α et β on peut faire passer deux cercles (Ω et Ω_1) coupant orthogonalement deux cercles passant par α' et β' (Ω' et Ω'_1). Autrement dit (α, β) *et* (α', β') *sont les couples de points bases de deux faisceaux de cercles orthogonaux tracés sur la sphère* (Σ).

On sait que, dans ces conditions, les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont conjuguées par rapport à la sphère (Σ) et, par suite, *rectangulaires* [1].

Mais la première de ces droites est visiblement la droite commune aux plans osculateurs à Γ et Γ_1, respectivement aux points μ et μ_1. C'est donc la génératrice de contact du plan osculateur à Γ en μ, avec la surface (Θ), c'est-à-dire la droite désignée plus haut par Λ. De même, $\alpha'\beta'$ n'est autre que la droite Λ'. *Il est*

---

[1] Des deux couples (α, β), (α', β') l'un est nécessairement réel, l'autre imaginaire.

donc établi que Λ *et* Λ' *sont rectangulaires, ce qui démontre le théorème énoncé à la fin du n°* 1.

4. Montrons à présent comment, de cette proposition générale, on déduit immédiatement le théorème de M. Raffy.

Supposons, par exemple, que toutes les lignes de courbure [C] sont planes. Conservons toutes les notations employées dans le n° 1. Quel que soit le point m sur C, la droite désignée par L est invariable, puisque c'est la droite d'intersection du plan de C et du plan de C_1 qui est la ligne de courbure [C] infiniment voisine de C.

La droite L' est donc perpendiculaire à une droite fixe, c'est-à-dire parallèle à un plan fixe. Par suite, la surface développable (T') est à plan directeur : *c'est nécessairement un cylindre,* ce qui est le résultat de M. Raffy.

Enfin, si les lignes [C] et les lignes [C'] sont toutes planes, nous retrouvons le théorème bien connu, dû à O. Bonnet :

Quand une surface a ses lignes de courbure planes dans les deux systèmes, les plans des lignes de courbure, dans chaque système, enveloppent un cylindre; de plus, les deux cylindres ainsi mis en évidence ont leurs génératrices rectangulaires.

Note de la Rédaction. — La Rédaction recevrait et insérerait avec plaisir une démonstration analytique du théorème établi géométriquement dans la Note précédente.

CORRESPONDANCE.

M. **de Saint-Germain.** — A propos de l'intéressant problème de Mécanique traité par M. Andoyer dans le numéro de juin des *Nouvelles Annales*, je voudrais faire remarquer avec quelle facilité les équations générales de M. Appell conduiraient aux équations du mouvement.

Conservons les notations de M. Andoyer et reportons-nous aux résultats donnés par M. Appell dans le 1er fascicule du *Journal de Liouville* pour 1900 : les quantités désignées par P, Q, R sont : $-\theta'$, o, o et la partie utile de la fonction $2S$ (énergie des accélérations) est

$$\begin{aligned}2S = {} & m[x''^2 + (R-\rho)^2\theta''^2] \\ & + A(p'^2 + q'^2 + r'^2) + 2A\theta'(rq' - qr') + \ldots.\end{aligned}$$

Pour que la sphère ne glisse pas sur le cylindre, on doit avoir

$$x' + q\rho = 0, \qquad (R-\rho)\theta' - p\rho = 0;$$

tirant de là p, q, p', q' et posant $r = \lambda'$, on aura

$$\begin{aligned}2S = {} & m[x''^2 + (R-\rho)^2\theta''^2] \\ & + A\left(\frac{(R-\rho)^2}{\rho^2}\theta''^2 + \frac{x''^2}{\rho^2} + \lambda''^2\right) \\ & + \frac{2A\theta'}{\rho}(x'\lambda'' - \lambda'x'') + \ldots.\end{aligned}$$

Comme A est égal à $\frac{2}{5}m\rho^2$ et le travail virtuel du poids à

$$\delta U = mg[-\cos\beta\,\delta x + (R-\rho)\sin\beta\sin\theta\,\delta\theta],$$

les équations de M. Appell deviennent

$$\frac{\partial S}{\partial x''} \equiv \frac{7}{5}mx'' - \frac{2}{5}m\rho\lambda'\theta' = -mg\cos\beta,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} \equiv \frac{7}{5}m(R-\rho)^2\theta'' = mg(R-\rho)\sin\beta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} \equiv A\left(\lambda'' + \frac{x'\theta'}{\rho}\right) = 0.$$

En remettant r pour λ' et faisant des simplifications évidentes, on retrouve les équations excellemment étudiées par M. Andoyer. Nous n'avons pas, il est vrai, la réaction normale N du cylindre sur la sphère : mais remarquons que le centre de gravité se meut sur un cylindre de rayon $R - \rho$.

Soient

v sa vitesse à l'instant t;
i l'angle qu'elle fait avec Ox;
R_1 le rayon de courbure de la section normale passant par v.

Une des équations intrinsèques du mouvement sur une surface donne

$$\frac{mv^2}{R_1} = N + mg\sin\beta\cos\theta.$$

On a d'ailleurs, eu égard à la formule d'Euler,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin^2 i}{R - \rho},$$

$$v\sin i = (R - \rho)\theta';$$

il en résulte

$$N = m(R - \rho)\theta'^2 - mg\sin\beta\cos\theta :$$

c'est précisément la valeur (2) de $-Z$.

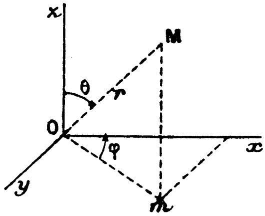
Si l'on avait pu regarder les candidats à l'Agrégation comme familiarisés avec les équations de M. Appell et ses résultats principaux, peut-être le problème n'eût pas paru un peu difficile.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Lille

Épreuve écrite. — *Étudier l'effet d'un système de percussions sur un solide mobile autour d'un axe fixe. Théorie du centre de percussion.*

Problème. — *Un point matériel libre est défini par ses coordonnées polaires* (r, θ, φ). *Il est sollicité par une force*



dérivant de la fonction de force U

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta},$$

les fonctions f, g, h *ne dépendant chacune que de la variable mise en évidence.*

1° *Former l'expression de la force vive du point et les équations de Lagrange relatives aux paramètres* r, θ, φ;

2° *Montrer que ces équations s'intègrent par quadratures.*

Solution.

L'équation de Lagrange relative à φ donne immédiatement l'intégrale première

(1) $$r^4 \sin^4\theta . \varphi'^2 = 2h(\varphi) + A.$$

En tenant compte de la valeur de φ'^2 fournie par cette équation, l'équation de Lagrange relative à θ donne

(2) $$r^4 . \theta'^2 = 2g(\theta) - \frac{A}{\sin^2\theta} + B.$$

Enfin l'équation des forces vives s'écrit, eu égard à (1) et à (2),

(3) $$r'^2 = 2f(r) - \frac{B}{r^2} + C,$$

A, B, C désignent des constantes. (3) donne r en fonction de t, (2) donne θ et (1) donne φ, et cela au moyen de trois quadratures. (Novembre 1901.)

Épreuve écrite. — I. *Distribution des accélérations dans le cas du mouvement général d'un solide. Application au cas des mouvements parallèles à un plan.*

II. *Les extrémités d'une barre* AB *glissent sans frottement : l'une* A *sur une droite verticale* Oz, *l'autre* B *sur un plan horizontal* xOy. *Cette barre, de longueur* l, *est homogène et pesante; sa densité est l'unité. Au point* B *est appliquée une force dirigée suivant* $\overline{BO}$ *et proportionnelle à la distance* $\overline{BO}$.

1° *En désignant par* θ *et* φ *les angles* $\widehat{OAB}$ *et* $\widehat{xOB}$, *on formera les équations canoniques du mouvement de la barre relatives à ces paramètres;*

2° *On exprimera en fonction de* θ, *par des quadratures, le temps et l'angle* φ *(conditions initiales quelconques)*;

3° *On formera et intégrera l'équation de Jacobi associée à la fonction d'Hamilton rencontrée au* 1°. *On reconnaîtra l'identité des équations finies du mouvement obtenues par la méthode de Jacobi avec les résultats obtenus au* 2°.

(Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — *Pendule sphérique.*

Problème. — *Un losange formé de quatre tiges pesantes et homogènes, de poids* p *et de longueur* a, *articulées à leurs extrémités, a un sommet fixe en* O ; *le sommet opposé* C *est assujetti à glisser sur la verticale de* O. *Au sommet* C *est appliqué un poids* P.

Le plan du losange est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale OC.

1° *Mouvement du losange dans son plan;*

2° *Position d'équilibre stable;*

3° *Vitesse de rotation pour laquelle, dans cette position d'équilibre, l'écartement des sommets* A *et* B *est égal à* a;

4° *Durée des petites oscillations du système supposé légèrement dérangé de sa position d'équilibre stable dans cette dernière hypothèse.*

Solution.

1° Si θ est l'angle d'une des barres avec OC, le temps est donné en fonction de θ par une quadrature hyperelliptique

$$t = \int \sqrt{\frac{\frac{pa^2}{3g}(5 - 3\cos 2\theta) + \frac{Pa^2}{g} 2\sin^2\theta}{2a(P+2p)\cos\theta + \frac{pa^2\omega^2}{3g}\sin^2\theta + h}}\, d\theta;$$

2° $\cos\theta = \dfrac{3g(P+2p)}{2a\omega^2 p}$ si la valeur de $\cos\theta$ est plus petite que 1; sinon la position d'équilibre stable est $\theta = 0$;

3° $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}\, g(P+2p)}{ap}$;

4° $T = \pi\sqrt{\dfrac{a(2P+5p)}{g(P+2p)}}$. (Novembre 1902.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Grenoble.

Composition. — *Résolution du système suivant*

$$a_i x + b_i y = n_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \mu),$$

par la méthode des moindres carrés. Principe de la méthode.

Calcul des erreurs moyennes des valeurs déterminées pour x et pour y.

Épreuve pratique. — *Calcul de la longitude et de la latitude héliocentriques de Mars pour le* 1^{er} *mai* 1888, *à midi* (*T. moyen de Paris*).

Solution.

On a, pour les éléments de Mars en 1888 :

$$e = 0{,}0932611, \qquad \Omega = 48^\circ.23'.53'',$$
$$n = 1886'',5184, \qquad i = 1.51.\ 2,$$
$$\varpi = 333.17.54.$$

Enfin, pour le 1er janvier 1850, à midi (T. moyen de Paris), on avait, pour la longitude moyenne de la planète dans son orbite,

$$l_0 = 83°40'31''. \qquad \text{(Juillet 1902.)}$$

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Définition du jour sidéral. Montrer qu'il n'est pas constant et expliquer les causes de sa variation.*

II. *On a fait une observation d'une planète nouvelle, ce qui en a donné une direction géocentrique définie par sa longitude* λ *et sa latitude* β. *Cette direction perce le plan de l'orbite d'une autre planète d'éléments connus en un point* P.

On voudrait savoir si l'observation faite se rapporte à la planète d'éléments connus :

1° *Démontrer qu'il faut pour cela que l'on ait*

$$\frac{q\cos^2\frac{1}{2}E}{\cos^2\frac{1}{2}(u-\pi+\Omega)} = \frac{R\sin\chi}{\sin z}.$$

2° *Donner les formules qui serviront à calculer effectivement les angles* u, z *et* χ *en fonction des données* λ *et* β *et des éléments de la planète connue.*

Dans ces expressions, on a désigné par

π *la longitude du périhélie de l'orbite connue;*
Ω *la longitude du nœud ascendant de l'orbite connue;*
q *la distance du périhélie de l'orbite connue;*
u *l'argument de la latitude, sur l'orbite connue du rayon vecteur qui joint le Soleil au point* P;
E *l'anomalie excentrique du même rayon vecteur;*
R *le rayon vecteur de la Terre à l'époque de l'observation;*
z *et* χ *respectivement, l'angle en* P *et le supplément de l'angle à la Terre dans le triangle ayant pour sommets le Soleil, la Terre et le point* P.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *D'après Lalande, les coordonnées* *moyennes de l'étoile α Bouvier étaient en* 1800,0 :

Ascension droite........ $\alpha = 14^h 6^m 31^s,20$
Distance polaire........ $p = 69^\circ 46' 12'',3$

On demande les coordonnées moyennes de cette étoile en 1900,0.

SOLUTION.

On a, d'après Struve, pour 1850,0 :

	En temps.		En arc.
m........	$3^s,07230$	n.........	$20'',0650$

m et n désignant les constantes des formules de précession.

(Novembre 1901.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir la relation qui lie l'anomalie excentrique u à l'anomalie moyenne ρ dans le mouvement elliptique. Résoudre l'équation obtenue, ou équation de Képler. Exprimer u en fonction de ρ et de l'excentricité e.*

II. *De l'interpolation. But et moyens. Formule de Newton et formules usuelles qui en dérivent.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On détermine la hauteur*

$$h = 42^\circ 21' 36'',5$$

de l'étoile Aldébaran à $7^h 28^m 35^s,0$ en temps sidéral.

Les coordonnées équatoriales d'Aldébaran étant

$$\text{Æ} = 4^h 29^m 16^s,20, \qquad \text{Ⓓ} = +16^\circ 16' 52'',8.$$

On demande : 1° de calculer la latitude du lieu d'observation; 2° l'erreur qu'affecte la latitude si l'erreur de la détermination de l'angle horaire $= +1^s,0$ et si $\delta h = +4'',0$.

(Juillet 1901.)

Grenoble.

Composition. — *Théorème de Legendre. Résolution d'un triangle géodésique. Mesure d'un arc de méridien et détermination de l'amplitude de l'arc mesuré.*

Épreuve pratique. — *Détermination de la latitude* λ *d'un lieu à l'aide du temps* T *qui s'est écoulé entre le lever et le coucher d'une étoile de déclinaison* $\mathbb{D}$. *Calcul de l'azimut* A *du coucher de cette étoile.*

Influence sur la latitude λ *et sur l'azimut* A *d'une erreur* ε *dans l'évaluation de la durée* T.

Application numérique :

$$T = 9^h 10^m 30^s,97 \text{ sidérales}, \qquad \varepsilon = \pm 1^s,$$
$$\mathbb{D} = 19^\circ 45' 0'',8. \qquad \text{(Juillet 1901.)}$$

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Théorie des éclipses de Lune.*

II. *On considère un point* P *qui décrit une ellipse suivant la loi de Képler. Calculer, en fonction de l'anomalie vraie, les projections de la vitesse de* P *sur les deux axes de l'ellipse.*

Vérifier, à l'aide de ces expressions, la signification des constantes qui figurent dans les intégrales du mouvement et montrer que l'hodographe est une circonférence.

Exprimer les mêmes projections en fonction de l'anomalie excentrique de P; *en déduire la trajectoire de l'extrémité d'un segment dont l'origine est fixe, la direction parallèle à la vitesse* V *du point* P, *et la longueur* $\frac{r}{a}$V; r *désigne le rayon vecteur de* P *issu du foyer,* a *le demi-grand axe de l'ellipse que décrit ce point.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'heure sidérale à laquelle l'étoile* α *Aigle passe dans le premier vertical de Lille (c'est-à-dire dans le vertical perpendiculaire au méridien), et la distance zénithale de l'étoile à cet instant.*

Coordonnées de l'étoile :

Ascension droite.........	$19^h 45^m 54^s,20$
Déclinaison boréale......	$8° 36' 15'',0$

Latitude de Lille : $50° 38' 44''$. (Juillet 1901.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Résolution de l'équation de Képler; méthode des approximations successives; développements en série.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'ascension droite et la déclinaison d'un astre situé sur l'écliptique et ayant pour longitude* $1^h 25^m 30^s,6$.

Inclinaison de l'écliptique sur l'équateur : $23° 27' 8'',03$.

(Novembre 1901.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1903.

On considère deux surfaces du second ordre (P), (Q) définies en coordonnées rectangulaires par les équations

$$(P) \qquad y^2 - zx - a^2 = 0,$$

$$(Q) \qquad 2y^2 - x^2 - zx - ay = 0,$$

où a désigne une constante. Soit (C) la courbe d'intersection de ces deux surfaces.

I. Former les équations des projections orthogonales de cette courbe (C) sur le plan des xy et sur le plan des zx. Construire ces courbes.

II. Considérant, en particulier, la projection de (C) sur le plan des zx, on déterminera l'aire comprise entre l'axe des x, la branche supérieure de la courbe et les droites qui, dans ce plan, ont pour équations

$$x = a, \qquad x = a\sqrt{3}.$$

III. Soit M un point de (C); par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface (P) qui rencontrent la courbe (C) en deux points M_1 et M'_1, autres que M. Quel est le lieu (R) de la droite $M_1M'_1$ quand le point M décrit la courbe (C)? De quoi se composent les intersections de la surface (R) avec chacune des surfaces (P) et (Q)?

IV. Par le point M_1, précédemment défini, passe une génératrice de (P), autre que la droite M_1M; soit M_2 le point d'intersection, autre que M_1, de cette génératrice et de la courbe (C); par le point M_2 passe une génératrice de (P), autre que la droite M_2M_1; soit M_3 le point d'intersection, autre que M_2, de cette génératrice et de la courbe (C); on continue de la même façon, ... Démontrer que la ligne polygonale $MM_1M_2\ldots$ se ferme et qu'il en est de même de la ligne polygonale obtenue par la même construction en remplaçant simplement le point M_1 par le point M'_1.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1903.

Composition de Mathématiques spéciales.

On donne une sphère Σ de centre P et un paraboloïde Π dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2(x-h) = 0,$$

avec

$$h = -\frac{p-q}{4}.$$

Par le point P on mène un plan Q perpendiculaire à une génératrice rectiligne G du paraboloïde Π et rencontrant cette droite au point g. Soit Γ le cercle situé dans le plan Q, ayant pour centre le point g et coupant à angle droit la sphère Σ.

1° Trouver l'équation de la surface S engendrée par le cercle Γ quand la droite G décrit le paraboloïde Π.

2° L'équation de cette surface est de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)x+Ax^2+A'y^2$$
$$+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

les coefficients A, A', A'' étant liés par une relation.

3° Trouver toutes les droites qui peuvent être placées sur la surface S.

4° Montrer que la surface S admet dix familles de sections circulaires; les plans des cercles d'une même famille se coupent suivant une même droite.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1903).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites fixes D et D' non situées dans un même plan, un point fixe A sur D et un point fixe A' sur D'. Soient (S) une sphère dont le centre est situé sur D et qui passe par A, (S') une sphère dont le centre est situé sur D' et qui passe par A'.

1° Montrer qu'il existe deux sphères (S) tangentes à une sphère (S') supposée donnée.

2° Trouver les lieux géométriques des points de contact des sphères (S) et (S'), lorsqu'elles varient tout en restant tangentes.

3° Soit M le point de contact d'une sphère (S) avec une sphère (S'). Sur la ligne des centres de ces deux sphères on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM'=a$. Trouver le lieu du point M' lorsque les deux sphères varient.

4° Sur les droites D et D' on porte, à partir de A et A', respectivement, deux longueurs égales AP et A'P'. Trouver le lieu du centre de la sphère Σ tangente à D en P et à D' en P', lorsque P et P' décrivent respectivement D et D'.

Mathématiques spéciales.

On considère une droite fixe A et deux droites fixes B et B′ qui rencontrent A mais qui ne sont pas situées dans un même plan.

On sait que si l'on considère une surface du second ordre S qui passe par les trois droites A, B et B′, son centre C est situé dans le plan P parallèle aux deux droites B et B′ et équidistant de ces deux droites.

1° Lorsque le centre C décrit une droite dans le plan P, la surface S passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur B et B′.

2° Lorsque le point C décrit, dans le plan P, une courbe (Γ) de classe m, la surface S enveloppe une surface réglée Σ d'ordre $2m$ et, par chacune des trois droites A, B et B′, il passe m nappes de cette surface Σ.

Montrer que la surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B′ et en restant tangente à un cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.

Tout plan passant par A coupe alors cette surface en dehors de A, suivant une conique; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B′, soit à ces deux plans à la fois?

Nota. — Les candidats devront traiter le problème par la *Géométrie analytique* : il leur sera tenu compte des remarques géométriques.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère, avec les notations de Weierstrass, la fonction

$$x = \frac{C\,\sigma^3 u}{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u+a+b)},$$

où C est une constante et où a et b sont les affixes de deux points situés dans le parallélogramme des périodes

$$0, \quad 2\omega, \quad 2\omega', \quad 2\omega+2\omega'$$

ou sur les côtés de ce parallélogramme issus du point d'affixe O.

1° Décomposer cette fonction en éléments simples et examiner les différents cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs de a et b, en laissant de côté les déterminations de a et b pour lesquelles le dénominateur de x s'annulerait en même temps que u.

2° Exprimer, dans chacun de ces cas, la fonction x en fonction rationnelle de pu et de $p'u$.

3° On suppose que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont des quantités réelles et positives, et l'on considère en particulier la fonction

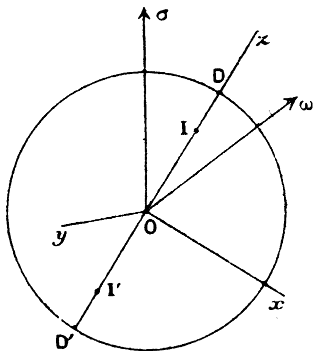
$$x = \frac{\sigma\omega.\sigma\omega'.\sigma(\omega+\omega')\sigma^3 u}{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')};$$

on désigne de plus par y la dérivée de cette fonction par rapport à u. Trouver la relation algébrique qui existe entre x et y, construire la courbe représentée par cette équation, et indiquer dans quels intervalles varie u lorsque le point (x, y) décrit les différentes branches de cette courbe. Quels sont les points multiples de cette courbe?

Mécanique rationnelle.

Une sphère solide homogène de masse m et de rayon a est mobile autour de son centre O supposé fixe. Dans la sphère est creusé un canal rectiligne, de section infiniment petite, suivant un diamètre DD'; deux insectes ayant chacun la même masse m que la sphère se trouvent dans ce canal en deux points I et I' symétriques par rapport au centre O. A l'instant initial $t=0$, la sphère est animée d'une rotation ω_0 autour d'un axe instantané donné et, à partir de cet instant, les insectes marchent dans le canal, suivant une loi donnée, en prenant appui sur ses parois et restant toujours symétriques par rapport au centre O. Trouver le mouvement du système, en réduisant les insectes à des points matériels.

On prendra, comme axes liés à la sphère, un axe Oz dirigé suivant le diamètre DD′ et deux autres diamètres Ox et Oy formant avec Oz un trièdre trirectangle; on appellera p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω de la sphère suivant les axes $Oxyz$; enfin, on désignera par z et $-z$ les



cotes des deux insectes, en supposant que z est une fonction donnée du temps $z = f(t)$.

On traitera, en particulier, les questions suivantes :

1° Soit $O\sigma$ le moment résultant des quantités de mouvement de tous les points du système par rapport au point O; étudier le mouvement du point σ dans l'espace absolu et par rapport aux axes $Oxyz$.

2° Montrer que p, q, r peuvent être exprimés en fonction de t par des quadratures.

3° Exprimer ensuite en fonction de t les angles d'Euler θ, φ, ψ, en choisissant convenablement les axes fixes.

4° Étudier, en particulier, le cas où l'axe de la rotation instantanée initiale de la sphère est dans le plan xOy.

5° Achever les calculs en supposant la rotation initiale quelconque, mais en imaginant que la loi du mouvement des insectes soit

$$z = ae^{-kt},$$

où k est une constante positive.

Quel est, dans cette hypothèse, le mouvement limite vers lequel tend le mouvement du système?

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1912.

(1901, p. 192.)

Étant donnés trois points fixes A_1, A_2, A_3 *et trois plans fixes* P_1, P_2, P_3, *trouver le lieu d'une droite* G *telle que les projections des points* A_1, A_2, A_3 *sur cette droite soient respectivement dans les plans* P_1, P_2, P_3.

[P. Appell (1).]

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

La méthode suivante peut donner l'équation tangentielle de la surface, débarrassée du facteur étranger à l'ombilicale; je montrerai seulement que la surface est de neuvième classe, par suite du neuvième ordre.

Rapportons la figure au trièdre des plans P, et, désignant par α, β, γ les cosinus des angles des axes, posons pour une direction (l, m, n)

$$\begin{aligned}
L &= l + \gamma m + \beta n,\\
M &= \gamma l + m + \alpha n,\\
N &= \beta l + \alpha m + n,\\
\Omega &= lL + mM + nN;
\end{aligned}$$

soient X, Y, Z des quantités liées à x, y, z comme L, M, N le sont à l, m, n. Le plan

$$ax + by + cz - d = 0$$

devant contenir une droite G, définissons cette droite en cou-

(1) Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900, p. 265.

pant le plan considéré par le plan

$$ux + vy + wz = 0,$$

et posons

$$(1) \qquad bw - cv = l, \qquad cu - aw = m, \qquad av - bu = n,$$

l, m, n étant ainsi les coefficients directeurs de la droite G.

Cette droite coupe le plan P_1 en un point M_1 dont les coordonnées sont données par les formules

$$x = 0, \qquad \frac{y}{w} = \frac{z}{-v} = \frac{d}{l},$$

et les coefficients directeurs de la droite A_1M_1 sont

$$lx_1, \quad ly_1 - dw, \quad lz_1 + dv,$$

l'indice 1 se rapportant aux coordonnées du point A_1; la condition de perpendicularité des droites A_1M_1 et G est

$$Llx_1 + M(ly_1 - dw) + N(lz_1 + dv) = 0$$

ou

$$l(Lx_1 + My_1 + Nz_1) = d(Mw - Nv),$$

ou encore

$$(2) \qquad l(lX_1 + mY_1 + nZ_1) = d(Mw - Nv).$$

On a de même les conditions

$$(3) \qquad m(lX_2 + mY_2 + nZ_2) = d(Nu - Lw),$$

$$(4) \qquad n(lX_3 + mY_3 + nZ_3) = d(Lv - Mu).$$

Il faut éliminer l, m, n, u, v, w entre les équations homogènes (1-4). L'élimination de u, v, w donne les trois équations homogènes en l, m, n

$$(5) \qquad al + bm + cn = 0,$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & al(lX_1 + mY_1 + nZ_1) + bm(lX_2 + \ldots) \\ & \qquad + cn(lX_3 + \ldots) + d\Omega = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & lL(lX_1 + mY_1 + nZ_1) + mM(lX_2 + \ldots) \\ & \qquad + nN(lX_3 + \ldots) \qquad = 0; \end{aligned} \right.$$

on obtient les deux dernières en ajoutant les équations (2-4) multipliées par a, b, c d'une part, par L, M, N d'autre part. Quand on élimine l, m, n, pour avoir l'équation tangentielle de la surface en coordonnées a, b, c, d, comme les équations sont des degrés 1, 2, 3 en l, m, n, les coefficients de l'équation (5) entrent au sixième degré dans le résultant, ceux de l'équation (6) y entrent au troisième degré, et la relation entre a, b, c, d est du neuvième degré. On la calculerait assez facilement.

La relation (6) montre que le cône directeur de la surface est du troisième ordre seulement; le plan de l'infini contient donc six droites G : *a priori* ce sont les tangentes à l'ombilicale aux points où elle est coupée par la trace du cône directeur sur le plan de l'infini, et l'hypothèse $\Omega(l, m, n) = 0$ introduite dans le calcul donne bien a, b, c proportionnels à L, M, N.

Le plan de l'infini étant ainsi un plan tangent sextuple, l'équation tangentielle de la surface renferme d au troisième degré seulement ; et, en effet, la seule des équations (5-7) qui contienne d est l'équation (6) dont les coefficients entrent au troisième degré dans l'équation tangentielle.

Chaque plan P contient trois droites G, que l'on obtient géométriquement comme tangentes communes à trois paraboles ; les plans P sont donc des plans tangents triples et l'équation tangentielle de la surface renferme chacune des quantités a, b, c, au sixième degré seulement.

1922.

(1902, p. 96.)

Tout octaèdre à faces triangulaires dont les douze arêtes sont tangentes à une quadrique, a ses diagonales concourantes, et, réciproquement, si un octaèdre a ses diagonales concourantes, ses douze arêtes sont tangentes à une quadrique.

En déduire le théorème suivant :

« *Étant données deux quadriques, il est en général impossible d'inscrire à l'une un octaèdre dont les arêtes sont tangentes à la seconde; si la construction est possible, elle* *l'est d'une infinité de manières, et l'octaèdre dépend alors d'un paramètre.* »

Il y a exception si les deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre : dans ce cas, l'octaèdre, quand sa construction est possible, dépend de trois paramètres.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Après avoir résolu (*Nouvelles Annales,* 1899, p. 72) le problème de l'octaèdre à diagonales concourantes circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre, j'avais posé la question de l'octaèdre inscrit à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre. M. Bricard obtient la réponse à cette question *en posant d'abord un fait fondamental.*

1. Soient AA′, BB′, CC′, les diagonales d'un octaèdre circonscrit à une quadrique. La quadrique étant tangente aux côtés des deux triangles CAB, C′AB, si les points de contact sont γ, α, β, α', β', les deux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ rencontrent AB en un même point qui est le conjugué de γ par rapport à A et B; les deux droites $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont donc dans un même plan et rencontrent par suite la diagonale CC′ en même point. Les cordes de contact pour les quatre couples de tangentes (AC, AC′), (BC, BC′), (A′C, A′C′), (B′C, B′C′) rencontrent donc en un même point la diagonale CC′; les points A, B, A′, B′ sont dès lors dans un même plan qui est le plan polaire du point considéré, et les diagonales AA′, BB′ se rencontrent. Donc.... La réciproque est évidente, un octaèdre à diagonales concourantes pouvant être transformé par homographie en un octaèdre régulier.

Si l'on se donne C et C′, les deux cônes de sommets C et C′ circonscrits à la quadrique se coupent suivant deux coniques. Les quatre points A, B, A′, B′ sont sur une même de ces deux coniques; les deux points C et C′ doivent être tels qu'il existe des contours quadrangulaires inscrits à l'une des deux coniques et circonscrits à la section de la quadrique par le plan de cette conique.

2. Considérons alors un octaèdre inscrit à une quadrique S' et dont les arêtes sont tangentes à une quadrique S; soit I le point de concours des diagonales. Le contour quadrangulaire ABA'B' étant inscrit à la section σ' de la quadrique S' par un plan, et circonscrit à la section σ de la quadrique S par ce même plan, le point I est un sommet du triangle conjugué commun aux deux coniques; de même....; *le point* I *est donc un sommet du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.*

Le problème est réduit à obtenir un trièdre IA, IB, IC, tel que le plan de chaque face coupe S' et S suivant deux coniques σ' et σ admettant des contours quadrangulaires de Poncelet, tel en outre que les arêtes IA et IB, par exemple, portent les diagonales du contour situé dans leur plan.

Les deux quadriques étant rapportées au tétraèdre conjugué commun, et leurs équations étant

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + \ldots = 0,$$

$$(S') \qquad a'x^2 + b'y^2 + \ldots = 0,$$

les plans $ux + vy + wz = 0$ qui les coupent suivant deux coniques ayant la propriété indiquée sont les plans tangents au cône

$$(\Sigma) \qquad (b'cd + c'bd - d'bc)\,u^2 + \ldots + \ldots = 0.$$

Le trièdre IA, IB, IC doit être circonscrit au cône et conjugué au cône

$$(\Sigma') \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

l'invariant Θ de ces deux cônes doit donc être nul, ce qui donne la condition

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} - \frac{3}{2}\frac{d'}{d} = 0;$$

par suite, les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S' = 0$ doivent vérifier la condition

$$(1) \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' - \frac{3}{2}\lambda''' = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

L'équation (Σ) se réduit à une identité si l'on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}, \qquad 2\frac{a'}{a} = \frac{d'}{d},$$

c'est-à-dire si les deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre et vérifient la condition (1); le trièdre est alors astreint seulement à rester conjugué au cône Σ'. On peut prendre deux sphères concentriques, de rayons R et $R\sqrt{2}$.

QUESTIONS.

1975. D'un point P du plan d'une parabole on abaisse les trois normales à la courbe dont les pieds sont A, B, C. Par chacun des pieds A, B, C on mène la droite symétrique respectivement de PA, PB, PC par rapport à la direction de l'axe de la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent en un point P' et que la projection de la distance PP' sur l'axe est constante. (E.-N. Barisien.)

1976. I et O sont les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC. On projette sur IO les points de contact du cercle I et des côtés du triangle : la somme algébrique des rayons projetants est nulle. (G. Fleuri.)

ERRATA.

Page 229, ligne 7 en remontant : r^2 doit être mis en facteur de la dernière fraction de la ligne précédente, qui se serait terminée par : $= 0$.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 8. *SUPPLÉMENT.* AOUT 1903.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Journal de l'École Polytechnique, 8ᵉ Cahier (2ᵉ série). *Maillet*, sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. — *Autonne*. Sur les substitutions crémoniennes de l'espace (1ᵉʳ Mémoire). — *Maillet*, Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. — *Ocagne* (*M. d'*). Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXVII, n° 1 à 6. — Sur les lignes de courbure de certaines surfaces; par M. *Blutel*. — Sur les groupes de Mathieu; par M. *de Séguier*. — Sur les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composés de polygones curvilignes; par M. *Zaremba*. — Sur l'habillage des surfaces; par M. *Servant*.

Sur les fonctions de *n* variables représentées par des séries de polynomes homogènes; par M. *Dulac* — Sur les intégrales de S. Lie; par M. *Saltykow*. — Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange; par M. *Saltykow*.

Atti della reale accademia dei Lincei, vol. XII, fascicule 13. — Ricerche gruppali relative alle equazioni della Dinamica; par M. *Fabini*. — Sul moto d'un sistema olonomi di corpi rigidi; par M. *Contarini*.

Le trasformazioni infinitesime applicate ad una forma differenziale di ordine; par M. *Ernesto Pascal*. — Ricerche gruppali sulle equazioni della Dinamica; par M. *Fabini*. — Sulle serie di funzioni analitiche; par M. *Severini*.

OUVRAGES RÉCENTS.

ANNUAIRE POUR L'AN 1903, publié par le *Bureau des Longitudes*, contenant les Notices suivantes : *Étoiles filantes et comètes*, par R. RADAU. — *Discours prononcés aux obsèques de M. Cornu;* par MM. BASSOT et POINCARÉ. — *Discours prononcés aux obsèques de M. Faye;* par MM. BOUQUET DE LA GRYE, JANSSEN, LŒWY, BASSOT, BACKHUYZEN. — *Science et Poésie;* par M. J. JANSSEN. — *Travaux de l'Observatoire du mont Blanc;* par M. J. JANSSEN. In-18 de VIII-808 pages (Paris, Gauthier-Villars).

ABEL (Niels-Henrik). — *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. In-4, avec un portrait d'Abel, 1 planche et six fac-similés; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Pour célébrer cette solennité, le Conseil académique a, dans sa séance du 22 février 1902, nommé un comité de Professeurs de l'Université, sous la présidence du professeur Fridtjof Nansen. Ce Comité décida dans sa première séance, le 3 mars, de publier comme Mémorial au centenaire ce qui nous reste des lettres d'Abel. Ce travail a été confié à deux des membres du Comité, L. Sylow et Elling Holst. Le premier s'est chargé d'exposer la marche des études et des travaux d'Abel, en s'aidant de ses lettres et de ses manuscrits; le second d'écrire, comme Introduction au Livre, une biographie d'Abel servant de commentaire à ses lettres. Au cours du travail, on a en outre découvert toute une série de documents officiels concernant Abel; cette collection a été insérée dans le Mémorial par les soins de M. Carl Störmer, chargé de cours à l'Université et secrétaire du Comité, qui, à cette occasion, est entré dans le comité de rédaction.

Ces Tables sont précédées d'une Instruction divisée en trois Parties. Les deux premières traitent de la disposition et des usages des Tables de logarithmes, des nombres et des lignes trigonométriques. Dans la troisième Partie on a fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des logarithmes à *sept décimales*, et l'on a indiqué quelles sont les lignes trigonométriques qui conduisent aux valeurs les plus approchées des angles que l'on cherche. Il a été ajouté des Tableaux à l'aide desquels on peut effectuer les calculs trigonométriques avec un très grand degré d approximation.

PERRIN (Jean), Chargé du Cours de Chimie physique à la Faculté des Sciences de Paris. — *Traité de Chimie Physique. Les Principes.* Grand in-8 de XXVI-300 pages, avec 38 figures; 1903.

M. Perrin a rassemblé dans ce Livre les principes dont l'étude et la discussion semblent former une introduction naturelle aux différentes sciences physiques. Déjà semblables par l'extrême généralité d'où ils tirent leur grande portée philosophique, ces principes ont encore ceci de commun que chacun d'eux peut être suggéré par la seule comparaison des faits connus, sans que jamais on ait besoin de se représenter le monde autrement qu'il ne nous apparaît. Avec tous on retrouve la même marche lente et sûre du particulier vers le général, la même défiance de tout mystère et de toute métaphysique, le même dédain de tout ce qui ne peut se réduire à *de la sensation effectivement réalisable.*

Ce Traité contient l'exposition des plus importantes matières d'étude qui trouvent leur place entre les limites qu'on vient d'assigner à la Chimie physique.

Les *principes généraux* sont énoncés et discutés dans le présent Volume. Une Préface particulière indique dans quel esprit est conduite cette discussion.

ROBIN (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. *Œuvres scientifiques* réunies et publiées, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par Louis RAFFY, Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. — *Mathématiques. Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* Grand in-8; 1903. (Paris, Gauthier-Villars.)

C'est la pensée même de Robin sur un sujet capital que l'on trouvera dans cet Ouvrage.

Il a été rédigé en vue de lecteurs possédant déjà une certaine habitude des Mathématiques, et capables, par conséquent, de suppléer quelques raisonnements intermédiaires. Toutefois, dans les premiers Chapitres, l'exposition a reçu la forme la plus explicite : de cette façon, le lecteur pourra se convaincre que la théorie nouvelle n'exige pas plus de développements de détail que n'en comporte la doctrine classique. Elle a été d'ailleurs soumise à l'épreuve de l'enseignement, tant à la Sorbonne qu'à l'École Normale, sans que les élèves, habitués pourtant à d'autres méthodes, y aient trouvé la moindre difficulté.

VIOLEINE (A.-P.), Nouvelles Tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissement; 8e édition entièrement refondue par A. ARNAUDEAU. In-4; 1903. (Paris, Gauthier-Villars.)

Le succès obtenu par les précédentes éditions des Tables de Violeine nous a engagé à les publier de nouveau en tenant compte des besoins actuels auxquels elles doivent satisfaire. Cet Ouvrage rendra de véritables services aux personnes toujours plus nombreuses que préoccupent, à juste titre, les questions d'intérêts.

[A3i]

SUR L'ÉQUATION $(x+1)^l - x^l - 1 = 0$;

PAR M. MIRIMANOFF.

1. On connaît la démonstration qu'Euler a donnée du célèbre théorème de Fermat relatif à la congruence

$$x^l - x \equiv 0 \pmod{l},$$

l étant un nombre premier.

Elle s'appuie sur ce fait que dans le polynome

$$P(x) = (x+1)^l - x^l - 1,$$

tous les coefficients sont divisibles par l, et que, par conséquent, on a identiquement

$$(x+1)^l - (x+1) \equiv x^l - x \pmod{l}.$$

On rencontre le polynome $P(x)$ dans l'étude de questions moins élémentaires.

Considérons, par exemple, le quotient

$$q = \frac{a^l - a}{l}.$$

Si a est entier, q est entier. On peut se proposer de calculer le reste de $q \pmod{l}$. Le polynome $P(x)$ joue un rôle important dans la solution de ce problème (¹).

On le rencontre encore dans l'étude de la fameuse équation de Fermat

$$\xi^l + \eta^l + \zeta^l = 0.$$

(¹) P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, t. I, p. 161 (*Teubner's Sammlung von Lehrbüchern*).

Dans ces problèmes, on envisage tantôt le polynome même, tantôt la congruence identique $P(x) \equiv 0$, tantôt la congruence

$$\frac{P(x)}{l} \equiv 0 \qquad (\bmod l).$$

Le polynome et la congruence possèdent des propriétés curieuses qui sont étroitement liées à celles de l'équation

$$(1) \qquad P(x) = 0.$$

Peut-être y aurait-il quelque intérêt à faire une étude directe de cette équation. Essayons d'en établir les propriétés les plus caractéristiques.

2. Supposons $l > 3$. Observons d'abord que le polynome $P(x)$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = -1$.

D'autre part, l'équation

$$(2) \qquad \frac{dP}{dx} = l x^{l-1}\left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^{l-1} - 1\right] = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle, $x = -\frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'équation $P(x) = 0$ a deux racines réelles et $l - 3$ racines imaginaires.

L'équation (1) a-t-elle des racines multiples?

Toute racine multiple annule la dérivée $P'(x)$, elle est racine de

$$(x+1)x^{l-1} - x^l - 1 = 0$$

ou de

$$x^{l-1} - 1 = 0$$

et de

$$(x+1)^{l-1} - 1 = 0.$$

Par conséquent, x et $x + 1$ sont figurées par deux points situés sur la circonférence de rayon 1 dont le centre est à l'origine, et l'on voit que les racines multiples de (1) sont racines de $x^2 + x + 1 = 0$.

D'autre part, elles annulent $x^{l-1} - 1$, d'où l'on conclut que $l - 1$ doit être divisible par 3.

Mais le polynome $P(x)$ est divisible par $x^2 + x + 1$ pour tout $l > 3$.

Si donc $l - 1$ est divisible par 3, l'équation (1) a deux racines doubles, $P(x)$ est divisible par

$$x(x+1)(x^2+x+1)^2.$$

Si, au contraire, $l - 1$ n'est pas divisible par 3, l'équation (1) n'a pas de racines multiples, $P(x)$ est divisible par

$$x(x+1)(x^2+x+1).$$

3. Divisons l'équation (1) par l; elle deviendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & x^{l-1} + \frac{l-1}{1.2}x^{l-2} + \frac{(l-1)(l-2)}{1.2.3}x^{l-3} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \frac{l-1}{1.2}x^2 + x = 0. \end{aligned}\right.$$

C'est une équation réciproque.

D'autre part, le polynome $P(x)$ ne varie pas lorsqu'on remplace x par $-1-x$. Soit α une racine de (1). Il résulte de la remarque que nous venons de faire que l'équation (1) admet aussi les racines

$$\frac{1}{\alpha},\quad -1-\alpha,\quad -\frac{1}{1+\alpha},\quad -1-\frac{1}{\alpha},\quad -\frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Mais ces racines ne sont pas nécessairement distinctes.

Elles se réduisent à deux :

1° Lorsque α est égal à 0 ou à -1;

2° Lorsque α est racine de $x^2 + x + 1 = 0$.

Elles se réduisent à trois :

3° Lorsque α est égal à l'un des trois nombres suivants : 1, -2, $-\frac{1}{2}$.

Dans tous les autres cas les six racines sont distinctes.

Mais le troisième cas ne peut pas se présenter. D'autre part, $P(x)$ est toujours divisible, pour $l > 3$, par $x(x+1)$ et x^2+x+1.

Si donc on pose

$$E(x) = \frac{1}{l}\,\frac{P(x)}{x(x+1)(x^2+x+1)^{\varepsilon}},$$

l'exposant ε étant égal à 1, lorsque $l-1 \not\equiv 0 \pmod 3$, et à 2, lorsque $l-1 \equiv 0 \pmod 3$, l'équation

$$(4) \qquad E(x) = 0$$

n'a que des racines imaginaires inégales qui peuvent être divisées en groupes comprenant chacun six racines.

Soit k le nombre des groupes; le degré de (4) est égal à $6k$.

Si $l-1 \not\equiv 0 \pmod 3$,

$$k = \frac{l-5}{6}.$$

Si $l-1 \equiv 0 \pmod 3$,

$$k = \frac{l-7}{6}.$$

A chaque groupe de six racines correspond un polynome du sixième degré $e_i(x)$ et l'on peut écrire

$$E(x) = e_1(x)\,e_2(x)\ldots e_k(x).$$

4. Dans l'équation (1), posons $x = -z$, elle devient

$$(-z+1)^l + z^l - 1 = 0.$$

Le premier membre ne varie pas lorsqu'on remplace z par $1-z$; de plus, l'équation est réciproque. Si donc elle est vérifiée en posant $z = \alpha$, elle admet aussi les racines

$$\frac{1}{\alpha}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{-1+\alpha}{\alpha}, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{-\alpha}{1-\alpha}.$$

Posons $\alpha = k^2(\omega)$, k étant le module d'une intégrale elliptique, ω le rapport des périodes.

Les six racines du groupe sont respectivement égales à

$$k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad k'^2, \quad -\frac{k'^2}{k^2}, \quad \frac{1}{k'^2}, \quad -\frac{k^2}{k'^2},$$

$k'(\omega)$ étant le module complémentaire.

Ce sont les six valeurs du carré du module qui se déduisent de $k^2(\omega)$ par les transformations du premier degré.

On voit que la théorie de l'équation (1) peut être rattachée à celle des fonctions elliptiques.

Nous nous bornerons à cette remarque.

5. Reprenons l'équation $E(x) = 0$. Le coefficient de son premier terme étant égal à l'unité, ses racines sont des nombres algébriques entiers et même des unités complexes, puisque le dernier terme de $E(x)$ est aussi égal à 1.

Il en résulte que les coefficients des polynomes $e_i(x)$ sont des nombres algébriques entiers. Je montrerai qu'ils sont tous réels. Pour que les coefficients d'un polynome $e_i(x)$ soient réels, il faut et il suffit que les racines de $e_i(x) = 0$ forment trois couples de racines imaginaires conjuguées.

On en déduit la condition suivante :

Les racines de l'un des couples ont l'unité pour module.

Reprenons l'équation

$$P(x) = 0.$$

Posons

$$x = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

A chaque valeur réelle de φ correspond une racine de module 1. Le nombre des couples de module 1 est égal à celui des racines φ comprises entre o et π.

Mais l'équation $P(x) = 0$ devient

$$2^{l-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^l = \cos\frac{l\varphi}{2}$$

ou

$$2^{l-1}(\cos\omega)^l = \cos l\omega,$$

en posant

$$\frac{\varphi}{2} = \omega.$$

Considérons les courbes

$$(a) \qquad y = 2^{l-1}(\cos\omega)^l,$$

$$(b) \qquad y = \cos l\omega,$$

ω étant l'abscisse et y l'ordonnée.

Les deux courbes passent par les points $\omega = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{1}{2}$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. Considérons la partie du plan comprise entre les parallèles $\omega = \frac{\pi}{3}$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Lorsque l'abscisse ω croît de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$, la courbe (a) se rapproche de plus en plus de l'axe des ω, tandis que l'ordonnée de (b) oscille entre $+1$ et -1 $\left(\text{elle a } \frac{2\pi}{l}\right.$ pour période$\left.\right)$. On en déduit facilement que le nombre des points d'intersection distincts situés à l'intérieur du domaine considéré est égal à $k + 2$, k étant le nombre des polynomes $e_i(x)$. Mais les points extrêmes correspondent aux racines de $x + 1 = 0$ et de $x^2 + x + 1 = 0$. On doit les écarter.

Il en résulte que chacune des équations $e_i(x) = 0$ admet un couple de racines de module 1. On voit en même temps qu'il est inutile de considérer l'intervalle compris entre o et $\frac{\pi}{3}$, puisque le nombre des points d'intersection situés entre les parallèles $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ ne saurait être supérieur à $k + 2$. Le théorème est démontré.

Considérons l'une des équations $e_i(x) = 0$. Soit

$$\alpha_i = \cos\varphi_i + i\sin\varphi_i$$

celle de ses racines de module 1 qui est située dans la partie supérieure du plan. D'après ce qui précède, l'argument φ_i est compris entre $\frac{2\pi}{3}$ et π. Rangeons les racines α_i dans l'ordre des arguments croissants. A chacune des racines α_i correspond un polynome déterminé $e_i(x)$.

Les racines α_i sont situées sur la circonférence de rayon 1 dont le centre est à l'origine. On pourra les construire à l'aide des deux courbes (a) et (b).

Mais chacune des équations $e_i(x) = 0$ admet six racines imaginaires qui s'expriment très simplement en fonction de α_i. Soient α'_i la racine $-\frac{1}{\alpha_i + 1}$, α''_i la racine $-\frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i}$.

Menons la droite D représentée par l'équation

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Soit D_1 la droite passant par le point α_i et le point $e^{\pi i}$. Les droites D et D_1 se coupent au point α'_i. Le point α''_i est le symétrique de α_i par rapport à la droite D.

Les trois autres racines du groupe sont les conjuguées imaginaires de α_i, α'_i et α''_i.

On voit qu'il est facile, à l'aide des courbes (a) et (b), de construire les $6k$ racines de l'équation $E(x) = 0$.

6. *Quelle est la forme des polynomes $e_i(x)$?*

Ces polynomes appartiennent à la catégorie des polynomes du sixième degré qui possèdent les propriétés suivantes :

1° Les termes équidistants des extrêmes ont les mêmes coefficients;

2° Le coefficient du premier terme est égal à 1 ;

3° Le polynome ne varie pas lorsqu'on remplace x par $-1-x$.

On constate facilement que ces polynomes sont de la forme

$$x^6+3x^5+tx^4+(2t-5)x^3+tx^2+3x+1,$$

t étant un paramètre.

A chacun des polynomes $e_i(x)$ correspond une valeur déterminée t_i du paramètre t.

Nous savons que t_i est un nombre algébrique entier réel; t_i est lié à une racine quelconque x de $e_i(x)=0$ par la relation

$$t_i-6=-\frac{(x^2+x+1)^3}{x^2(x+1)^2}; \tag{5}$$

et, pour $x=\alpha_i$,

$$t_i-6=\frac{\left(1-4\cos^2\frac{\varphi_i}{2}\right)^3}{4\cos^2\frac{\varphi_i}{2}}, \tag{6}$$

φ_i étant l'argument de α_i.

Si, dans l'équation $e_i(x)=0$, on pose $x=-k^2(\omega)$, comme dans le n° 4, on trouve

$$t_i-6=-\frac{27g_2^3}{4(g_2^3-27g_3^2)}=-\frac{27}{4}\,\mathrm{I}(\omega), \tag{7}$$

g_2 et g_3 étant les invariants de Weierstrass et $\mathrm{I}(\omega)$ l'invariant de Klein.

Supposons que $l - 1$ ne soit pas divisible par 3 et soit α une racine de $x^2 + x + 1 = 0$. En prenant la dérivée du polynome $\frac{P(x)}{l}$, on trouve, pour $x = \alpha$,

$$\frac{1}{l}\frac{dP}{dx} = \alpha(\alpha + 1)(2\alpha + 1)E(\alpha);$$

or,

$$e_i(\alpha) = t_i - 6.$$

On en conclut

$$(8) \qquad (t_1 - 6)(t_2 - 6)\ldots(t_k - 6) = 1;$$

$t_i - 6$ est dans ce cas une unité complexe.

Mais il n'en est plus ainsi lorsque $l - 1 \equiv 0 \pmod 3$. On a alors

$$(8') \qquad (t_1 - 6)(t_2 - 6)\ldots(t_k - 6) = \frac{l-1}{6}.$$

On trouve de même que dans le premier cas

$$(9) \qquad \Sigma t_i = \frac{(l+17)(l-5)}{24} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et dans le second

$$(9') \qquad \Sigma t_i = \frac{(l+19)(l-7)}{24}.$$

Pour former l'équation qui a pour racines $t_1, t_2, \ldots, t_k$, on peut se servir de la méthode classique qui est exposée dans le Tome II du *Cours d'Algèbre supérieure* de J.-A. Serret (p. 544 de la 5e édit.).

7. Une dernière question se pose :

L'équation $E(x) = 0$ *est-elle réductible (dans le domaine des nombres entiers ordinaires)?*

Soit $D(x)$ un diviseur irréductible de $E(x)$. Les coefficients de $D(x)$ étant entiers et, par conséquent, réels, si l'équation $D(x) = 0$ admet une racine de $e_i(x) = 0$, elle admet aussi sa conjuguée.

Mais les racines de $e_i(x) = 0$ forment trois couples :

1° Le couple

$$\alpha_i \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_i}$$

(couple de première espèce);

2° Le couple

$$\alpha'_i = -\frac{1}{\alpha_i + 1} \qquad \text{et} \qquad -1 - \alpha'_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}$$

(couple de deuxième espèce);

3° Le couple

$$\alpha''_i = -\frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\alpha''_i}{\alpha''_i + 1} = -1 - \alpha_i$$

(couple de troisième espèce).

Supposons que l'équation $D(x) = 0$ admette deux couples de racines de $e_i(x) = 0$; je dis qu'elle les admet tous les trois. Supposons, par exemple, qu'elle admette les couples 1° et 2°. Le polynome

$$F(x) = D(-1 - x)$$

s'annule pour $x = \alpha'_i$. $F(x)$ admet donc toutes les racines de $D(x) = 0$. Par conséquent,

$$F(\alpha_i) = 0,$$

d'où

$$D(-1 - \alpha_i) = 0,$$

et l'on voit que $D(x) = 0$ admet les racines de troisième espèce. Les autres cas se traitent de la même manière.

Reste à voir si le nombre des couples communs à $D(x) = 0$ et à $e_i(x) = 0$ peut être égal à 1.

Toute racine de $D(x) = 0$ vérifie l'une des k équations $e_i(x) = 0$. Soient $e_{i_1}(x) = 0$, $e_{i_2}(x) = 0$, ..., $e_{i_m}(x) = 0$ celles d'entre elles qui ont des racines communes avec $D(x) = 0$. Je dis que chacune de ces m équations fournit à $D(x) = 0$ un même nombre de couples. Si donc $D(x)$ n'était pas égal au produit

$$\pi(x) = e_{i_1}(x)\, e_{i_2}(x) \ldots e_{i_m}(x),$$

le nombre des couples fournis par chacune des m équations serait égal à 1. De plus, ces m couples appartiendraient tous à la même espèce (la démonstration est exactement semblable à celle que nous avons indiquée au commencement de ce Paragraphe).

Le polynome $\Pi(x)$ se décomposerait en un produit de trois facteurs irréductibles tels que $D(x)$, correspondant aux couples de première, de deuxième et de troisième espèce.

Considérons celui de ces facteurs dont les racines sont toutes de première espèce. Nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Une unité complexe de module 1 *dont toutes les conjuguées ont l'unité pour module est une racine de l'unité* (¹).

En vertu de ce théorème, les racines de notre facteur sont des racines de l'unité.

D'autre part, aucune des racines de $E(x) = 0$ n'est une racine de l'unité. On en conclut que tout diviseur irréductible de $E(x)$ est égal au produit d'un certain nombre de polynomes $e_i(x)$.

Si donc $E(x)$ se décompose en facteurs, l'équation en t est réductible.

(¹) Kronecker, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LIII.

Tout porte à penser que l'équation en t [et, par suite, l'équation $E(x)=0$] est irréductible dans le domaine des nombres entiers.

8. *Exemples.* — Soit $l=11$:

$$\frac{(x+1)^{11}-x^{11}-1}{11}=x(x+1)(x^2+x+1)\,E(x);$$

la formule (8) donne

$$t-6=1,$$

d'où

$$E(x)=x^6+3x^5+7x^4+9x^3+7x^2+3x+1$$

(le coefficient de $x^3=2t-5$).

L'équation $E(x)=0$ est irréductible.

Soit maintenant $l=13$:

$$\frac{(x+1)^{13}-x^{13}-1}{13}=x(x+1)(x^2+x+1)^2\,E(x).$$

La formule (8′) donne

$$t-6=\frac{12}{6}=2,$$

d'où

$$E(x)=x^6+3x^5+8x^4+11x^3+8x^2+3x+1;$$

l'équation $E(x)=0$ est irréductible.

Soit enfin $l=17$:

$$\frac{(x+1)^{17}-x^{17}-1}{17}=x(x+1)(x^2+x+1)\,E(x),$$

$$E(x)=e_1(x)\,e_2(x).$$

Les formules (8) et (9) donnent

$$(t_1-b)(t_2-b)=1,$$
$$t_1+t_2=17.$$

L'équation $E(x)=0$ est irréductible.

P. S. — Je viens d'apprendre que M. Bendz, à Upsal, s'est occupé du même sujet. Dans un opuscule intitulé : *Öfver diophantiska ekvationen* $x^n + y^n = z^n$ (Upsala, Lindequistska bokhandeln, 1902), le géomètre suédois établit une partie des résultats que je fais connaître dans cette Note. Comme moi, il considère les deux courbes $y = 2^{l-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^l$ et $y = \cos\frac{l\varphi}{2}$, mais l'analogie ne va pas plus loin. Je tiens à signaler à l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* le travail de M. Bendz.

[L¹6b]

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

1. Soit

$$(1)\qquad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique.

Nous allons d'abord montrer que le discriminant de la conique peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \Delta = Af_y'^2 - 2Bf_x'f_y' + Cf_x'^2,$$

où f_x', f_y' sont les demi-dérivées partielles de (1).

En effet, si h est le Hessien de la forme (1) rendue homogène, on aura

$$-\Delta = \frac{h}{2^3} = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}$$

ou encore, en ayant égard au théorème bien connu sur les fonctions homogènes,

$$-\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xf''_{x^2} & yf''_{xy} & zf''_{xz} \\ xf''_{yx} & yf''_{y^2} & zf''_{yx} \\ xf''_{zx} & yf''_{zy} & zf''_{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{z}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f'_y \end{vmatrix}$$

ou encore

$$-\Delta = \frac{1}{xyz^2}\begin{vmatrix} xf''_{x^2} & xf''_{xy} & xf'_x \\ yf''_{yx} & yf''_{y^2} & yf'_y \\ zf''_{zx} & zf''_{zy} & zf'_z \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}$$

en ayant égard à la relation

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$$

pour les points de la conique. Si donc nous développons ce dernier déterminant et nous faisons $z = 1$, on obtiendra l'expression (2), en remarquant que l'on a

$$f''_{x^2} = \mathrm{A}, \qquad f''_{xy} = \mathrm{B}, \qquad f''_{y^2} = \mathrm{C}.$$

2. On sait que le rayon de courbure, en un point d'une courbe plane, est donné par la formule

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et, d'après (1) et (2), on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\Delta}{f'^3_y};$$

donc, le rayon de courbure en un point d'une conique, exprimé en fonction des coordonnées du point, est de la forme

$$(3) \qquad \rho = \frac{1}{\Delta}(f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}},$$

où f'_x, f'_y sont les demi-dérivées partielles de (1).

3. Cette dernière expression va nous permettre de déterminer un certain nombre d'expressions différentes pour le rayon de courbure, utiles à connaître.

Soit, en effet, α l'angle de la tangente à la conique avec une droite fixe, que l'on prendra pour axe des x. Nous aurons, en ayant égard à (2), la suite des rapports

$$\frac{f_y'^2}{\cos^2\alpha} = -\frac{f_x' f_y'}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{f_x'^2}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{\Delta}{A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha}.$$

Il résulte donc, d'après (3), pour le rayon de courbure à une conique en fonction de l'angle α, l'expression

$$(4)\qquad \rho = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression devra être modifiée s'il s'agit d'une parabole, car alors l'expression entre parenthèses est un carré parfait.

4. L'expression qu'on vient de trouver pour le rayon de courbure n'appartient qu'aux coniques. En d'autres termes, si en chaque point d'une courbe plane le rayon de courbure est de la forme

$$\rho = \frac{K}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

où K, A, B, C sont des constantes et α l'angle de la tangente à la courbe avec une droite fixe, les courbes correspondantes sont des coniques.

En effet, si p est la distance de l'origine des axes à la tangente en un point de la courbe cherchée, le rayon de courbure est donné d'après Euler par la formule

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2} + p = \rho;$$

on aura donc l'équation différentielle des courbes cherchées en coordonnées tangentielles

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2} + p = \frac{K}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons $B^2 - AC \gtrless 0$, on remarque alors que la fonction

$$p = \frac{K}{AC - B^2}(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

est une solution particulière de l'équation précédente; par conséquent, l'intégrale générale sera

$$p = a\cos\alpha + b\sin\alpha + \frac{K}{AC - B^2}(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

où a et b sont des constantes. Nous remarquons que cette fonction n'est autre chose que la condition qui exprime que la droite

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p$$

est tangente à la courbe cherchée. Si, au lieu des coordonnées p et α, nous introduisons les coordonnées de droite, comme on a l'habitude en posant

$$\frac{\sin\alpha}{p} = u, \qquad -\frac{\cos\alpha}{p} = v,$$

on aura alors

$$(1 + av - bu)^2 = \frac{K}{(AC - B^2)^2}(Av^2 - 2Buv + Cu^2),$$

relation algébrique et du second ordre; donc les courbes cherchées sont des coniques. Si $B^2 - AC = 0$, on raisonnera de la même manière sur l'équation modifiée.

5. Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes sur les rayons de courbure d'une conique.

Théorème I. — *Si dans le plan d'une conique on prend un point et l'on considère la polaire de ce point par rapport à la conique; le rayon de courbure en chaque point est proportionnel au cube de la distance à la polaire et inversement proportionnel au cube de la distance du pôle à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, soient f'_x, f'_y, f'_z les demi-dérivées partielles de la conique (1) rendue homogène. Nous aurons la suite des rapports

$$\frac{f'_x}{\sin\alpha} = -\frac{f'_y}{\cos\alpha} = -\frac{f'_z}{p},$$

où p est supposé lié à α par la relation qui exprime que la droite

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p$$

est tangente à la conique (1); enfin a, b et c les coordonnées homogènes d'un point du plan. Nous aurons, d'après (3),

$$(5) \qquad \rho = \frac{1}{\Delta}\,\frac{(af'_x + bf'_y + cf'_z)^3}{(a\sin\alpha - b\cos\alpha - cp)^3}.$$

L'expression entre parenthèses du numérateur n'est autre chose que le produit de la constante $(f'^2_a + f'^2_b)^{\frac{1}{2}}$ par la distance d'un point de la conique à la polaire donnée, et celle du dénominateur est le produit de c par la distance du point donné des coordonnées a, b, c à la tangente à la conique au point considéré. Nous aurons donc, en désignant par D et d ces distances,

$$(6) \qquad \rho = \frac{(f_a'^2 + f_b'^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3 \Delta} \left(\frac{D}{d}\right)^3,$$

et le théorème est démontré.

Une première conséquence est le théorème suivant :

En chaque point d'un cercle, le rapport $\frac{D}{d}$ *est constant.*

Remarquons encore que si le point (a, b, c) est sur la conique, le coefficient $\frac{(f_a'^2 + f_b'^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta}$ de (6) est, d'après (3), le rayon de courbure en ce point. Il s'ensuit alors comme conséquence le théorème :

En deux points quelconques d'une conique, le rapport des rayons de courbure est égal au rapport des cubes des longueurs des tangentes en ces points.

6. Théorème II. — *En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est inversement proportionnel au cube de la distance de son centre à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, reprenons l'expression du rayon de courbure sous la forme (5) et supposons que le point donné (a, b, c) coïncide avec le centre de la conique, la polaire sera, comme on sait, rejetée à l'infini et le numérateur de cette expression se réduit à

$$(zf_c')^3$$

à cause de la condition $f_a' = 0$, $f_b' = 0$. Si donc nous faisons $z = 1$, nous aurons, en ayant égard à (1),

$$(Da + Eb + Fc)^3;$$

mais cette expression n'est autre chose que Δ^3. On aura donc finalement

$$\rho = \frac{\Delta^2}{c^3 d^3} \tag{7}$$

et le théorème est démontré. On doit remarquer que la troisième coordonnée c dans ce cas a pour expression la caractéristique $AC - B^2$ de la conique.

7. Ce théorème nous conduit aisément à une construction géométrique du centre de courbure. Supposons la conique rapportée à son centre et à ses axes et soient a et b les demi-axes. On aura alors

$$\Delta = - c,$$

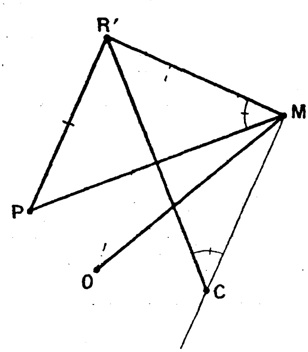
et, par conséquent,

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Nous avons posé p à la place de d.

Soient $OM = r$ (*fig.* 1) le rayon vecteur d'un point

Fig. 1.



de la conique et r' le demi-diamètre conjugué à la direction OM, enfin φ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur. Le théorème d'Apollonius nous donne

$$rr' \sin\varphi = ab$$

et, comme on a $p = r\sin\varphi$, on aura donc

$$\rho = \frac{r'^2}{p},$$

il résulte de là la construction suivante. Sur la tangente en M on porte $MR' = r'$, on mène la perpendiculaire $R'P = p$, on joint P à M et l'on mène la perpendiculaire R'C à PM, le point de rencontre C avec la normale MC est le centre de courbure. En effet, l'angle en C étant égal à R'MP, le triangle rectangle R'MC nous donne

$$r' = \mathrm{MC}\,\mathrm{tang}(\widehat{\mathrm{R'MP}}) = \mathrm{MC}\frac{p}{r'}.$$

8. Une autre conséquence du théorème I est le théorème connu qui s'énonce comme il suit :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur qui joint le point de contact au foyer de la conique.

Supposons, en effet, que le point de coordonnées a, b, c coïncide avec un foyer de la conique (1), la polaire coïncidera alors avec la directrice correspondante. La distance D qui figure dans la formule (6) est, d'après la définition même de la conique, proportionnelle à la distance du point de la conique au foyer correspondant, et la formule (6) nous conduit alors à ce dernier théorème.

9. Supposons que le point donné (a, b, c) est rejeté à l'infini dans la direction $\frac{b}{a}$, la polaire correspondante est alors un diamètre de la conique, et la formule (5) se réduit à

$$\rho = \frac{1}{\Delta} \frac{(af'_x + bf'_y)^3}{(a \sin\alpha - b \cos\alpha)^3}.$$

Il résulte de là le théorème suivant :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est proportionnel au cube de la distance du point à un diamètre donné et inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec la direction conjuguée au diamètre donné.

Ou encore, si le diamètre donné est un axe de la conique, on aura le théorème connu :

En chaque point d'une conique, le rayon de courbure est proportionnel au cube de la portion de la normale à la conique, comprise entre son pied et l'axe donné.

Il résulte de ce dernier théorème, comme conséquence, le théorème connu, à savoir :

En chaque point d'une conique, le rapport des portions d'une normale comprises entre son pied et les axes est constant.

10. Il résulte enfin un dernier théorème du théorème I, qu'on peut énoncer comme il suit :

Si, par un point du plan d'une conique, on mène les deux tangentes, le rayon de courbure en chaque point de la conique est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du produit des distances de ce point aux deux tangentes *et inversement proportionnel au cube de la distance du point pris dans le plan à la tangente à la conique au point considéré.*

En effet, l'équation d'une conique bi-tangente à l'ensemble des deux droites,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (dx + ey + f)^2,$$

et la droite

$$dx + ey + f = 0$$

n'est autre chose que la polaire de l'origine par rapport à la conique. On aura donc, d'après le théorème I, en ayant égard aussi à l'équation de la conique

$$\rho = \mathrm{K}\frac{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

où p est la distance de l'origine des axes à la tangente à la conique, ce qui démontre le théorème. Il est à remarquer, ce qui d'ailleurs est évident, que, lors même que les deux tangentes sont imaginaires, le produit des distances à ces droites est réel.

Une conséquence de ce dernier théorème est :

Le rapport du produit des distances d'un point d'un cercle à deux tangentes menées par un point du plan au carré de la distance de ce point à la tangente au cercle au point considéré est constant.

11. Les réciproques de ces théorèmes sont aussi vraies. Nous allons nous borner à démontrer la réciproque des théorèmes I et II.

Nous nous proposons donc de démontrer la proposition suivante :

Si, dans un plan, on se donne un point et une droite et si, en chaque point d'une courbe située dans ce plan, le rayon de courbure est donné par une expression de la forme

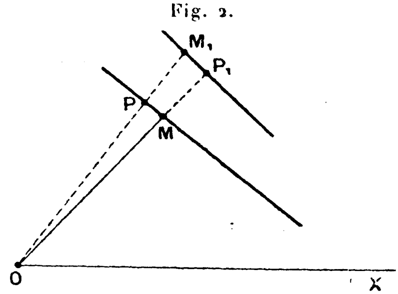
$$\rho = K\frac{D^3}{d^3},$$

où K *est une constante,* D *la distance d'un point de la courbe à la droite donnée et d la distance du point donné à la tangente à la courbe au point considéré, la courbe est une conique.*

Nous avons besoin, pour donner la solution, d'établir un théorème sur les polaires réciproques.

Supposons une courbe plane rapportée à un système d'axes polaires (*fig.* 2) et soient r et θ les coordonnées

Fig. 2.



d'un point M, MP la tangente à la courbe, $OP = p$ la distance du point O à la tangente, enfin M_1 le point correspondant de la polaire réciproque par rapport au cercle directeur de centre O et de rayon égal à 1, M_1P_1 perpendiculaire à OM est, comme on sait, la tangente en M_1 à la polaire réciproque; posons encore $OM_1 = r_1$ et $OP_1 = p_1$. La similitude des triangles OMP et OM_1P_1 et le théorème bien connu sur les pôles et polaires d'un cercle nous donnent

$$(8) \qquad pr_1 = p_1 r = 1$$

et

$$(9) \qquad p = r \sin\varphi, \qquad p_1 = r_1 \sin\varphi,$$

où φ est l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, angle qui, d'ailleurs, se conserve. Si ρ est le rayon de courbure au point M et ρ_1 au point M_1, on a le théorème suivant :

Le produit des rayons de courbure en deux points correspondants d'une courbe et de sa polaire réciproque par rapport à un cercle directeur de rayon égal à 1, est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente en un point d'une des courbes avec le rayon vecteur qui joint le point de contact au pôle de la transformation.

En effet, le rayon de courbure en un point d'une courbe plane est donné aussi par la formule

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp};$$

on aura par analogie, pour la polaire réciproque,

$$\rho_1 = \frac{r_1\,dr_1}{dp_1},$$

d'où, en ayant égard à (8) et (9), on trouve

$$(10) \qquad \rho.\rho_1 = \frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

12. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème du n° **11**. Prenons pour origine des axes le point donné et soit

$$ax + by = c$$

la droite donnée. Le rayon de courbure en un point de la courbe cherchée sera donné par

$$\rho = \frac{K}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} \frac{(ax+by-c)^3}{p^3}.$$

Considérons encore la polaire réciproque des courbes cherchées par rapport au cercle de rayon 1 et dont le centre est à l'origine des axes. Le rayon de courbure au point correspondant à x et y sera, d'après (10),

$$\rho_1 = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} \frac{p^3}{\sin^3\varphi(ax+by-c)^3},$$

ou encore, en passant en coordonnées polaires et en ayant égard à (8) et (9),

$$\rho_1 = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} \frac{1}{(a\cos\theta + b\sin\theta - cp_1)^3}.$$

Les polaires réciproques étant supposées rapportées aux mêmes axes que les courbes cherchées, si l'on désigne par θ_1 l'angle de la tangente M_1P_1, avec l'axe polaire, cet angle θ_1 est lié à θ par la relation

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta;$$

on aura donc finalement, en posant

$$\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{K} = K':$$

$$(11) \qquad \rho_1 = \frac{K'}{(a\sin\theta_1 - b\cos\theta_1 - cp_1)^3};$$

or l'expression entre parenthèses n'est autre chose, à un facteur constant près, que la distance du point dont les coordonnées homogènes sont a, b, c à la tangente en M_1 à la polaire réciproque, de sorte que, si la réciproque du théorème I est vraie, la réciproque du théorème II sera aussi vraie.

Remarquons enfin que l'équation différentielle des polaires réciproques est, d'après Euler,

$$\frac{d^2 p_1}{d\theta_1^2} + p_1 = \frac{K'}{(a \sin\theta_1 - b \cos\theta_1 - c p_1)^3}.$$

Si, dans cette équation, nous faisons le changement de la fonction, en posant

$$c p_1 = c u + a \sin\theta_1 - b \cos\theta_1,$$

l'équation précédente se transforme en la suivante :

$$\frac{d^2 u}{d\theta_1} + u = -\frac{K'}{c^3}\,\frac{1}{u^3},$$

qui est intégrable par des quadratures et nous donne

$$u^2 = A \cos^2\theta_1 + 2B \sin\theta_1 \cos\theta_1 + C \sin^2\theta_1,$$

d'où

$$\begin{aligned}(c p_1 - a \sin\theta_1 + b \cos\theta_1)^2 \\ = c^2 (A \cos^2\theta_1 + 2B \sin\theta_1 \cos\theta_1 + \sin^2\theta_1);\end{aligned}$$

si, dans cette dernière relation, nous remplaçons θ_1 en fonction θ et p_1 par $\frac{1}{r}$, d'après (8), on obtiendra, pour les courbes cherchées, l'équation d'une conique exprimée en coordonnées polaires et, par conséquent, la réciproque du théorème I est vraie.

La polaire réciproque de cette conique étant aussi une conique, la formule (11) et le théorème II nous montrent que les coordonnées homogènes a, b et c qui figurent dans la droite donnée sont les coordonnées du centre de ces coniques, polaires réciproques. Il résulte de là la proposition géométrique suivante :

Les polaires réciproques de toutes les coniques qui ont un point et une droite donnés pour pôle et polaire par rapport à un cercle directeur de rayon 1, *et dont le centre est le point donné, sont des coniques qui ont un même point fixe pour centre.*

CORRESPONDANCE.

M. **A.-H. Couvert**. — *Au sujet des questions* 1628 *et* 1491. — M. Barisien a énoncé et résolu la question 1628 dans *J. M. S.*, 1894, page 39, exercice III; une seconde solution se trouve également dans *J. M. S.*, 1894, page 140, question 351, § II. Les deux solutions sont d'ailleurs identiques.

La question 1491 est étudiée dans *J. M. S.*, 1886, page 39 (question d'examen 2*).

J'ai cru devoir vous envoyer ces renseignements, parce que, dans le *Tableau de correspondance* publié en 1900, les questions 1491 et 1628 sont considérées comme non résolues et que depuis aucune solution n'en a été donnée dans les *N. A.*

A **un abonné**, *à la Bourboule*. — Prière de vouloir bien me faire connaître votre nom et votre adresse : il vous sera répondu par Lettre particulière. R. B.

CERTIFICATS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

Marseille.

Épreuve écrite. — 1° *Évaluer la longueur d'une tangente commune à deux sphères fixes en fonction de l'angle* θ *que fait avec la ligne des centres le rayon aboutissant à l'un des points de contact.*

2° *Si cette tangente touche une courbe C sur l'une des sphères, l'arc de cette courbe, compté depuis une origine convenable, est égal à la longueur de la tangente commune.*

3° *La tangente commune touche la seconde sphère en un point qui décrit une courbe* C_1 *développante de* C.

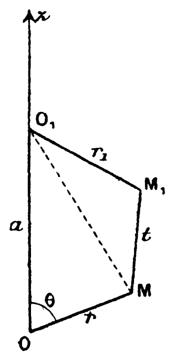
4° *Le plan osculateur en un point de la courbe* C *est le plan tangent à la seconde sphère au point correspondant de* C_1.

5° *Calculer le rayon de courbure de* C *au moyen du théorème de Meusnier.*

6° *Calculer le rayon de torsion de* C.

SOLUTION.

1° $$t^2 + r_1^2 = \overline{OM}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$
$$t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar\cos\theta.$$



2° MM_1 étant la tangente en M, l'angle avec Oz est

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Mais MM_1 est aussi la projection de OO_1 sous l'angle γ, donc aussi

$$\cos\gamma = \frac{MM_1}{OO_1} = \frac{t}{a}.$$

On a donc

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} \quad \text{ou} \quad ds = \frac{a\,dz}{t}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} t\,dt &= +\,ar\sin\theta\,d\theta, \\ z &= r\cos\theta, \\ dz &= -\,r\sin\theta\,d\theta; \end{aligned}$$

donc

$$t\,dt = -\,a\,dz,$$

d'où

$$ds = -\,dt, \qquad s_0 - s = t.$$

3° Il résulte de la seconde question que M_1 décrit une courbe C_1 développante de C.

4° La développante M_1 est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface développable engendrée par MM_1 tangente en M à la courbe C. Le plan osculateur à la courbe C est le plan tangent le long de la génératrice MM_1. On peut le déterminer comme plan tangent à la surface développable au point M_1. Il contient en ce point :

a. La génératrice M_1M;

b. La tangente à la courbe M_1.

Les deux tangentes sont dans le plan tangent à la sphère en M_1. Donc le plan tangent à la sphère en M_1 est le plan osculateur au point M à la courbe C.

5° Cherchons l'équation du plan tangent à la sphère en M_1. La sphère est

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2 - r_1^2 = 0.$$

Le plan tangent au point $(x_1 y_1 z_1)$ est

$$Xx_1 + Yy_1 + (Z - a)(z_1 - a) - r_1^2 = 0,$$

où l'on a

$$x_1 = x + t\frac{dx}{ds},$$

$$y_1 = y + t\frac{dy}{ds},$$

$$z_1 = z + t\frac{dz}{ds}.$$

La distance de ce plan à l'origine est donnée par

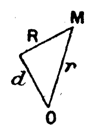
$$d^2 = \frac{[-a(z_1 - a) - r_1^2]^2}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2} = \frac{\left(a(z - a) + at\dfrac{dz}{ds} + r_1^2\right)^2}{r_1^2};$$

mais on a

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a},$$

donc

$$at\frac{dz}{ds} = t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar\cos\theta = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az.$$



Donc

$$d^2 = \frac{(az - a^2 + r_1^2 + a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az)^2}{r_1^2} = \frac{(r^2 - az)^2}{r_1^2}.$$

D'après le théorème de Meusnier

$$\mathrm{R}^2 = r^2 - d^2 = \frac{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}{r_1^2}$$
$$= \frac{(rr_1 + r^2 - az)(rr_1 - r^2 + az)}{r_1^2};$$

on peut remplacer si l'on veut z par $r\cos\theta$.

6° On a pour la torsion

$$d = \mathrm{T}\frac{d\mathrm{R}}{ds} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{d}\,\frac{d\mathrm{R}}{dz}\,\frac{dz}{ds}.$$

Tout est connu. On a

$$\frac{1}{d} = \frac{r_1}{r^2 - az};$$

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}}{r_1^2},$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dz} = \frac{a(r^2 - az)}{r_1\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}};$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}}{a}.$$

Donc

$$\frac{1}{T} = \frac{r_1}{r^2 - az}\,\frac{a}{r_1}\,\frac{r^2 - az}{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}}{a}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}}.$$

On peut remplacer si l'on veut z par $r\cos\theta$.

Épreuve pratique. — *Calculer* $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos\theta}\,d\theta.$

Solution.

On pose $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$, et l'on fait $\sin\theta = x^2$, il vient

$$\int_0^x \frac{2x^2\,dx}{1 - x^4}.$$

On remarquera que

$$\frac{2x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{1 + x^2},$$

et l'on obtient rapidement

$$\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sqrt{\sin\theta}}{1 - \sqrt{\sin\theta}} - \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\sin\theta}.$$

(Juillet 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — I. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^4\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = (x + a)^2.$$

II. *On considère la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et l'ellipsoïde

$$x^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + y^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} + z^2 = R^2,$$

où

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

On demande de calculer la portion de volume comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde et de la sphère.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de trouver les surfaces* S *qui coupent orthogonalement toutes les surfaces représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Trouver celles des surfaces S *qui contiennent la droite*

$$y = 0, \qquad z = \alpha.$$

Ces dernières surfaces, quand α *varie, forment une surface* S; *trouver les surfaces* Σ *qui coupent orthogonalement toutes les surfaces de la famille* S.

(Juillet 1903.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnée l'équation*

$$9y(1-2y)^2y'^2 = 2 - 3y:$$

1° *Déterminer les lieux des points d'inflexion et des points de rebroussement des courbes intégrales ainsi que l'enveloppe de ces courbes.*

2° *Intégrer cette équation et vérifier, à l'aide de l'intégrale générale, les résultats précédemment déduits de l'équation différentielle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'intersection* S *du cône* $x^2 + y^2 = z^2$ *et du cylindre parallèle à* Oz *qui a pour trace, sur le plan des* xy, *la courbe* $r = ke^\theta$. *On demande de déterminer, pour un point quelconque* M *de* S' : *la tangente, le plan osculateur et sa caractéristique, les rayons de courbure et de torsion, et enfin le rayon de la sphère osculatrice. On cherchera en outre le lieu* S_1 *de la trace* M_1 *de la tangente à la courbe* S.

(Juillet 1903.)

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui définit les fonctions homogènes, à n variables, du degré m d'homogénéité.*

II. *Intégrer* $p^2 + q^2 = x + y$, *où* $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Solution.

On écrira

$$p^2 - x = -q^2 + y = \alpha = \text{const. arbitr.},$$

d'où

$$p = (x+\alpha)^{\frac{1}{2}}, \qquad q = (y-\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

et l'intégrale complète

$$\frac{3}{2}(z+\beta) = (x+\alpha)^{\frac{3}{2}} + (y-\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

III. z *étant une fonction donnée de* $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ *et de* $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, *calculer l'expression*

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Solution.

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

IV. *On a la surface*

$$z r^2 = f(\theta).$$

Calculer f de façon qu'en projection sur le plan des xy les deux lignes asymptotiques, issues d'un point de la surface, se coupent à angle droit. Étudier ces lignes asymptotiques et montrer que la torsion en un point ne dépend que de r.

SOLUTION.

On a évidemment

$$\Delta z = 0,$$

c'est-à-dire, tenant compte de la solution du problème III et tout calcul fait :

$$0 = \Delta z = r^{-4}(f'' + 4f) \qquad \text{et} \qquad f'' = -4f,$$

$$f(\theta) = \mathrm{K}\cos 2(\theta - \theta_0) \qquad (\mathrm{K},\ \theta_0 = \text{const. arbitr.}).$$

Il suffira, pour l'étude géométrique, de faire $\mathrm{K} = 1$, $\theta_0 = 0$; alors

$$z = \frac{\cos 2\theta}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les lignes asymptotiques sont des cubiques gauches qui se projettent suivant les cercles

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{K}(x \pm y) = 0 \qquad (\mathrm{K} = \text{const. arbitr.}),$$

etc. (Juillet 1903.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la fonction* $p z$ *de Weierstrass construite avec les périodes* 2ω, $2\omega'$; *on suppose* ω, $\frac{\omega'}{i}$ *réelles.*

1° *Montrer qu'à deux valeurs imaginaires conjuguées de l'argument* z *correspondent deux valeurs imaginaires conjuguées de la fonction.*

2° *On pose* $Z = p z$. *Lorsque le point* z *décrit, dans son plan, une ligne* c, *le point* Z *décrit, dans son plan, une ligne correspondante* C.

Démontrer que si c *est une parallèle ou une perpendicu-*

laire à l'axe des quantités réelles du plan des z, la ligne correspondante C *est une courbe algébrique, les coordonnées d'un point d'une pareille courbe étant fonctions elliptiques d'un paramètre u.*

Ces courbes algébriques sont, en général, du quatrième degré; indiquer les cas d'exception.

3° *Trouver, dans le cas général, les asymptotes de ces courbes algébriques, et les tangentes parallèles à ces asymptotes.*

4° *Lorsque* Z *décrit l'une des courbes précédentes, les distances r_1, r_2, r_3 de ce point aux points d'affixes*

$$e_1 = \wp\omega, \qquad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \qquad e_3 = \wp\omega'$$

sont fonctions du paramètre u du 2°.

Trouver ces fonctions en employant successivement les notations de Weierstrass et celles de Jacobi.

Épreuve pratique. — *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère la surface de révolution admettant pour axe* Oz, *et, pour méridienne, la courbe*

$$9az^2 - 4x^3 = 0, \qquad y = 0.$$

Les géodésiques de cette surface tangentes à l'un des parallèles de rayon r_0 se projettent sur le plan xOy suivant des courbes que l'on appelle, dans la suite du problème, courbes (C).

1° *Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point* M *du plan xOy,* O *étant pris pour pôle. Former la relation différentielle qui lie r et θ lorsque* M *décrit l'une quelconque des courbes* (C). *Indiquer sommairement la forme de ces courbes.*

2° *Exprimer les coordonnées polaires r, θ d'un point* M *d'une courbe* (C) *en fonction d'un paramètre, en utilisant les transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques (notations de Weierstrass). Même question pour les coordonnées rectangulaires de* M.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1895.

(1900, p. 574.)

On considère l'hyperbole équilatère (H) *ayant pour sommets les foyers d'une ellipse* (E). *D'un point quelconque* P *de cette hyperbole on abaisse une des normales dont le pied est en* A. *Du centre* O *de* (E) *on abaisse la perpendiculaire* OS *sur la tangente en* A *et* OQ *sur la normale en* A. *On obtient ainsi le rectangle* OQAS. *Montrer que le produit des aires des quatre rectangles analogues correspondant aux pieds des quatre normales est une quantité constante.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ le point A. Les distances de O à la tangente et à la normale en A sont :

$$OS = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$OQ = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\text{aire OQAS} &= OS \times OQ \\ &= abc^2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = abc^2\,\frac{t}{a^2t^2 + b^2},\end{aligned}$$

en posant $\tang\varphi = t$. Si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs de t correspondant aux pieds des quatre normales issues d'un point de coordonnées x, y, nous nous proposons donc de calculer

$$P = (abc^2)^4\,\frac{t_1t_2t_3t_4}{(a^2t_1^2 + b^2)(a^2t_2^2 + b^2)(a^2t_3^2 + b^2)(a^2t_4^2 + b^2)}.$$

Or les quatre valeurs de t sont fournies par l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2x^2t^4 - 2abxyt^3 \\ \qquad + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)t^2 - 2abxyt + b^2y^2 = 0 \end{array}\right.$$

(*voir*, par exemple, *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*, par Desboves, p. 16).

Dès lors

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{b^2 y^2}{a^2 x^2}.$$

Le dénominateur de P est le produit des quatre déterminations de $\theta = a^2t^2 + b^2$, quand on y remplace successivement t par les quatre racines de (1). Pour avoir ce produit, il suffit de former la transformée en θ de (1). Or la transformée de

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

correspondant à la relation $\theta = a^2t^2 + b^2$ est

$$\begin{array}{l} A^2\theta^4 + \ldots + [\ldots]\theta \\ \qquad + [a^4E - b^2(Ca^2 - Ab^2)]^2 + a^2b^2(Bb^2 - Da^2)^2 = 0. \end{array}$$

Nous n'avons indiqué que les termes extrêmes, les seuls utiles. Le produit des quatre racines de cette équation est

$$\frac{[a^4E - b^2(Ca^2 - Ab^2)]^2 + a^2b^2(Bb^2 - Da^2)^2}{A^2}.$$

Si nous appliquons à la transformée de (1), nous avons

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} [a^4b^2y^2 - b^2(a^4x^2 + a^2b^2y^2 - a^2c^4 - a^2b^2x^2)]^2 \\ \qquad + a^2b^2(-2ab^3xy + 2a^3bxy)^2 \end{array}\right\}}{a^4x^4}.$$

Cette expression simplifiée devient

$$b^4c^4\frac{(y^2 - x^2 + c^2)^2 + 4x^2y^2}{x^4}.$$

C'est le dénominateur de P. On a donc

$$P = \frac{a^4b^4c^8}{b^4c^4}\,\frac{b^2y^2}{a^2x^2}\,\frac{x^4}{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2}$$

ou

$$P = a^2 b^2 c^4 \frac{x^2 y^2}{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2 y^2}.$$

Le point x, y étant sur (H), on a

$$x^2 - y^2 - c^2 = 0.$$

Donc

$$P = \frac{a^2 b^2 c^4}{4}.$$

Le produit est donc constant.

D'une manière générale, le lieu des points tels que le produit des aires des quatre rectangles considérés soit constant est la quartique

$$(x^2 + y^2)^2 - \lambda x^2 y^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 = 0,$$

où λ désigne une constante. On voit que pour $\lambda = 4$ cette quartique est l'hyperbole H prise deux fois.

La forme générale de cette courbe est facile à indiquer, son équation étant bicarrée par rapport à chacune des coordonnées.

1913.

(1901, p. 192.)

Trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$2x^3 = 3y^2 - 1.$$

(H.-J. Krantz.)

SOLUTION

Par le P. F. Pepin, S. J.

1. Il s'agit de trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$(1) \qquad 2x^3 = 3y^2 - 1.$$

Comme je n'ai pas la prétention de résoudre complètement cette question, je me contenterai d'indiquer deux méthodes différentes pour chercher les solutions demandées. Nous parviendrons à la solution $x = 61$, $y = 389$. On parviendrait peut-être à d'autres solutions en poursuivant les calculs indiqués. Mais il resterait toujours à décider si le nombre des solutions est fini ou infini. Je suis convaincu que celui qui résoudra cette difficulté aura trouvé quelque chose de nouveau dans la théorie des nombres.

2. *Première méthode.* — On ramène la question proposée à celle de rendre rationnelle la racine carrée d'un polynome du quatrième degré au moyen d'une valeur rationnelle de la variable.

D'abord on déduit immédiatement de l'équation (1) que x et y doivent être impairs et positifs. Puisque 3 est résidu quadratique des diviseurs de x, on conclut, par le théorème de Legendre, que ces diviseurs sont compris dans les deux formules $12l+1$, $12l+11$. Quant au nombre x, il doit être de la forme $12l+1$. En effet, le produit $2x^3$ étant représenté par la forme $(3, 0, -1)$ ainsi que le facteur 2, il faut que l'autre facteur soit représenté par la forme $(1, 0, -3)$, laquelle ne convient qu'aux nombres de la forme $12l+1$. Le cube x^3 et sa racine x sont donc l'un et l'autre de la forme $12l+1$. Posons

$$x = 12z+1.$$

Par cette substitution, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad y^2 = 1 + 24z + 2.144z^2 + 8.144z^3 = \varphi(z).$$

Cette équation admet la solution évidente $z=0$, $y=1$. Elle admet aussi une infinité de solutions en nombres rationnels. On peut obtenir ces solutions au moyen des formules que j'ai publiées, en 1877, dans les *N. L. M.* Les solutions en nombres entiers s'obtiennent alors comme cas particuliers des solutions rationnelles.

3. Nous chercherons d'abord une solution de l'équation (2) par la méthode de Fermat, en posant

$$y = 1 + 12z + hz^2$$

et en déterminant h de manière à donner trois racines nulles à l'équation

$$\begin{aligned}(1 + 12z + hz^2)^2 - \varphi(z) \\ = (2h - 144)z^2 + 8(3h - 144)z^3 + h^2z^4 = 0.\end{aligned}$$

On y parvient en prenant $h = 72$, et en supprimant le facteur z^3 on trouve

$$z = -\frac{1}{9}, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{25}{81} = y^2.$$

Connaissant deux solutions,

$$z = 0, \qquad y = 1; \qquad z = -\frac{1}{9}, \qquad y = \frac{5}{9},$$

nous pouvons employer les formules (II) (n° 3) du Mémoire cité :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} f + gz_0 + hz_0^2 = \sqrt{\varphi(z_0)}, \\ f + gz_1 + hz_1^2 = \varepsilon\sqrt{\varphi(z_1)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ g + 2hz_0 = \dfrac{\varphi'(z_0)}{2\sqrt{\varphi(z_0)}}, \\ z = \dfrac{2gh - 8.144}{-hh} - (2z_0 + z_1). \end{cases}$$

Prenant $z_0 = 0$, on a

$$\varphi(z_0) = 1, \qquad \varphi'(z_0) = 24, \qquad f = 1, \qquad g = 12.$$

La deuxième équation, pour $z_1 = -\frac{1}{9}$, devient

$$\frac{h}{81} = \pm\frac{5}{9} - 1 + \frac{12}{9}, \qquad h = -18, \qquad h = 72.$$

Pour $h = -18$ l'expression de z devient

$$z = \frac{24.18 + 8.144}{18.18} = \frac{1}{9} + \frac{44}{9} + \frac{1}{9} = 5.$$

On obtient ensuite $\sqrt{\varphi(5)}$ par la formule

$$1 + 12.5 - 18.25 = \pm\sqrt{\varphi(5)}, \qquad \sqrt{\varphi(5)} = 389.$$

La formule $x = 12z + 1$ donne la valeur correspondante

$$x = 61.$$

La seconde valeur de h, $h = 72$, donne pour z la valeur primitive $z = 0$.

4. Connaissant trois solutions :

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{5^2}{81}, \qquad \varphi(5) = 389^2,$$

on peut appliquer les formules (I) du Mémoire cité :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} f + g z_0 + h z_0^2 = \sqrt{\varphi(z_0)}, \\ f + g z_1 + h z_1^2 = \varepsilon \sqrt{\varphi(z_1)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ f + g z_2 + h z_2^2 = \varepsilon' \sqrt{\varphi(z_2)}, \qquad (\varepsilon' = \pm 1), \\ \quad z = \dfrac{8.144 - 2gh}{h^2} - (z_0 + z_1 + z_2), \\ \quad f + gz + hz^2 = \pm \sqrt{\varphi(z)}. \end{cases}$$

Les quatre premières formules font connaître une quatrième solution, z, la cinquième formule donne la valeur rationnelle de $\sqrt{\varphi(z)}$. A raison des quatre combinaisons de ε et de ε', trois solutions données z_0, z_1, z_2 en font connaître quatre; mais quelques-unes de ces solutions peuvent s'identifier avec des solutions déjà calculées. J'ai montré dans le Mémoire cité (n° 10) comment le théorème d'Abel sur les sommes d'intégrales elliptiques donne l'explication de ce fait.

5. Sans nous arrêter aux applications de ces dernières formules, reprenons le système précédent (II) pour indiquer une méthode simple qu'on peut en déduire, pour obtenir successivement une suite indéfinie de solutions de l'équation (2).

Prenons $z_0 = 0$, désignons par z_1 une solution connue, différente de 0, et par z, les solutions qu'on en déduit par les formules (II) en y prenant $\varepsilon = \pm 1$. La première équation et la troisième donnent $f = 1$, $g = 12$, de sorte que l'on a

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} 1 + 12 z_1 + h z_1^2 = \varepsilon \sqrt{\varphi(z_1)}, \qquad z = \dfrac{8.144 - 24h}{h^2} - z_1, \\ \qquad 1 + 12z + hz^2 = \pm \sqrt{\varphi(z)}. \end{cases}$$

La première formule donne la valeur de l'inconnue auxiliaire, h; la seconde détermine la nouvelle solution z et la troisième, la valeur correspondante de $y = \sqrt{\varphi(z)}$. Prenons

$$z_1 = -\frac{1}{9}, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}\right)^2.$$

Nous trouvons

$$h = \pm 45 + 12.9 - 81, \qquad h = 72, \qquad h = -18.$$

Pour $h = 72$, on a

$$z = \frac{8.144 - 24.72}{72.72} + \frac{1}{9} = \frac{-1}{9} + \frac{1}{9} = 0.$$

On retrouve la solution primitive.

Pour $h = -18$, on a

$$z = \frac{8.144 + 24.18}{18.18} + \frac{1}{9} = \frac{44}{9} + \frac{1}{9} = 5,$$

$$1 + 12.5 - 18.25 = \pm\sqrt{\varphi(5)}, \qquad \sqrt{\varphi(5)} = 389.$$

Pour $z_1 = 5$, on a

$$1 + 12.5 + h.25 = \pm 389.$$

Avec le signe inférieur on retrouvera

$$h = -18 \qquad \text{et} \qquad z = -\frac{1}{9}.$$

Avec le signe supérieur on obtient

$$25h = 308, \qquad z + 5 = \frac{(8.144.25 - 308.24)25}{308.308}.$$

6. Dans les deux applications que nous venons de faire des formules (III) une seule des deux valeurs de ε donne une solution nouvelle, l'autre ramène une solution déjà calculée. On se rend compte de ce fait en remarquant que les solutions déterminées par ces formules sont les nombres rationnels z que l'on peut associer à des nombres rationnels h de manière à vérifier l'équation

$$(3) \qquad h^2 z^2 + (24h - 8.144)z + (2h - 144) = 0.$$

A chaque valeur convenable de h cette équation fait connaître deux solutions z, z_1 dont la somme est exprimée par la formule

$$(a) \qquad z + z_1 = \frac{8.144 - 24.h}{hh}.$$

Si z_1 et h sont deux nombres rationnels vérifiant l'équation (3), la nouvelle solution z est aussi rationnelle. De même, à chaque valeur rationnelle de z l'équation (3) fait correspondre deux valeurs de h dont la somme est

$$(b)\qquad h + h_1 = \frac{24z + 2}{zz}.$$

Si l'une des deux valeurs de h est rationnelle, l'autre le sera également. Il suffit donc de connaître deux nombres rationnels h, z vérifiant ensemble l'équation (3) pour former, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b), une suite indéfinie dans laquelle chaque valeur de z sera comprise entre les deux valeurs de h qu'on peut lui associer de manière à vérifier l'équation (3).

On voit immédiatement la solution

$$h_1 = 72, \qquad z_1 = 0.$$

La formule (a) donne ensuite

$$z = \frac{8.144 - 12.144}{36.144} = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}.$$

La formule (b) donne ensuite

$$h + 72 = \frac{+24.9 - 2.81}{1}, \qquad h = 54 - 72 = -18.$$

Avec les valeurs correspondantes $z_1 = -\frac{1}{9}$, $h_1 = -18$, on déduit de la formule (a) une nouvelle valeur de h, et ainsi de suite. Nous retrouvons ainsi la méthode posthume d'Euler que j'ai exposée dans le n° 8 du Mémoire cité de 1877.

7. *Seconde méthode.* — On considère l'équation proposée comme cas particulier de l'équation

$$(4)\qquad 2x^3 = 3y^2 - z^2.$$

On exprime d'une manière générale toutes les solutions de l'équation (4) en nombres premiers entre eux. On arrive à cette conclusion que :

THÉORÈME. — *Toutes les solutions de l'équation* (4) *en* *nombres premiers entre eux sont exprimées par les deux systèmes :*

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x = f^2 - 3g^2, & y = f^3 + 9fg^2 + 3g(f^2+g^2), \\ & z = f^3 + 9fg^2 + 9g(f^2+g^2); \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} x = f^2 - 3g^2, & y = 3f(f^2+9g^2) - 15g(f^2+g^2), \\ & z = -5f(f^2+9g^2) + 27g(f^2+g^2). \end{cases}$$

Il reste à trouver les systèmes de valeurs de f et de g, entières et premières entre elles, qui déterminent pour z des valeurs égales à ± 1.

On se trouve ainsi amené à chercher les solutions en nombres entiers de chacune des deux équations

$$z = f^3 + 9fg^2 + 9g(f^2+g^2) = \pm 1,$$
$$z = -5f^3 + 27f^2g - 45fg^2 + 27g^3 = \pm 1.$$

Le lecteur trouvera dans le § XV de la *Théorie des nombres* de Legendre (I^re Partie) la méthode à suivre pour résoudre ces équations. D'après un théorème de Lagrange, les valeurs du rapport $\pm \frac{f}{g}$ qui correspondent aux minima des formes cubiques indiquées se trouvent parmi les fractions convergentes vers les racines des deux équations auxiliaires

$$t^3 - 9t^2 + 9t - 9 = 0, \qquad 5t^3 - 27t^2 + 45t - 27 = 0.$$

Comme ces développements peuvent se prolonger indéfiniment, et que, passé le second degré, leur loi est inconnue, on ne peut pas affirmer que le même minimum ne se représentera plus au delà d'une certaine limite. On peut trouver par cette méthode tous ceux des nombres f, g inférieurs à une limite donnée qui satisfont à la question, mais on ne peut pas démontrer qu'il n'y a plus de solution au delà de cette limite.

1924.

(1902, p. 96.)

Si la tangente en un point M *d'une hyperbole rencontre une des asymptotes au point* T *et si la droite qui joint* M *à l'un des foyers* F *rencontre la même asymptote en* A, *on a*

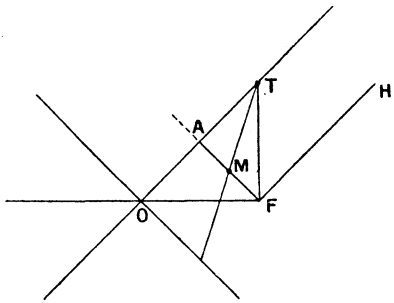
$$\mathrm{AT} = \mathrm{AF}.$$

Déduire de là le lieu des foyers des hyperboles dont on connaît une asymptote, une tangente et son point de contact. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. FRIZAC.

1. Les tangentes issues de T à l'hyperbole sont l'asymptote et la tangente MT, par suite TF est la bissectrice de l'angle MFH,



FH étant la parallèle à l'asymptote menée par le foyer. Donc

$$\widehat{MFT} = \widehat{TFH};$$

or

$$\widehat{TFH} = \widehat{FTA}$$

comme alternes internes; donc

$$\widehat{FTA} = \widehat{AFT},$$

le triangle AFT est isoscèle et

$$AF = AT.$$

2. Menons par M, point de contact de la tangente, une droite qui coupe l'asymptote en A; on obtiendra les foyers des hyperboles satisfaisant à l'énoncé par l'intersection de la droite MA et d'un cercle ayant son centre en A et pour rayon AT d'après le n° 1. On engendre ainsi une strophoïde oblique passant par M et ayant le point T pour point double (T est le point

d'intersection de la tangente et de l'asymptote) et le lieu des foyers est cette strophoïde.

Solution analytique de M. E.-N. Barisien.

1925.

(1902, p. 144.)

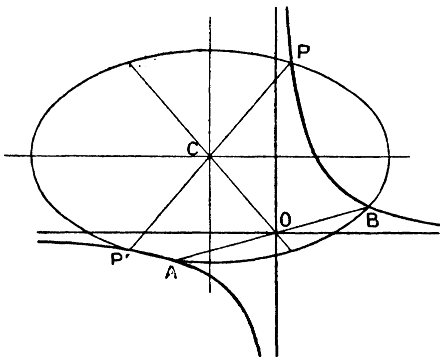
L'hyperbole équilatère ayant pour diamètre une corde AB *quelconque d'une conique* C *et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de cette conique passe par les extrémités du diamètre de* C *symétrique par rapport aux axes du diamètre conjugué de la direction de* AB.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. R.-M. Milne.

Soit PP′ le diamètre de C, qui est symétrique par rapport aux axes du diamètre conjugué de AB. La tangente à C en P fait avec les axes le même angle que AB : le cercle circonscrit



au triangle APB touche donc C en P. Il suit de là que PA et PB sont également inclinées sur les axes de C, c'est-à-dire sur les asymptotes de l'hyperbole équilatère. Donc enfin P et P′ appartiennent à cette courbe, en vertu d'une propriété bien connue.

Autre solution géométrique et solution analytique de M. Frizac.

QUESTIONS.

1977. On donne dans un plan cinq droites a, b, c, d, d' et deux points D_1, A_2 sur une droite qui passe par le point d'intersection D des droites d et d'.

On projette du point D_1 les points (bc), (ca), (ab) (¹) sur la droite d, et du point A_2 les mêmes points sur la droite d'. Soit a' la droite qui joint les deux projections du point (bc); soient de même b' et c', ...

Les huit droites a, b, c, d, a', b', c', d' forment une configuration jouissant des propriétés suivantes, dont on demande la démonstration :

1° On peut former huit groupes de six droites, les droites d'un même groupe passant par un même point, et cela conformément au Tableau suivant :

$(ab)(c'd')$	$(bc)(a'd')$	$(ca)(b'd')$	passent par un même point A_2
$(a'b')(cd)$	$(b'c')(ad)$	$(c'a')(bd)$	
$(ab)(cd)$	$(bc')(a'd)$	$(c'a)(b'd)$	» B_2
$(a'b')(c'd')$	$(b'c)(ad')$	$(ca')(bd')$	
$(ab')(c'd)$	$(b'c)(a'd)$	$(ca)(bd)$	» C_2
$(a'b)(cd')$	$(bc')(ad')$	$(c'a')(b'd')$	
$(ab')(cd')$	$(b'c')(a'd')$	$(c'a)(bd')$	» D_2
$(a'b)(c'd)$	$(bc)(ad)$	$(ca')(b'd)$	
$(ab')(cd)$	$(b'c')(a'd)$	$(c'a)(bd)$	» A_1
$(a'b)(c'd')$	$(bc)(ad')$	$(ca')(b'd')$	
$(a'b)(cd)$	$(bc')(ad)$	$(c'a')(b'd)$	» B_1
$(ab')(c'd')$	$(b'c)(a'd')$	$(ca)(bd')$	
$(ab)(cd')$	$(bc')(a'd')$	$(c'a)(b'd')$	» C_1
$(a'b')(c'd)$	$(b'c)(ad)$	$(ca')(bd)$	
$(ab)(c'd)$	$(bc)(a'd)$	$(ca)(b'd)$	» D_1
$(a'b')(cd')$	$(b'c')(ad')$	$(c'a')(bd')$	

(¹) (bc) est le point d'intersection des droites b et c.

2° Désignons respectivement par A, B, C, D les points (aa'), (bb'), (cc'), (dd'). Les trois points appartenant à l'un quelconque des seize groupes

$$\begin{array}{cccc}
AA_1A_2, & AB_1B_2, & AC_1C_2, & AD_1D_2, \\
BB_1A_2, & BA_1B_2, & BD_1C_2, & BC_1D_2, \\
CC_1A_2, & CD_1B_2, & CA_1C_2, & CB_1D_2, \\
DD_1A_2, & DC_1B_2, & DB_1C_2, & DA_1D^2
\end{array}$$

sont sur une même droite. (L. Klug.)

1978. Nous dirons que les quatre pieds des normales abaissées sur une conique d'un point quelconque de son plan forment un *quadrangle d'Apollonius*.

Quatre points pris arbitrairement dans un plan ne forment pas en général un quadrangle d'Apollonius.

Démontrer que si quatre points forment un quadrangle d'Apollonius, il en est de même des orthocentres des quatre triangles qui ont pour sommets les points donnés pris trois à trois. (R. Bricard.)

1979. On considère une quadrique et un point O sur cette quadrique. Par O passe un plan variable. On prend le point de Frégier de la section relatif au point O. Lieu de ce point? Ce lieu est en général une surface du quatrième ordre. Dans quel cas se réduit-elle à une surface du troisième ordre ou du deuxième ordre?

Quel est le lieu du même point en supposant que le plan variable soit astreint à passer par une droite fixe?

(E. Cahen.)

1980. Déterminer, de la manière la plus générale, une courbe (plane ou gauche) telle que toutes ses conchoïdes par rapport à un point de l'espace convenablement choisi soient des courbes sphériques. (R. Bricard.)

1981. Toutes les coniques réelles qui passent par le point double d'un limaçon de Pascal et lui sont tritangentes sont des ellipses égales entre elles. (R. Bricard.)

[O5j] [O6g]

SUR LES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES PSEUDOSPHÉRIQUES DE RÉVOLUTION;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

Dans une Note insérée dans ce Journal (¹), partant des formules qui lient les moments des directions principales d'une courbe gauche par rapport à une droite fixe, j'en ai déduit le théorème que voici :

Toute courbe dont les normales principales rencontrent une droite fixe jouit de la propriété que le moment de ses tangentes par rapport à cette droite est constant.

Ce théorème est applicable aux géodésiques des surfaces de révolution et l'on peut aisément reconnaître que ce n'est autre chose que le théorème de Clairaut. En effet, si nous calculons le produit du rayon d'un parallèle au point de rencontre de celui-ci avec la géodésique, par le sinus de l'angle sous lequel la géodésique coupe le méridien, nous trouverons pour résultat M_1.

(¹) *Voir* 4ᵉ série, t. II, 1902, p. 177.

Je profite de l'occasion pour faire remarquer que les résultats obtenus par M. Duporcq dans la remarque qui fait suite à ma Note (p. 181) avaient été déjà trouvés par M. Pirondini : *Rettifica di un teorema e dimostrazione di alcuni teoremi geometrici* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVIII, 1885, Napoli).

Écrivons les formules qui lient les moments

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dM_1}{dl} &= \frac{M_2}{\rho}, \\ \frac{dM_2}{ds} &= -\frac{M_1}{\rho} - \frac{M_3}{\tau} + \cos\theta_3, \\ \frac{dM_3}{ds} &= \frac{M_2}{\tau} - \cos\theta_2, \end{aligned}\right.$$

et supposons qu'il s'agisse des asymptotiques d'une surface de révolution. Faisant M_3 nul dans la troisième des formules (1) on trouve

$$M_2 = \tau \cos\theta_2$$

ou bien

$$l_2 \operatorname{tang}\theta_2 = \tau.$$

Il s'ensuit pour la courbure totale de notre surface l'expression que voici :

$$K = -\frac{1}{(l_2 \operatorname{tang}\theta_2)^2}.$$

En particulier, si τ est une constante réelle (ce qui est le cas pour une surface pseudosphérique, comme on sait), on a l'énoncé suivant :

En tout point d'une ligne asymptotique d'une surface pseudosphérique de révolution, le produit de la plus courte distance entre la normale principale à cette ligne asymptotique, au point considéré, et l'axe de la surface, par la tangente trigonométrique de l'angle de ces directions, est égal au rayon de torsion τ de l'asymptotique.

L'élimination de M_1, M_2, M_3 des formules (1) nous conduit à la relation

$$\rho \cos\theta_3 = \text{const.},$$

c'est-à-dire :

Le long d'une asymptotique d'une surface pseudo-

sphérique de révolution, le produit de son rayon de première courbure par le cosinus de l'angle que sa binormale (normale à la surface) fait avec l'axe est constant.

Au moyen de cette propriété on pourrait calculer les équations intrinsèques des asymptotiques des trois types de surfaces pseudosphériques de révolution. Elles rentrent dans la classe de courbes définies par l'équation

$$2\rho \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} = c \qquad (c \text{ const.}),$$

le rayon T étant une constante. Cette équation se déduit des formules de Serret entre lesquelles on élimine les cosinus.

[M³6g]

SUR UNE CERTAINE COURBE GAUCHE DU SIXIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

J'ai été conduit, à l'occasion de mes recherches sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche [1], à considérer la courbe d'intersection de la surface cubique

$$XYZ + K^2(X + Y + Z) = 0$$

avec le cône

$$YZ + ZX + XY = 0.$$

Cette courbe constitue, avec les trois droites à l'infini sur la surface cubique, l'intersection de cette surface

---

[1] *Bull. Soc. Math. de France*, t. XXVII, 1899.

avec son hessien; elle possède des propriétés simples qu'il me semble intéressant d'indiquer.

1. On voit immédiatement que la courbe est du sixième ordre, et qu'elle possède quatre points doubles : l'un à l'origine, les autres à l'infini sur les axes de coordonnées. Les surfaces dont elle est l'intersection ayant pour centre l'origine et pour plans de symétrie les plans

$$Y = Z, \qquad Z = X, \qquad X = Y,$$

la courbe admet ces symétries. Comme les plans passent par le centre, elle admet comme axes de symétrie les perpendiculaires à ces plans, autrement dit les trois droites d'intersection du plan

$$X + Y + Z = 0$$

avec les plans de coordonnées.

2. On peut obtenir facilement les expressions des coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre arbitraire en remarquant que les équations des surfaces considérées peuvent s'écrire

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z}\frac{1}{X} + \frac{1}{X}\frac{1}{Y} + \frac{1}{K^2} = 0,$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = 0.$$

On a entre $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$ des relations analogues à celles qui existent entre les racines qui donnent $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$. Un calcul facile conduit alors aux formules

$$X = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\varphi}, \qquad Y = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad Z = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)},$$

φ étant un paramètre variable. On déduit de là immédiatement que les asymptotes de la courbe sont les droites

$$\begin{cases} Y = K, \\ Z = -K, \end{cases} \quad \begin{cases} Y = -K, \\ Z = K, \end{cases} \quad \begin{cases} Z = K, \\ X = -K, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = -K, \\ X = K, \end{cases} \quad \begin{cases} X = K, \\ Y = -K, \end{cases} \quad \begin{cases} X = -K, \\ Y = K. \end{cases}$$

Ces six droites sont situées sur la quadrique

$$YZ + ZX + XY + K^2 = 0;$$

elles appartiennent trois par trois aux deux systèmes de génératrices.

3. On peut obtenir très facilement les résultats précédents en remarquant que, si l'on effectue la transformation

$$XX' = YY' = ZZ' = K^2,$$

on obtient, comme transformées de la surface cubique et du cône, la quadrique de révolution

$$Y'Z' + Z'X' + X'Y' + K^2 = 0$$

et le plan

$$X' + Y' + Z' = 0.$$

La courbe considérée a pour transformée un cercle; elle admet les symétries de la figure formée par ce cercle et les plans de coordonnées; et l'on retrouve l'expression des coordonnées au moyen d'un paramètre variable en remarquant que les coordonnées d'un point du cercle sont données par

$$\frac{X}{\cos\varphi} = \frac{Y}{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{Z}{\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{K}{\cos\frac{\pi}{6}}.$$

[$M^2 3 h \beta$]

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE A QUATRE POINTS DOUBLES;

Par M. Ch. BIOCHE.

On sait que le lieu des points, tels que leurs projections sur les côtés d'un triangle soient en ligne droite, est le cercle circonscrit à ce triangle. Le lieu des points de l'espace tels que leurs projections sur les faces d'un tétraèdre soient dans un plan, est une surface du troisième ordre ayant pour points doubles les sommets de ce tétraèdre; cette surface n'est pas la surface la plus générale du troisième ordre à quatre points doubles, on peut la caractériser par une propriété simple que je vais indiquer après avoir fait sur les coniques circonscrites à un triangle et les surfaces du troisième ordre à quatre points doubles quelques remarques qui peuvent donner lieu à des exercices intéressants.

1. L'équation générale des coniques circonscrites à un triangle peut s'écrire, si l'on prend ce triangle comme triangle de référence,

$$(\Gamma) \qquad \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{Y} + \frac{\gamma}{Z} = 0.$$

Les tangentes aux sommets coupent les côtés opposés en des points situés sur la droite

$$(\Delta) \qquad \frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} + \frac{Z}{\gamma} = 0.$$

La connaissance de la droite Δ entraîne celle de la conique Γ. Si X, Y, Z représentent les distances d'un point aux côtés BC, CA, AB du triangle de référence, si a, b, c sont les côtés de ce triangle, la droite Δ coupe le côté AB en un point M tel que

$$\frac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MB}}} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

En particulier, la conique Γ est le cercle circonscrit au triangle si

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

c'est-à-dire, si Δ divise chaque côté du triangle dans le rapport des carrés des côtés qui aboutissent à ses extrémités.

2. L'équation générale des surfaces du troisième ordre à quatre points doubles peut s'écrire, si l'on prend pour tétraèdre de référence le tétraèdre formé par les points doubles,

$$(\Sigma) \qquad \frac{\alpha}{\mathrm{X}} + \frac{\beta}{\mathrm{Y}} + \frac{\gamma}{\mathrm{Z}} + \frac{\delta}{\mathrm{T}} = 0.$$

Le plan tangent en un point pris sur une arête du tétraèdre, les sommets exceptés, est fixe quelle que soit la portion du point sur l'arête; par exemple, le long de l'arête $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$, le plan tangent est

$$\frac{\mathrm{X}}{\alpha} + \frac{\mathrm{Y}}{\beta} = 0.$$

Les plans tangents correspondant à deux arêtes opposées se coupent suivant une droite située sur la surface; on obtient ainsi les trois droites qui, avec le système des arêtes du tétraèdre, constituent l'ensemble des droites de la surface Σ. Ces trois droites sont situées dans le plan

$$(\Pi) \qquad \frac{\mathrm{X}}{\alpha} + \frac{\mathrm{Y}}{\beta} + \frac{\mathrm{Z}}{\gamma} + \frac{\mathrm{T}}{\delta} = 0;$$

ce sont les diagonales du quadrilatère complet que le tétraèdre détermine sur ce plan.

La connaissance du plan (Π) entraîne celle de la surface Σ. Si X, Y, Z, T représentent les distances d'un point aux faces BCD, ACD, ADC du tétraèdre; si a, b, c, d sont les aires de ces faces, le plan Π coupe l'arête AB en un point M tel que

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

3. Cela posé, on peut démontrer que la surface lieu des points tels que leurs projections sur les côtés du tétraèdre de référence soient dans un plan correspond au cas où

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d},$$

c'est-à-dire si Π divise chaque arête du tétraèdre dans le rapport des carrés des faces qui aboutissent à ses extrémités. Il suffit de former l'équation de la surface Σ lieu des points considérés et de reconnaître la signification géométrique des coefficients de cette équation.

Il serait facile de faire quelques autres rapprochements entre les propriétés du cercle circonscrit à un triangle et de la surface de troisième ordre, lieu des points dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont dans un même plan. Par exemple, si dans un triangle on considère le point tel que la somme des carrés de ses distances aux côtés est minima (point de Lemoine), les droites qui joignent ce point aux sommets coupent les côtés aux conjugués des points situés sur Δ. Si dans un tétraèdre on prend le point tel que la somme des carrés de ses distances aux faces soit minima, les plans passant par les arêtes et ce point coupent les arêtes opposées aux conjugués des points situés dans Π.

[O5h]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES;

PAR M. FÉLIX GODEY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Sous ce titre, M. Bricard a établi récemment, par la voie géométrique, un théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de courbure d'une surface quelconque (*voir* l'énoncé dans le numéro d'août des *N. A.*, p. 360). Suivant le désir exprimé par la Rédaction, je vais donner une démonstration analytique du même théorème.

Je suppose la surface S rapportée à ses lignes de courbure

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.};$$

nous avons donc par hypothèse :

1°

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \equiv 0;$$

2° x, y, z vérifient l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = A(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ceci posé le plan osculateur aux courbes $v = \text{const.}$ aux différents points d'une même courbe $u = \text{const.}$ aura pour équation

$$(X - x)(y'_u z''_{u^2} - z'_u y''_{u^2}) + (Y - y)(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) \\ + (Z - z)(x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) = 0.$$

Ce plan contient un paramètre variable v; il enveloppe donc une développable et, pour avoir la génératrice T correspondant au point m, il faut simplement chercher la caractéristique de ce plan ; en dérivant par rapport à v l'équation ci-dessus on a

$$(X - x)(y''_{uv} z''_{u^2} + y'_u z'''_{u^2 v} - z''_{uv} y''_{u^2} - z'_u y'''_{u^2 v}) + \ldots = 0.$$

Par suite, les cosinus directeurs de l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la génératrice T, seront proportionnels à

$$\begin{aligned} a = \quad & (z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x''_{uv} y''_{u^2} + x'_u y'''_{u^2 v} - y''_{uv} x''_{u^2} - y'_u x'''_{u^2 v}) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z''_{uv} x''_{u^2} + z'_u x'''_{u^2 v} - x''_{uv} z''_{u^2} - x'_u z'''_{u^2 v}), \\ b = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais de la relation

$$\theta''_{uv} = A\theta'_u + B\theta'_v$$

on déduit, en dérivant par rapport à u,

$$\theta'''_{u^2 v} = A\theta''_{u^2} + AB\theta'_u + B^2\theta'_v + A'_u\theta'_u + B'_u\theta'_v ;$$

d'où, en remplaçant x''_{uv}, y''_{uv}, z''_{uv}, $x'''_{u^2 v}$, $y'''_{u^2 v}$, $z'''_{u^2 v}$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} a = (B'_u + B)\,[&(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x'_u y'_v - y'_u x'_v) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z'_u x'_v - x'_u z'_v)] \\ + B[&(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x'_v y''_{u^2} - y'_v x''_{u^2}) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z'_v x''_{u^2} - x'_v z''_{u^2})]. \end{aligned}$$

Développant et simplifiant, on obtient par un calcul régulier

$$a = [B x''_{u^2} - (B^2 + B'_u) x'_u] \times D,$$

où

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} ;$$

et, par permutation circulaire,

$$b = [B y''_{u^2} - (B^2 + B'_u) y'_u] \times D,$$
$$c = [B z''_{u^2} - (B^2 + B'_u) z'_u] \times D.$$

Nous aurons de même, pour quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la génératrice T′,

$$a' = A x''_{v^2} - (A^2 + A'_v) x'_v,$$
$$b' = A y''_{v^2} - (A^2 + A'_v) y'_v,$$
$$c' = A z''_{v^2} - (A^2 + A'_v) z'_v.$$

Il suffit donc de démontrer l'identité

$$\Sigma [B x''_{u^2} - (B^2 + B'_u) x'_u] [A x''_{v^2} - (A^2 + A'_v) x'_v] = 0;$$

c'est-à-dire, en tenant compte de

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

l'identité

$$\Omega = AB \Sigma (x''_{u^2} x''_{v^2}) - A(B^2 + B'_u) \Sigma (x'_u x''_{v^2}) - B(A^2 + A'_v) \Sigma (x'_v x''_{u^2}) = 0.$$

Nous allons déduire de la relation

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

les valeurs de $\Sigma x''_{u^2} x''_{v^2}$; $\Sigma x'_u x''_{v^2}$; $\Sigma x'_v x''_{u^2}$; pour cela dérivons cette égalité par rapport à u, on obtient

$$\Sigma x'_v x''_{u^2} = - AE,$$

où $E = \Sigma x'^2_u$.

On a de même, en dérivant par rapport à v,

$$\Sigma x'_u x''_{v^2} = - BG,$$

où $G = \Sigma x'^2_v$.

Dérivons encore par rapport à v la première des deux équations ci-dessus, on a

$$\Sigma x''_{v^2} x''_{u^2} + \Sigma x'_v x'''_{u^2 v} = - A'_v E - AE'_v,$$

d'où, tout calcul régulier fait, en remplaçant $x'''_{u^2 v}$ par sa valeur obtenue précédemment,

$$\Sigma x''_{v^2} x''_{u^2} = -(B^2 + B'_u)G - A^2 E - A'_v E.$$

Remplaçons enfin, dans Ω, les trois Σ par les valeurs qui viennent d'être obtenues, il vient :

$$\Omega = - AB[(B^2 + B'_u)G + (A^2 + A'_v)E]$$
$$+ A(B^2 + B'_u)BG + B(A^2 + A'_v)AE = 0.$$

C. Q. F. D.

Note de la Rédaction. — Nous avons reçu également de M. Jamet une démonstration analytique à peu près identique à la précédente, et de M. Genty une démonstration fondée sur l'emploi du calcul vectoriel.

[I22a]

SUR UNE NOTE DE M. FONTENÉ RELATIVE AUX ENTIERS ALGÉBRIQUES DE LA FORME $x + y\sqrt{-5}$;

Par M. E. Cahen.

M. Fontené, dans une Note publiée dans ce Recueil (4e série, t. III, p. 209), a indiqué un moyen d'étendre aux entiers de la forme $x + y\sqrt{-5}$ (x, y entiers ordinaires) les lois de la divisibilité des nombres entiers ordinaires.

Il suffit de leur adjoindre les nombres

$$\frac{2x + (1 + \sqrt{-5})y}{\sqrt{2}}.$$

En particulier le théorème fondamental :

Tout nombre n'est décomposable que d'une seule façon en facteurs premiers,

s'applique dans ces conditions.

C'est ce qu'annonce M. Fontené, mais il ne le démontre pas, parce que, m'a-t-il dit, sa démonstration est compliquée. En voici une très simple que je propose.

Considérons un ensemble de nombres imaginaires tels que le produit de deux nombres appartenant à cet ensemble y appartienne aussi.

Représentons ces nombres par des points à la façon ordinaire (le point $a + bi$ étant représenté par le point de coordonnées a, b, dans un système d'axes rectangulaires). Supposons que l'ensemble de ces points jouisse des deux propriétés suivantes :

1° *Étant donné un point quelconque du plan il y a au moins un point de l'ensemble qui en est à une distance plus petite que* 1.

2° *Le nombre des points dont la distance à l'origine est plus petite qu'une quantité donnée est fini.*

Il suffit alors de répéter le raisonnement fait aux n^{os} 457 et 463 de nos *Éléments de la Théorie des nombres* sur les entiers de la forme $x + y\sqrt{-1}$, pour montrer qu'il existe un algorithme du plus grand commun diviseur; d'où suivent toutes les conséquences du n° 463 et, en particulier, le théorème fondamental énoncé plus haut.

Représentons donc l'ensemble des nombres

$$x + y\sqrt{-5} \quad \text{et} \quad \frac{2x + (1 + \sqrt{-5})y}{\sqrt{2}};$$

la seconde propriété est évidente. Pour démontrer la première, ne considérons que les nombres de la seconde classe.

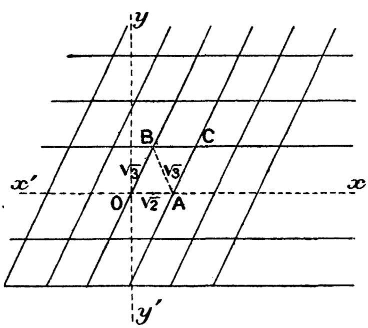
Si la propriété à démontrer est vraie pour ces nombres, elle l'est, *a fortiori*, pour l'ensemble des nombres des deux classes.

Or les nombres

$$\frac{2x + (1 + \sqrt{-5})y}{\sqrt{2}}$$

sont représentés par les sommets d'un réseau de parallélogrammes égaux disposés comme l'indique la figure 1.

Fig. 1.



Dans le parallélogramme OABC qui sert de base au réseau, les sommets O, A, B ont pour coordonnées respectivement

$$(0, 0), \quad (0, \sqrt{2}), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right).$$

Les dimensions de ce parallélogramme sont complètement fixées par les données suivantes :

$$OA = \sqrt{2}, \qquad OB = \sqrt{3}, \qquad AB = \sqrt{3}.$$

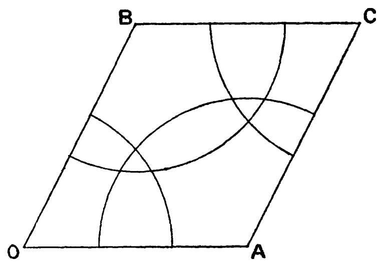
Et tout revient à démontrer que :

Tous les points de l'intérieur d'un parallélogramme ayant pour côtés $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, *et pour petite diagonale* $\sqrt{3}$, *sont distants de l'un au moins des sommets de moins de* 1.

Nous laissons au lecteur le soin de le démontrer.

D'ailleurs une figure suffit pour constater que quatre cercles de rayon 1, décrits des quatre sommets comme centres, couvrent tout le parallélogramme (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les résultats exposés par M. Fontené se généralisent d'ailleurs pour tous les entiers algébriques du second degré. C'est ce qu'on peut voir dans *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* de M. Klein [t. II, p. 94 et suiv. (Göttingen, 1897)].

L'idée fondamentale est la même que celle de M. Fontené. Elle consiste à considérer ensemble toutes les formes quadratiques de même déterminant, puis à former certains nombres algébriques dont ces formes sont les normes. C'est l'ensemble de ces nombres qui obéit aux lois de la divisibilité ordinaire.

[O8]

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE GRANDEUR INVARIABLE ASSUJETTIE A TROIS CONDITIONS;

PAR M. R. BRICARD.

1. Quand une figure (F) de grandeur invariable est assujettie à trois conditions seulement, sa position dans l'espace dépend de trois paramètres indépendants et, en général, un point de (F) peut être amené à coïncider avec un point quelconque donné dans l'espace (sous la réserve de certaines conditions de réalité, bien entendu). Il peut y avoir exception pour certains points de (F), que les conditions du déplacement obligent à rester sur des surfaces bien définies : ainsi, la figure (F) peut être astreinte précisément à ce que *trois* de ses points restent sur des surfaces données. On peut encore considérer le *déplacement à trois paramètres* d'un trièdre trirectangle dont les faces touchent une quadrique donnée (ou même trois quadriques homofocales) : le sommet du trièdre reste sur une sphère, comme il est bien connu.

Un théorème dû à M. Mannhein [1] apprend que, pour les ∞^3 déplacements infiniment petits que (F) peut recevoir à partir d'une de ses positions, il existe ∞^2 points de cette figure qui restent chacun sur un élément de surface bien déterminé : ce sont les points d'un certain hyperboloïde.

Cet hyperboloïde peut devenir indéterminé dans certains cas, et alors tous les points de (F) restent sur des

(1) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 313.

éléments de surface bien déterminés, pour tous les déplacements infiniment petits dont il s'agit.

Il est naturel de se poser la question suivante, et ce sera l'objet de cette Note : peut-il arriver que la particularité dont il a été question en dernier lieu s'étende à tous les déplacements *finis* de (F)? Autrement dit :

Une figure (F) *de grandeur invariable est assujettie à trois conditions seulement. Ces conditions peuvent-elles être choisies de telle manière que tout point de* (F) *soit astreint à rester sur une certaine surface?*

Or, on voit tout de suite une réponse à cette question : quand une figure est assujettie à avoir un point fixe, trois conditions seulement lui sont imposées, et chaque point de cette figure reste sur une sphère (ou sur un plan, si le point fixe est à l'infini).

L'étude qui va suivre établira que cette solution est la seule.

2. Considérons une figure (F), de grandeur invariable, assujettie à trois conditions telles que chaque point de (F) soit astreint à rester sur une certaine surface. Soient a, b, c trois points appartenant à (F), *non en ligne droite,* et désignons par (A), (B), (C) les surfaces sur lesquelles ils restent respectivement (*surfaces trajectoires*). Si ces points ne sont pas choisis d'une façon particulière, chacun d'eux peut occuper une position arbitraire sur sa surface trajectoire [1]; on peut

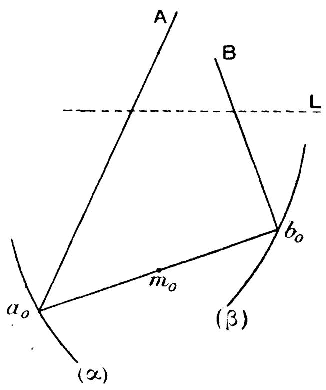
[1] En effet, si l'on ne pouvait trouver trois points tels que chacun se déplace librement sur sa surface trajectoire, il faudrait en conclure que chaque point de (F) décrit une courbe, et il est immédiatement visible qu'il n'existe pas de déplacement à trois paramètres (ni même à deux) tel que chaque point de la figure mobile décrive une courbe.

supposer que les trois conditions imposées à (F) sont précisément que les points a, b, c restent respectivement sur (A), (B), (C).

Soit m un point de la droite ab : ce point doit rester sur une surface (M); mais il est clair que le déplacement du point m résulte uniquement de sa liaison avec les points a et b : la condition imposée au point c n'intervient en rien dans la définition de ce déplacement. Nous sommes ainsi amenés à la question suivante, plus simple que le problème proposé.

Un segment ab de longueur constante se déplace de telle manière que ses extrémités a et b restent respectivement sur des surfaces données (A) *et* (B). *Dans quel cas ces deux conditions suffisent-elles à astreindre un point quelconque m de ab à rester aussi sur une surface déterminée* (M)?

Soit $a_0 b_0$ (figure ci-dessous) l'une des positions que



peut prendre le segment mobile ab. On peut déplacer le segment ab de telle manière que le point a décrive une courbe *quelconque* (α) tracée sur (A) et passant par a_0, et que le point b décrive une courbe *quelconque* (β)

tracée sur (B) et passant par b_0. Le point m, actuellement situé en m_0 décrit dans ces conditions une trajectoire déterminée (μ). Le plan (P_μ) normal à cette trajectoire au point m_0, passe comme l'on sait par la droite L commune aux plans (P_a) et P_b), normaux respectivement à (α) en a_0 et à (β) en b_0.

Les deux plans (P_a) et (P_b) contiennent respectivement la normale A à (A) au point a_0 et la normale B à (B) au point b_0. Si ces deux normales ne se rencontrent pas, à distance finie ou infinie, on peut évidemment disposer des courbes *arbitraires* (α) et (β) de telle manière que les plans (P_a) et (P_b) rencontrent respectivement les droites A et B en des points quelconques donnés *a priori*. La droite L commune à ces deux plans sera une droite quelconque s'appuyant sur A et sur B, et le plan (P_μ) un plan quelconque passant par m_0.

Ainsi, dans le cas où les normales A et B ne se rencontrent pas, le point m peut se déplacer à partir de m_0 normalement à un plan quelconque. Le point m n'a donc certainement pas de surface trajectoire déterminée.

Il est donc nécessaire que A et B se rencontrent, à distance finie ou infinie. Réciproquement, si cette condition est remplie, et si l'on désigne par i le point de rencontre de ces droites, on voit que toutes les trajectoires possibles du point m à partir de m_0 seront normales à la droite $m_0 i$. Autrement dit, pour tous les déplacements possibles du segment ab à partir de la position $a_0 b_0$, le point m reste sur un élément de surface bien déterminé, normal à la droite $m_0 i$.

Il faut que cette circonstance se présente pour toutes les positions possibles de la droite ab. Voici donc le problème qui se pose :

Trouver deux surfaces (A) *et* (B) *telles que si ab est un segment quelconque, de longueur convenable dont* *les extrémités a et b se trouvent respectivement sur ces surfaces, la normale* A *à* (A) *en* a, *et la normale* B *à* (B) *en* b *se rencontrent.*

Fixons pour un moment le point a en a_0 sur (A) : le point b peut alors décrire une certaine courbe (β') intersection de (B) et d'une sphère ayant son centre en a_0. Soit b_0 un point quelconque de cette courbe. La droite B, normale à (B_0) en b doit par hypothèse rencontrer A, normale à (A_0) en a. Mais B détermine avec $a_0 b_0$ le plan normal à (β') en b_0. La courbe (β') est donc telle que tous ses plans normaux contiennent A : c'est un cercle d'axe A ([1]).

Ce raisonnement ne tombe en défaut que si B et A sont confondues, c'est-à-dire si les surfaces (A) et (B) sont parallèles. S'il en est ainsi, considérons un point c de la figure (F), non situé sur la droite ab; ce point c ne décrit certainement pas une surface parallèle à (A), puisque ab n'est pas normale à (A). On remplacera dans le raisonnement le point b par le point c, et les conclusions seront de nouveau légitimes.

A chaque point a_0 de (A) correspond ainsi un cercle (β') tracé sur (B) [il est bien évident qu'à deux points au plus de (A) peut correspondre le même cercle de (B)]. La surface (B) doit donc contenir des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue. *C'est nécessairement une sphère,* car il n'y a pas d'autre surface jouissant d'une telle propriété ([2]). On voit en outre que toutes les droites telles que A passent par le centre de cette sphère : (A) est donc aussi une sphère concentrique à (B).

([1]) Ce pourrait aussi être une droite isotrope rencontrant A : mais je me borne aux déplacements réels.

([2]) *Voir* le n° 3.

Ainsi les points a et b décrivent deux sphères concentriques : mais ce sont deux points quelconques de (F). Donc tous les points de (F) restent sur des sphères concentriques, et cette figure a un point fixe. Le seul déplacement répondant à la question est bien celui qui avait été signalé au début.

3. Vers la fin du n° 2, je me suis appuyé sur la proposition suivante :

La seule surface contenant des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue, est la sphère.

Voici une démonstration de ce théorème :

Soient (S) une surface contenant des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue, Γ l'un de ces cercles, (P) son plan. Les plans (P) dépendent aussi de deux paramètres : en effet, s'ils dépendaient d'un seul paramètre, chaque plan (P) contiendrait une infinité *continue* de sections circulaires de (S), ce qui est absurbe [à moins que le point (P) ne soit fixe, et que (S) ne se réduise à ce plan ; or, le plan est une sphère particulière]. Les plans (P) enveloppent donc une surface non développable (Σ).

Considérons un cercle particulier Γ_0 et soit (P_0) son plan ; (P_0) peut couper la surface (S) suivant une courbe Γ'_0 en plus du cercle Γ_0. Désignons par l_1, m_1, ..., p les points d'intersection éventuels de Γ_0 et de Γ'_0. Déplaçons maintenant le plan (P), à partir de la position (P_0), de telle manière qu'il reste tangent à la surface (Σ), et en l'assujettissant à une condition continue quelconque C. Dans chacune de ses positions, le plan (P) coupe, au moins partiellement, la surface (S) suivant un cercle Γ, dont deux points, réels ou imaginaires, appartiennent à l'une des courbes Γ_0, Γ'_0. Ces deux points appartiennent aussi à la droite D, commune aux plans (P) et (P_0).

Si l'on rapproche indéfiniment le plan (P) du plan (P_0), la droite D tend vers une position limite D_0 [caractéristique du plan (P_0)]; cette droite D_0 est simplement assujettie à passer par le point de contact de (P_0) et de (Σ), puisque la condition C est arbitraire. Je puis donc supposer que D_0 ne contient aucun des points l, m, ..., p, *à moins que l'un de ces points ne soit justement le point de contact de* (P_0) *et de* (Σ).

Mais, si cette dernière circonstance se présente, quel que soit le plan (P_0), c'est que tous les points de (Σ) appartiennent à (S); ces deux surfaces sont donc confondues, et les plans qui déterminent dans (S) des sections circulaires sont ses plans tangents. Chacun des cercles de (S) est donc évanouissant; autrement dit (S) admet deux systèmes de génératrices isotropes et ne peut être qu'une sphère.

Écartons ce cas. Le cercle Γ, ai-je dit, coupe la droite D en deux points qui appartiennent au cercle Γ_0 ou à la courbe Γ'_0, et ces points se trouvent sur la droite L. Quand le plan (P) vient se confondre avec le plan (P_0), le cercle Γ tend vers le cercle Γ_0; les deux points en question deviennent à la limite les points d'intersection de Γ_0 et de L_0 et sont, je l'ai supposé, distincts de tous les points l, m, ..., p. En vertu de la continuité, cela ne peut avoir lieu que si, pour une position (P) quelconque, ces deux points appartiennent à Γ_0 et non à Γ'_0.

La conclusion est donc celle-ci : les deux cercles Γ_0 et Γ ont deux points communs i et i'. Les plans tangents à (S) en chacun de ces deux points sont déterminés par les tangentes aux cercles Γ_0 et Γ_1; il est donc clair, par raison de symétrie, que les normales à (S) aux points i et i' se rencontrent.

Mais les deux points i et i' sont *quelconques* sur (S) : en effet, ce sont les points communs à (S) et à deux plans (P_0) et (P), dont chacun est doublement indéterminé. On arrive donc à cette conclusion que les normales à (S), en deux quelconques de ses points, se rencontrent.

Cette propriété définit bien une sphère, car elle revient à celle-ci : toutes les normales à (S) passent par un point fixe.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1903. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On considère deux surfaces du second ordre (P), (Q) *définies en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$\text{(P)} \qquad y^2 - zx - a^2 = 0,$$

$$\text{(Q)} \qquad 2y^2 - x^2 - zx - ay = 0,$$

où a désigne une constante. Soit (C) *la courbe d'intersection de ces deux surfaces.*

I. *Former les équations des projections orthogonales de cette courbe* (C) *sur le plan des xy et sur le plan des zx. Construire ces courbes.*

II. *Considérant, en particulier, la projection de* (C) *sur le plan des zx, on déterminera l'aire comprise entre l'axe des x, la branche supérieure de la courbe* *et les droites qui, dans ce plan, ont pour équations*

$$x = a, \qquad x = a\sqrt{3}.$$

III. *Soit* M *un point de* (C); *par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface* (P) *qui rencontrent la courbe* (C) *en deux points* M_1 *et* M'_1, *autres que* M. *Quel est le lieu* (R) *de la droite* $M_1M'_1$ *quand le point* M *décrit la courbe* (C)? *De quoi se composent les intersections de la surface* (R) *avec chacune des surfaces* (P) *et* (Q)?

IV. *Par le point* M_1, *précédemment défini, passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* M_1M; *soit* M_2 *le point d'intersection, autre que* M_1, *de cette génératrice de la courbe* (C); *par le point* M_2 *passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* M_2M_1; *soit* M_3 *le point d'intersection, autre que* M_2, *de cette génératrice et de la courbe* (C); *on continue de la même façon, ... Démontrer que la ligne polygonale* $MM_1M_2\ldots$ *se ferme et qu'il en est de même de la ligne polygonale obtenue par la même construction en remplaçant simplement le point* M_1 *par le point* M'_1.

I. L'équation de la projection de la courbe (C) sur le plan des xy est

$$y^2 - x^2 - ay + a^2 = 0.$$

Cette projection est une hyperbole équilatère facile à construire (*fig.* 1).

L'équation de la projection sur le plan des zx est

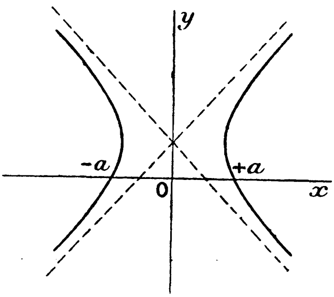
$$(zx + 2a^2 - x^2)^2 = a^2(zx + a^2).$$

En résolvant par rapport à z on trouve

$$z = \frac{2x^2 - 3a^2 \pm a\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{2x}.$$

Pour construire cette courbe remarquons d'abord que l'origine est centre. Il suffit alors de donner à x des valeurs positives pour avoir la moitié de la courbe dont on déduira le reste par symétrie. Pour que z soit réel, il faut que x soit supérieur à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. On fera donc varier x de $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à $+\infty$. A chacun des signes du radical correspond une branche de courbe. Pour avoir les deux asymptotes, il suffit de développer le radical suivant les puissances décroissantes de x. Les premiers termes

Fig. 1.



des développements des deux valeurs de z sont ainsi

$$z = x \pm a - \frac{3a^2}{2x} + \dots$$

Les deux asymptotes sont donc les deux droites

$$z = x + a \qquad \text{et} \qquad z = x - a,$$

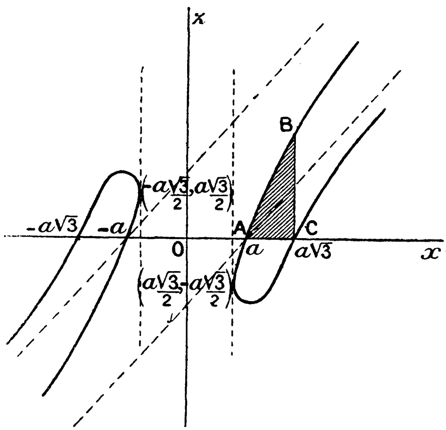
et, de plus, le développement montre que la courbe $(x > 0)$ est au-dessous de ses asymptotes.

La courbe coupe l'axe Ox aux points d'abscisses $\pm a$ et $\pm a\sqrt{3}$.

Ces renseignements suffisent pour tracer la courbe (*fig.* 2) qu'on peut d'ailleurs avoir avec plus de précision en prenant les dérivées des valeurs de z.

II. L'aire cherchée est l'aire du triangle mixti-

Fig. 2.



ligne ABC (*fig.* 2) et s'obtient en calculant l'intégrale

$$S = \int_a^{a\sqrt{3}} z\,dx,$$

où l'on prend pour z la valeur qui correspond au signe $+$ devant le radical, afin d'avoir la branche supérieure AB.

On a alors

$$S = \int_a^{a\sqrt{3}} \left(x - \frac{3a^2}{2x} + \frac{a}{2x}\sqrt{4x^2 - 3a^2}\right) dx.$$

La seule difficulté de ce calcul est la recherche de l'intégrale indéfinie

$$J = \int \frac{a}{2x}\sqrt{4x^2 - 3a^2}\,dx.$$

Pour la calculer, posons

$$\sqrt{4x^2 - 3a^2} = t,$$

et elle devient

$$J = \int \frac{at^2\,dt}{2(3a^2 + t^2)} = \int \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2(3a^2 + t^2)}\right) dt$$

$$= \frac{a}{2}t - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{a\sqrt{3}}.$$

En revenant aux anciennes variables et portant dans S, on a

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\log x + \frac{a}{2}\sqrt{4x^2 - 3a^2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{a\sqrt{3}}\right)_a^{a\sqrt{3}}.$$

Tous calculs faits, on trouve

$$S = \left(2 - \frac{3}{4}\log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\right)a^2.$$

III. Pour traiter les deux dernières Parties, remarquons que l'hyperboloïde (P) a deux génératrices

$$x = 0, \qquad y = \pm a,$$

parallèles à Oz. Il en résulte que les projections des génératrices sur le plan xOy passeront par l'un des deux points $A(x = 0, y = a)$ ou $A'(x = 0, y = -a)$.

Soient alors $x'y'z'$ les coordonnées de M, sa projection m (*fig.* 3) sur le plan des xy sera située sur l'hyperbole et l'on aura

$$(1) \qquad x'^2 = y'^2 - ay' + a^2.$$

Les projections des génératrices qui passent par le point M de l'espace seront les droites mA et mA' (*fig.* 3). La droite mA a pour équation

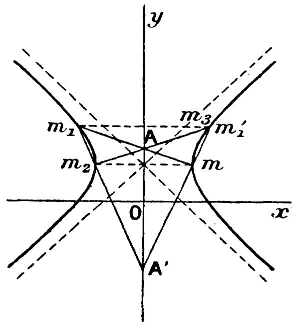
$$(2) \qquad \frac{y - a}{y' - a} = \frac{x}{x'},$$

elle coupe l'hyperbole en un second point m_1 qui est la projection du point M_1 de l'espace. L'équation aux y des points d'intersection de la droite mA et de l'hyperbole est alors

$$(y^2 - ay + a^2)(y' - a)^2 - (y'^2 - ay' + a^2)(y - a)^2 = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est égal à a^2. Comme l'une des racines est y' l'autre est égale à $\frac{a^2}{y'}$. C'est l'ordonnée de m_1. Son abscisse est fournie par

Fig. 3.



l'équation (2) où l'on donne à y la valeur $\frac{a^2}{y'}$. On trouve ainsi pour les coordonnées x_1 et y_1 de m_1

$$x_1 = -\frac{ax'}{y'}, \qquad y_1 = \frac{a^2}{y'}.$$

L'ordonnée z_1 du point M_1 de l'espace est ensuite formée par l'équation de (P)

$$z_1 = \frac{y_1^2 - a^2}{x_1} = \frac{a(y'^2 - a^2)}{x'y'}.$$

En joignant le point m (*fig.* 3) au point A′, on a la projection de la seconde génératrice de (P) qui passe en M. Cette projection coupe l'hyperbole en un second point m'_1 qui est la projection du point M'_1 de l'espace cherché.

Il est inutile de refaire le calcul, car, puisque le point A' remplace le point A, il n'y a qu'à changer a en $-a$ dans les formules qui donnent les coordonnées de M_1 pour avoir celles de M'_1.

On trouve ainsi, pour ces coordonnées,

$$x'_1 = \frac{ax'}{y'}, \qquad y'_1 = \frac{a^2}{y'}, \qquad z'_1 = -\frac{a(y'^2 - a^2)}{x'y'}.$$

On a donc

$$x'_1 = -x_1, \qquad y'_1 = y_1, \qquad z'_1 = -z_1.$$

Les deux points M_1 et M'_1 sont symétriques par rapport à Oy et la droite $M_1M'_1$ engendrera évidemment le conoïde formé par les droites qui s'appuient sur Oy et sur la courbe (C) en restant parallèles au plan zOx.

L'équation de ce conoïde s'obtient sans difficulté et l'on trouve

$$x(y^2 - a^2) - z(y^2 - ay + a^2) = 0.$$

Comme il est formé de droites qui s'appuient sur (C), il coupe évidemment les deux surfaces (P) et (Q) d'abord suivant cette courbe (C).

Il coupe en outre (P) suivant les deux génératrices

$$z = 0, \qquad y = \pm a.$$

Pour avoir la seconde partie de l'intersection avec la surface (Q), projetons l'intersection sur le plan des xy. Cette projection a pour équation

$$(2y^2 - ay)(x^2 - y^2 + ay - a^2) = 0.$$

Le facteur $x^2 - y^2 + ay - a^2 = 0$ donne l'hyperbole projection de la courbe (C). Le reste de l'intersection se trouve alors dans les plans $y = 0$ et $y = \frac{a}{2}$. Ce sont donc les deux génératrices

$$y = 0, \qquad x + z = 0;$$
$$y = \frac{a}{2}, \qquad x + z = 0.$$

IV. La dernière partie du problème est immédiate. En effet, nous avons vu que, si par un point M de (C) on mène les deux génératrices de (P) qui y passent, elles coupent (C) en deux points M_1 et M'_1 symétriques par rapport à Oy. Par suite, les droites M_1M_2 et M_1M étant les deux génératrices issues de M_1, M_2 est le symétrique de M par rapport à Oy.

Menons la génératrice M_2M_3 qui coupe (C) en M_3. Pour la même raison M_3 est le symétrique de M_1 par rapport à Oy. Donc, M_3 *coïncide avec* M'_1. La seconde génératrice issue de M_3 (ou M'_1) revient donc passer en M.

La ligne polygonale est donc un quadrilatère gauche $MM_1M_2M_3$ dont les sommets sont deux à deux symétriques par rapport à Oy. Le raisonnement prouve de plus qu'on retrouve *le même* quadrilatère si l'on remplace M_1 par M'_1.

Remarque. — On aurait pu faire ce problème en suivant la méthode générale applicable à l'étude des quadrilatères gauches formés par les génératrices d'une quadrique et inscrits dans une biquadratique unicursale.

Les deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde (P) sont

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} y - a = \lambda x, \\ y + a = \dfrac{z}{\lambda}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} y + a = \mu x, \\ y - a = \dfrac{z}{\mu}. \end{cases}$$

En résolvant, on a les coordonnées d'un point de (P) en fonction de deux paramètres λ et μ :

$$(3) \qquad x = \frac{2a}{\mu - \lambda}, \qquad y = \frac{a(\lambda + \mu)}{\mu - \lambda}, \qquad z = \frac{2a\lambda\mu}{\mu - \lambda}.$$

En exprimant que ce point est sur la surface (Q) on trouve la relation

$$3\lambda^2 + \mu^2 - 4 = 0.$$

Les deux paramètres λ et μ liés par cette relation peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre t

$$\lambda = -\frac{4t}{t^2 + 3}, \qquad \mu = 2\frac{3 - t^2}{3 + t^2}.$$

En remplaçant λ et μ par leurs valeurs dans les formules (3) on a les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe (C) exprimées rationnellement en fonction d'un paramètre

$$(4) \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{t^2 + 3}{-t^2 + 2t + 3}, \\ y = a\dfrac{-t^2 - 2t + 3}{-t^2 + 2t + 3}, \\ z = 8a\dfrac{t(t^2 - 3)}{(t^2 + 3)(-t^2 + 2t + 3)}. \end{cases}$$

Soit alors t la valeur du paramètre relative à M, remarquons que pour deux points de (C) situés sur une même génératrice du système (I) λ doit avoir la même valeur. Les deux valeurs de t correspondantes sont donc racines de l'équation

$$\lambda(t^2 + 3) + 4t = 0.$$

Le produit des racines est 3. Donc, si l'une des racines est t, l'autre est $\frac{3}{t}$. La valeur du paramètre correspondant à M_1 est donc

$$t_1 = \frac{3}{t}.$$

De même, les deux valeurs de t correspondantes à deux points de (C) situés sur une même génératrice du système (II) sont racines de l'équation

$$\mu(3 + t^2) + 2(t^2 - 3) = 0,$$

dont les racines sont *opposées*. La valeur du paramètre correspondant à M'_1 est donc

$$t'_1 = -t.$$

Cela étant, les valeurs du paramètre correspondantes aux points M_1, M_2, ... se calculent facilement.

Pour M_1, on a

$$t_1 = \frac{3}{t};$$

pour M_2, on a

$$t_2 = -t_1 = -\frac{3}{t};$$

pour M_3, on a

$$t_3 = \frac{3}{t_2} = -t;$$

pour M_4, on a

$$t_4 = -t_3 = t.$$

Donc M_4 coïncide avec M.

CORRESPONDANCE.

M. le lieutenant Bienaymé. — Les observations suivantes me paraissent compléter les intéressants articles que M. de Montessus et M. Lechalas ont consacrés au paradoxe signalé par Joseph Bertrand dans son *Calcul des probabilités* (1).

(1) *Voir* les numéros de janvier et d'août 1903 des *N. A.*

1° *Comment s'évanouit le paradoxe.*

A propos de la probabilité pour une corde quelconque d'un cercle d'être plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit, Bertrand ayant rencontré des solutions différentes conclut que cette question est « mal posée »; nous pensons qu'on doit entendre surtout par là « mal comprise », car l'esprit attend une solution unique, et d'ailleurs Bertrand l'avait trouvée, mais, ajoute M. Darboux, « il la laisse chercher à son lecteur ».

C'est qu'il s'est glissé dans l'énoncé un terme sur lequel repose, à notre insu, un véritable malentendu et dont les diverses solutions du problème méconnaissent la portée : c'est le terme « quelconque » qui est bien loin d'avoir dans les problèmes purement géométriques le sens très général, mais strict, qu'on lui accorde dans les questions de probabilités.

C'est ainsi que, au point de vue géométrique, à un point dit quelconque sur une courbe correspond, sur une courbe homographique, un point que l'on considère également comme quelconque; mais, au point de vue de la probabilité, d'après la définition logique d'un point quelconque d'une figure, il n'y aura qu'exceptionnellement correspondance entre les points homologues de ces deux courbes.

2° *La probabilité infinitésimale pour une droite quelconque d'être tangente à une courbe unicursale est proportionnelle à la classe de la courbe.*

Ceci n'est que la généralisation de la propriété suivante dont l'allure paradoxale est particulièrement remarquable et qui s'établit bien aisément en partant des définitions admises :

Étant données dans le plan des circonférences de rayons différents, si une droite quelconque touche l'une d'elles, il y a même probabilité pour chacune d'être la circonférence touchée.

3° *Cas général du problème de Bertrand étudié par M. de Montessus.*

M. de Montessus, dans son intéressant article de janvier dernier, a étudié ce qu'il appelle le cas général du problème; il trouve, après un assez long calcul, même résultat, $\frac{1}{2}$, que Bertrand pour son premier cas. On pouvait *a priori* s'y attendre, car considérant les cordes perpendiculaires à un diamètre (premier cas de Bertrand) comme issues d'un point à l'infini, la probabilité pour les cordes issues des points à l'infini du plan est $\frac{1}{2}$; et comme les points à l'infini sont en nombre infini par rapport à ceux à distance finie, il en résulte que $\frac{1}{2}$ est aussi la probabilité pour l'ensemble des cordes issues de tous les points du plan.

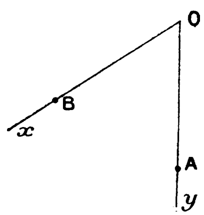
Note de la Rédaction. — Pendant l'impression du Mémoire de M. Lechalas, M. Bienaymé nous a adressé un travail, où se trouvaient développées des considérations à peu près identiques. La Lettre précédente résume les parties de ce travail qui ne font pas double emploi avec celui de M. Lechalas.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

Épreuve écrite. — *Dans un plan vertical, on donne deux droites fixes* Ox *et* Oy. *La droite* Oy *est verticale et la droite* Ox *fait avec* Oy *un angle de* $60°$.

Deux points pesants A *et* B, *qui ont le même poids, sont*



assujettis à glisser sans frottement l'un sur Oy, *l'autre sur* Ox.

Ces points s'attirent proportionnellement à leur distance et au produit de leurs masses. L'attraction à la distance $2a$ *est égale au poids de l'un des points.*

A l'origine des temps, les points sont sans vitesse, et ils sont l'un et l'autre à une distance de O *égale à* $2a$.

Trouver leur mouvement.

SOLUTION.

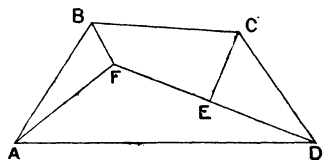
Si l'on appelle x et y les distances des points B et A au point O, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{4a}(4a - 2y + x),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{4a}(2a - 2x + y).$$

Elles rentrent dans une forme connue. Leurs intégrales renferment des cosinus; mais, les angles n'étant pas dans un rapport commensurable, le mouvement n'est pas périodique.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un système articulé* ABCDEF *dont les tiges ont des longueurs ainsi déterminées :*



Les tiges AB, BC, CD *forment les trois côtés consécutifs d'un hexagone régulier dont le côté a a* 1^m^ *de long. La tige* AD *est le diamètre du cercle circonscrit à cet hexagone. Le point* E *est le milieu du rayon qui aboutit en* C *et le point* F *est au tiers à partir de* B *du rayon qui aboutit en* B.

Le système est placé dans un plan vertical et il repose par A *et* D *sur deux appuis qui sont sur la même horizontale.*

On applique en E *un poids de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des tiges.*

On pourra graphiquer ou calculer.

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan horizontal une plaque carrée et homogène est mobile autour de son centre* O *qui* *est fixe. Sur un des côtés de la plaque est placé un point mobile* P *qui est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement de ce système sachant que la masse de la plaque est égale à douze fois la masse du point* P, *et supposant qu'à l'origine le système est sans vitesse et que le point* P *est à l'une des extrémités du côté sur lequel il se meut.*

Déterminer par sa tangente l'angle dont tourne la plaque à chaque oscillation.

Trouver la pression du point sur la plaque et celle de la plaque sur le point O.

Étudier la même question en supposant qu'à l'origine le mobile est très voisin du milieu du côté sur lequel il se meut, et donner, dans ce cas, la durée des petites oscillations du système.

Solution.

En appelant θ l'angle dont a tourné la plaque à un instant donné, z la distance du mobile au milieu du côté sur lequel il se meut, $2a$ le côté du carré, M et m les masses, $m\lambda^2$ l'attraction du point O sur le mobile à l'unité de distance, on trouve, en appliquant le théorème des aires et le théorème des forces vives, les deux équations suivantes où les constantes répondent aux données initiales

$$(9a^2+z^2)\theta' = az',$$
$$(9a^2+z^2)\theta'^2+z'^2-2a\theta' z' = \lambda^2(a^2-z^2).$$

En éliminant θ', on a

$$\frac{8a^2+z^2}{9a^2+z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(a^2-z^2).$$

On voit ainsi que le mobile oscillera en allant d'une extrémité à l'autre du côté sur lequel il se meut.

La première équation peut s'écrire

$$d\theta = \frac{a\,dz}{9a^2+z^2},$$

d'où l'on tire

$$z = 3a\,\mathrm{tang}(3\theta+c).$$

Pour $z=-a$, on a

$$\theta = 0,$$

et, par suite,

$$\tang c = -\frac{1}{3}.$$

Pour $z = +a$, on a

$$\tang(3\theta_1 + c) = \frac{1}{3} \qquad \text{ou} \qquad \tang 3\theta_1 = \frac{3}{4},$$

ce qui fait connaître l'angle θ_1 dont tourne la plaque à chaque oscillation.

Si primitivement le mobile était très près du milieu du côté, soit à une distance h de ce milieu, l'équation

$$\frac{8a^2 + z^2}{9a^2 + z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(h^2 - z^2)$$

montrerait que z oscille de $-h$ à $+h$. On poserait, dans une première approximation,

$$\frac{8}{9}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(h^2 - z^2).$$

En dérivant, puis intégrant, on trouverait

$$z = h \cos\frac{3}{4}\lambda\sqrt{2}\,t.$$

La durée des petites oscillations complètes est

$$T = \frac{8\pi}{3\lambda\sqrt{2}}.$$

Enfin, en appliquant le théorème des moments à la plaque seule, on a la pression P du point sur la plaque par la relation

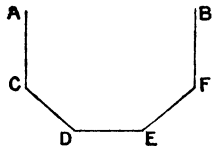
$$MK^2\theta'' = -Pz,$$

d'où l'on tire, d'après ce qui précède,

$$P = MK^2\lambda^2 a \frac{89a^4 + 2a^2z^2 - z^4}{(9a^2 + z^2)(8a^2 + z^2)^2}.$$

Le centre de gravité de la plaque étant immobile, la pression de la plaque sur le point est égale à la pression du point sur la plaque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les extrémités d'un fil sont fixées en deux points* A *et* B *situés sur une même horizontale. On marque sur ce fil des points* C, D, E, F *qui le par-*



tagent en cinq parties égales, et la distance AB *est égale au diamètre du cercle dont le côté du décagone inscrit serait égal à* AC.

On applique en C *et* F *des poids égaux chacun à* 10^{kg}, *et en* D *et* E *des poids* Q *égaux entre eux.*

Que doivent être ces points Q *pour que la figure affecte la forme d'un demi-décagone régulier?*

Si l'on augmentait ces poids Q *du millième de la valeur trouvée, de combien s'abaisserait le côté* DE, *en supposant que la distance* AB *soit égale à* 2^m. (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan horizontal un disque circulaire homogène peut tourner autour de l'un de ses points* O *qui est fixe.*

Sur la circonférence de ce disque glisse sans frottement un point matériel P *qui est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance.*

Étudier le mouvement de ce système et trouver la pression du point P *sur le disque.*

On supposera : 1° *que la masse du disque est égale à dix fois la masse du point* P ; 2° *que la distance du point* O *au centre du disque est égale à la moitié du rayon;* 3° *qu'à l'instant initial le système est sans vitesse et que le rayon qui passe au point* P *est perpendiculaire sur celui qui passe au point* O.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un réservoir est fermé par un mur de* 10^m *de hauteur. L'épaisseur de ce mur à la partie supérieure est de* $0^m,50$.

Quelle doit être son épaisseur à la base pour qu'il résiste à la poussée du liquide. La paroi du mur en contact *avec l'eau est verticale, la paroi extérieure forme un plan incliné.*

Le poids du mètre cube de maçonnerie sera pris égal à 2400^{kg}, *le coefficient de frottement sera pris égal à* $\frac{1}{2}$ *et la résistance de la maçonnerie sera prise égale à* 4^{kg} *par centimètre carré.* (Novembre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1855.

(1900, p. 382.)

Un cône a pour sommet un point s d'un ellipsoïde et pour base la section diamétrale faite dans cette surface par un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par s. L'enveloppe de ce cône, lorsque son sommet décrit l'ellipsoïde, est une surface de l'onde. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. CANON.

On sait que si l'on projette un ellipsoïde sur ses plans tangents, les ellipses de contour apparent ainsi obtenues occupent une région de l'espace limitée à une surface de l'onde. Par rapport à une sphère concentrique à l'ellipsoïde, il suffit de transformer cette propriété par polaires réciproques pour obtenir le résultat demandé.

1928.

(1902, p. 288.)

Soit

$$N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots l^\lambda m^\mu n^\nu \qquad (\alpha \gtreqless \beta \gtreqless \gamma \gtreqless \ldots \gtreqless \lambda \gtreqless \mu \gtreqless \nu),$$

le plus petit nombre qui a un nombre donné de diviseurs : 1° $\nu + 1$ *est un nombre premier;* 2° $\mu + 1$ *est un nombre premier, sauf l'exception suivante : le plus petit nombre ayant huit diviseurs est* $2^2 \times 3$. (G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. CHALDE.

Le nombre des diviseurs du nombre écrit est

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1).$$

1° Si $\nu+1$ n'est pas premier, soit

$$\nu+1=(\nu'+1)(\pi+1);$$

p étant le nombre premier qui suit n, on peut remplacer n^ν par $n^{\nu'}p^\pi$ sans changer le nombre des diviseurs; or, je dis que l'on a

$$n^{\nu'}p^\pi < n^\nu$$

ou

$$p^\pi < n^{\nu-\nu'}$$

ou

$$p^\pi < n^{\pi(\nu'+1)}$$

ou, puisque π n'est pas nul,

$$p < n^{\nu'+1},$$

ou, puisque ν' n'est pas nul,

$$p < n^2;$$

entre un nombre premier n et son carré, il y a, en effet, au moins un nombre premier p, comme M. de Polignac l'a montré, dès 1849, par la seule considération des suites diatomiques (*Nouvelles Annales*, 1849, p. 428).

2° Si $\mu+1$ n'est pas premier, soit

$$\mu+1=(\mu'+1)(\pi+1);$$

on peut remplacer m^μ par $m^{\mu'}p^\pi$; cherchons si l'on a

$$m^{\mu'}p^\pi < m^\mu$$

ou

$$p < m^{\mu'+1};$$

il suffira que l'on ait

$$p < m^2.$$

Or, entre un nombre premier m et son carré il y a au moins deux nombres premiers n et p, sauf pour $m=2$, puisque, entre un nombre et son double, il y a au moins deux nombres premiers à partir de 6 [DESBOVES, par la méthode de Tchebyscheff pour le postulatum de Bertrand (*Nouvelles Annales*, 1855, p. 293)] et que, d'ailleurs, entre 3 et 9 ou entre 5 et 25, il y en a au moins deux. Il ne peut donc y avoir exception que pour $m = 2$, et encore faut-il que l'on ait $\mu' = 1$, puisque, entre 2 et 8, il y a trois nombres premiers; on doit avoir de même $\pi = 1$, puisque l'on peut échanger μ' et π; on a alors

$$\mu = 3,$$

et, par suite,

$$N = 2^3 \times 3^\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq 3).$$

On ne peut avoir $\nu > 1$, car le nombre $2^\nu \times 3 \times 5$, qui a le même nombre de diviseurs, est alors plus petit que le nombre considéré

$$2^\nu \times 15 < 3^\nu \times 8 \qquad (\nu > 1).$$

Pour $\nu = 1$, on cherche le plus petit nombre ayant huit diviseurs, et ce nombre est réellement $2^3 \times 3$; c'est le cas d'exception signalé dans l'énoncé.

1934.

(1902, p. 384.)

Étant donnée une parabole P, *on considère les paraboles* Q *admettant pour tangente au sommet l'axe de* P, *et touchant la tangente et la normale à* P *en un même point. La parabole* Q *touchera constamment deux développées de paraboles.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. H. COUVERT.

Soient M un point quelconque de P, MT la tangente, MN la normale en ce point; φ étant le foyer de la parabole Q_1, les droites φT, φN sont respectivement perpendiculaires à MT, MN, puisque TNx est la tangente au sommet de Q. La figure MTφN est donc un rectangle et le point de rencontre F des diagonales étant le milieu de TN, ce point est le foyer de P. Enfin la directrice MD de Q passe en M. Ceci posé, soit $y^2 = 2px$ l'équation de P, et $\frac{\beta^2}{2p}$, β les coordonnées de M.

Le paramètre de Q, distance de φ à MD, est 2β; X étant l'abscisse de φ, nous avons

$$\frac{X+\frac{\beta^2}{2p}}{2}=\frac{p}{2},$$

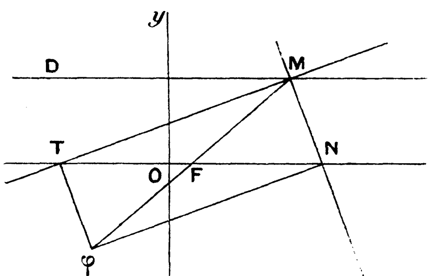
d'où

$$X=\frac{2p^2-\beta^2}{2p}.$$

L'équation de Q est donc

$$(1)\qquad \left(x-\frac{2p^2-\beta^2}{2p}\right)^2+4\beta y=0.$$

L'enveloppe de Q s'obtiendra en éliminant β entre (1) et la



dérivée par rapport à β égalée à zéro : c'est

$$\left(x-\frac{2p^2-\beta^2}{2p}\right)\frac{\beta}{p}+2y=0.$$

On en tire

$$x-\frac{2p^2-\beta^2}{2p}=\frac{-2py}{\beta}.$$

Portant cette valeur dans (1), il reste, après avoir simplifié,

$$(2)\qquad \beta^3=-p^2y.$$

Nous éliminerons β entre (1) et (2). Pour cela, de (2) nous tirons $\beta^2=\frac{-p^2y}{\beta}$. Cette valeur portée dans (1) donne

$$\left(x-p-\frac{py}{2\beta}\right)^2+4\beta y=0$$

ou

$$[2\beta(x-p)-py]^2+4^2\beta^3y=0$$

ou enfin

$$[2\beta(x-p)-py]^2-4^2p^2y^2=0.$$

Cette équation se décompose en

$$(3)\quad 2\beta(x-p)-py=-4py \quad \text{ou} \quad \beta=\frac{-3py}{2(x-p)},$$

et

$$(4)\quad 2\beta(x-p)-py=4py \quad \text{ou} \quad \beta=\frac{5py}{2(x-p)}.$$

La combinaison de (2) avec (3) et (4) successivement donne

$$(5)\qquad 27py^2=8(x-p)^3,$$

$$(6)\qquad 125py^2=8(x-p)^3.$$

L'enveloppe de Q est donc formée par les courbes (5) et (6). La première est la développée de P, l'autre est la développée d'une parabole ayant même axe que P.

Un Anonyme nous adresse la remarque suivante, au sujet de la question **1934** :

« On voit immédiatement que la parabole Q est tangente à la développée de P, puisqu'elle touche la normale à cette courbe au centre de courbure de P, en vertu de ce théorème, donné autrefois par M. Mannheim : *La parabole tangente aux axes d'une ellipse, à la tangente et à la normale en un point de cette courbe, touche cette normale au centre de courbure correspondant de l'ellipse.* »

1958.

(1903, p. 48.)

D'un point A *d'une hyperbole donnée on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe; elles coupent en* B, C *la tangente à l'hyperbole au point* M. *On projette orthogonalement* A *en* P *sur la normale en* M. *Démontrer que les cercles tels que* PBC *passent par un même point, quel que soit le point* A *de l'hyperbole.* (Mannheim.)

1959.

(1903, p. 48.)

Le triangle ABC *est circonscrit à une parabole donnée; sur la normale à cette courbe, menée du point de contact de* BC, *on projette orthogonalement* A *en* P. *Démontrer que les cercles tels que* PBC *passent par un même point, quelle que soit la position de* A. (MANNHEIM.)

1960.

(1903, p. 48.)

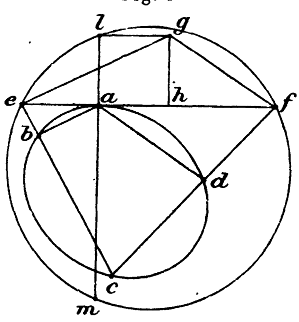
Construire le rayon de courbure en un point d'une conique, connaissant la tangente en ce point et trois autres tangentes. (MANNHEIM.)

SOLUTIONS

Par M. A. MANNHEIM.

J'ai fait connaître dans les *Comptes rendus* (8 mars 1875) deux relations : la première donne le rayon de courbure en un point a d'une conique (*fig.* 1) connaissant la tangente en ce point et les trois autres points b, c, d.

Fig. 1.



Appelons e, f les points où la tangente en a est coupée par les droites cb, cd, et désignons par ρ le rayon de courbure de la conique pour le point a.

La relation (1) est

$$(1) \qquad \frac{1}{ae} + \frac{1}{af} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} eab} + \frac{1}{\operatorname{tang} daf}\right).$$

J'ai démontré cette relation dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* en 1890, et j'ai donné des constructions du rayon de courbure ρ.

Voici comment on arrive facilement à une construction de ρ.

Du point e menons eg parallèlement à ba, et du point f menons fg parallèlement à da, la relation (1) peut s'écrire

$$\frac{ef}{ae.af} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{\sin egf}{\sin aeg \sin gfa} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{ef}{eg \sin aeg}.$$

Abaissons du point g la perpendiculaire gl sur la normale en a, et par les points e, l, f faisons passer un cercle. Il coupe au point m la normale en a, la dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{al.am} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{1}{gh}, \qquad \text{donc} \qquad am = 2\rho.$$

D'après cela, lorsque pour une conique on donne le point a, la tangente en ce point et les trois points b, c, d, on construit ainsi le rayon de courbure pour le point a. On prend les points de rencontre e, f de la tangente en a et des droites cb, cd. Du point e on mène la parallèle eg à ba et du point f la parallèle fg à ad. On abaisse sur la normale en a la perpendiculaire gl : le cercle elf coupe en m la normale en a, et *le segment am est double du rayon de courbure demandé.*

On voit que si l'on fait varier le point c sur la conique :

Les cercles tels que elf passent par un même point, extrémité du segment am double du rayon de courbure.

Dans le cas particulier où la conique est une hyperbole, et les points b et d à l'infini, ce dernier résultat donne la propriété qui fait l'objet de la question 1938.

La transformation par polaires réciproques de la relation (1), en prenant pour cercle directeur le cercle osculateur de la conique en a, donne (*fig.* 2) la relation suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ad} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tang}\delta}\right)$$

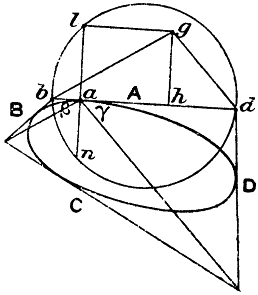
qui permet de déterminer le rayon de courbure en un point a d'une conique lorsque l'on connaît la tangente A en ce point et les trois autres tangentes B, C, D.

Dans la relation (2) les points b, d sont les points de rencontre de B, D avec A, et β, γ sont les angles sous lesquels on voit du point a les côtés du quadrilatère circonscrit à la conique, et qui sont des segments de B et de D.

Nous allons trouver que la construction de ρ, qui résulte de la relation (2), est tout à fait analogue à celle qui a été donnée précédemment.

Par le point b menons la parallèle bg à la droite qui va de a au point de rencontre de B et C, et du point d menons la

Fig. 2.



parallèle dg à la droite qui va de a au point de rencontre de D et C.

La relation (2) peut s'écrire

$$\frac{bd}{ab.ad} = \frac{2}{\rho}\,\frac{\sin bgd}{\sin abg \sin gda} = \frac{2}{\rho}\,\frac{bd}{gd \sin gda}.$$

Abaissons du point g la perpendiculaire gl sur la normale en a, et par les points b, l, d faisons passer un cercle. Il coupe en n la normale en a.

La dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{al.an} = \frac{2}{\rho.gh}, \qquad \text{donc} \qquad an = \frac{\rho}{2}.$$

D'après cela, lorsque pour une conique on donne le point a, la tangente A en ce point et les trois tangentes B, C, D, on construit ainsi le rayon de courbure pour le point a :

On prend les points b, d où A est coupé par B et D. Du point b on mène la parallèle bg à la droite qui va de a au point de rencontre de B et C, et du point d on mène la parallèle dg à la droite qui va de a au point de rencontre de D et de C.

On abaisse du point g la perpendiculaire gl sur la normale en a et par les points b, l, d on fait passer un cercle : *il coupe la normale en a au milieu du rayon de courbure relatif à ce point.*

Cette construction répond à la question **1960**.

Si l'on fait varier la tangente C, elle montre : *que les cercles bld passent par un même point.*

Dans le cas particulier où la conique est une parabole et la droite C à l'infini, ce dernier résultat donne la propriété qui fait l'objet de la question 1959.

Autres solutions des questions 1958 et 1959 par MM. Letierce, Barisien et Laureaux.

1961.

(1903, p. 48.)

Déterminer une expression du rapport des arcs infiniment petits, interceptés sur deux courbes données, par des cercles infiniment voisins dont on connaît l'axe radical.

(Mannheim.)

SOLUTION

Par M. Canon.

Appelons m, n les points de rencontre des deux courbes données et d'un cercle C, et m_1, n_1 les points de rencontre de ces mêmes courbes et du cercle C_1, infiniment voisin de C. Par les points n, m, m_1 faisons passer un cercle, il coupe C_1 au point n_2 : les droites mn, m_1n_2 se coupent au point r sur l'axe radical R qui est donné.

Appelons t le point de rencontre de mm_1 et de nn_2 et appliquons une formule connue, on a

$$\frac{mm_1}{nn_2} = \frac{mr.mt}{nr.nt} = \frac{mr}{nr}.$$

Désignons par μ, ν les angles que fait le cercle C avec mm_1, nn_1. Le triangle nn_1n_2 donne

$$\frac{nn_1}{nn_2} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

Par suite

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{\dfrac{mr}{\sin\mu}}{\dfrac{nr}{\sin\nu}},$$

ou, en appelant mp, nq les perpendiculaires abaissées de m, n sur R, il vient l'expression demandée

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{\dfrac{mp}{\sin\mu}}{\dfrac{mq}{\sin\nu}}.$$

QUESTIONS.

1982. Soient

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}\right\}$$

les cosinus directeurs, par rapport à trois axes rectangulaires, des arêtes de deux trièdres trirectangles. Démontrer que le cône ayant pour équation

$$\begin{aligned}(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z)& \\ + (a'x + b'y + c'z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)& \\ + (a''x + b''y + c''z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) &= 0\end{aligned}$$

est de révolution.

Définir géométriquement l'axe du cône.

(R. Bricard.)

1983. Soient C le cercle ayant pour diamètre la distance des deux sommets d'un limaçon de Pascal, et C′ un cercle bitangent au limaçon.

1° L'axe radical des cercles C et C′ passe par un point fixe.

2° Le lieu des centres de similitude des cercles C et C′ est une strophoïde droite. (E.-N. Barisien.)

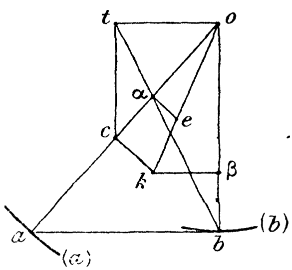
D'ALEMBERT.

[O1]

EXPRESSION DE LA VARIATION DE LONGUEUR D'UNE NORMALE;

PAR M. A. MANNHEIM.

On donne les courbes (a), (b). Du point a on mène la normale ao à (a) et la tangente ab à (b); la normale en b à (b) coupe au point o la normale ao. Dé-



terminer l'expression de la variation de longueur de ao pour une variation angulaire infiniment petite de la tangente ab.

Sur la droite oa, construisons le point c de façon que $\frac{1}{oc} = \frac{1}{o\alpha} - \frac{1}{oa}$, le point α étant le centre de courbure de (a). Pour cela, menons du point o la droite ot parallèlement à ab. Cette droite est coupée au point t par la droite $b\alpha$: la perpendiculaire tc à ab donne le point c.

La perpendiculaire ck à ao coupe au point k la droite βk élevée à bo du centre de courbure β de (b) : la droite ok est la normale en o à la courbe décrite par ce point lorsqu'on fait varier la tangente ab ([1]).

Cette normale ok est coupée au point e par la perpendiculaire αe à ao.

Une formule connue ([2]) donne

$$d(ao) = e\alpha \frac{d(a)}{\alpha a}. \tag{1}$$

Appelons $d\varphi$ l'angle de contingence de (b) en b; on a

$$d(a) = oa.d\varphi.$$

Portons cette valeur dans la relation (1), il vient

$$d(ao) = e\alpha \frac{oa}{\alpha a} d\varphi.$$

Les triangles semblables $o\alpha e$, ock donnent

$$\frac{e\alpha}{kc} = \frac{o\alpha}{oc},$$

d'où

$$e\alpha = \frac{1}{oc} o\alpha.kc.$$

Portant cette valeur dans l'égalité précédente, elle devient

$$d(ao) = \frac{1}{oc} \frac{oa.o\alpha}{\alpha a} kc.d\varphi.$$

Tenant compte de la valeur de $\frac{1}{oc}$ rappelée plus haut il reste

$$d(ao) = kc.d\varphi. \tag{2}$$

Telle est l'expression demandée.

Comme l'on sait, la variation de longueur de ao est positive ou négative selon que α, tournant autour de e,

---

([1]) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 36.
([2]) *Loc. cit.*, p. 45.

s'éloigne ou se rapproche de a. La même règle s'applique pour l'expression (2), le point c tournant autour de k.

Comme exemple, voici l'énoncé d'un problème que l'expression (2) permet tout de suite de résoudre :

Une corde se déplace de façon que l'arc qu'elle sous-tend sur une courbe donnée soit de longueur constante, construire le centre de courbure de son enveloppe.

[$L^1$17a]

A PROPOS D'UNE QUESTION PROPOSÉE;

PAR M. A. MANNHEIM.

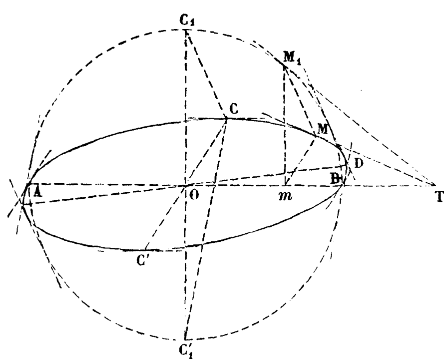
Trouver le lieu des centres des circonférences qui sont tangentes à une ellipse donnée et qui sont telles que les deux tangentes communes avec l'ellipse (autres que la tangente au point de contact) soient parallèles.

J'ai posé cette question dans le *Bulletin de Mathématiques spéciales* en mars 1900. Dès le mois de juin, ce Recueil contenait une solution analytique due à M. Barisien, et le numéro de juillet renfermait une solution géométrique signée (C. M.).

Mais quelle est l'origine de la question?

Il me paraît intéressant de la faire connaître aux élèves, c'est l'objet de cette courte Note.

Prenons le point M_1 sur le cercle de diamètre AB. Construisons le triangle $M_1 m M$ semblable à un triangle donné. Au point M_1 correspond ainsi un point M. Lorsque M_1 décrit le cercle, le point correspondant M décrit une ellipse. La tangente en M à cette courbe coupe AB au point où cette droite est rencontrée par la tangente M_1T au cercle. D'après cela, au point C, qui correspond au point C_1 extrémité du diamètre perpendiculaire à AB, la tangente est parallèle à AB : les segments OB, OC sont alors deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse. Menons au cercle une tangente parallèle à M_1M. Au point de contact de cette tangente correspond un point de l'ellipse pour lequel la tangente à l'ellipse se confond avec cette tangente au cercle, c'est-à-dire que c'est une tangente commune au cercle et à l'ellipse. Remarquons maintenant qu'on peut trans-



porter le cercle parallèlement à cette tangente commune de façon que C_1 vienne en C. Dans sa nouvelle position le cercle est un de ceux qui figurent dans l'énoncé de la question. Son centre est à une distance de O égale à C_1C qui est égale, d'après une construction connue, à la demi-différence des axes de l'ellipse.

En faisant varier le diamètre AB de l'ellipse on obtient de la même manière une suite de cercles répondant à l'énoncé et dont les centres sont à la même distance de O, c'est-à-dire sont sur un cercle.

Si l'on fait correspondre C à C'_1, diamétralement opposé à C, on obtient une autre série de cercles dont les centres sont à une distance de O égale à CC'_1, c'est-à-dire à la demi-somme des axes de l'ellipse.

Le lieu demandé se compose donc de deux cercles concentriques à l'ellipse, et dont les rayons sont respectivement égaux, l'un à la demi-somme des axes de l'ellipse, l'autre à la demi-différence de ces axes.

Tout ce qui vient d'être dit, et qui sert ici de démonstration, se trouve, ainsi que la figure, dans mon *Cours de Géométrie descriptive,* à propos de la recherche de l'ellipse perspective cavalière d'un cercle horizontal. Il a suffi, pour arriver à l'énoncé de la question, de remarquer la possibilité de déplacer le cercle de diamètre AB, en lui conservant ses tangentes communes, de manière à l'amener à être tangent à cette ellipse, son centre parcourant un segment égal à la demi-somme ou à la demi-différence des axes de l'ellipse, et cela quel que soit le diamètre AB de cette courbe.

On voit bien ainsi que la question qui vient d'être traitée résulte d'une simple remarque.

[O8e]

ESSAI SUR LE DÉPLACEMENT D'UN MADRIER SUR DEUX ROULEAUX NON PARALLÈLES;

PAR M. LE LIEUTENANT ANDRÉ BIENAYMÉ.

I. — GÉNÉRALITÉS.

Lorsqu'un madrier reposant sur deux rouleaux cylindriques parallèles est sollicité par une force normale aux rouleaux, il peut se déplacer en les faisant rouler sous lui sans qu'il y ait glissement le long des généra-

trices de contact, la condition pour qu'il en soit ainsi est que l'effet de la force ne désoriente pas le madrier qui soit transporté parallèlement à lui-même.

Ceci est évident dans le cas où la direction du madrier est elle-même normale aux génératrices de contact, mais on peut le vérifier aisément dans le cas d'une disposition oblique, cas que l'on n'envisage généralement pas dans la pratique parce que le travail utile y est relativement moindre.

Dans la disposition communément adoptée le madrier est normal aux génératrices de contact et la force de traction est exercée dans la direction même du madrier, mais l'on conçoit, et la chose s'observe dans la pratique, que le déplacement se ferait encore dans le même sens si la force avait une direction légèrement oblique, introduisant ainsi une composante normale au déplacement et dont tout le travail serait absorbé par les résistances qui s'opposent au glissement.

Par analogie avec ce cas simple nous pensons que, *dans le cas général où les deux rouleaux ne sont plus parallèles, il doit exister à chaque instant, pour une surface plane matérielle pesante reposant sur eux, un déplacement infinitésimal d'élection* que la surface effectue quelle que soit la force qui la mette en mouvement pourvu que sa direction et son intensité restent comprises dans certaines limites.

Nous nous proposons ici, comme contribution à ce problème mécanique, d'en étudier le cas limite théorique qui se prête à une discussion purement géométrique, en envisageant, non plus la surface plane du madrier, mais simplement ***une droite matérielle se déplaçant sans glissement sur deux rouleaux cylindriques d'égal diamètre roulant sous elle sur un plan fixe.***

II. — Possibilité de ce mouvement sans glissement.

Considérons d'abord un seul rouleau cylindrique : soit G la génératrice du cylindre passant par le point de contact de la droite D. On voit immédiatement deux mouvements satisfaisant à la condition de s'effectuer sans glissement, à savoir : une rotation de la droite dans le plan tangent autour de son point de contact, rotation qui ne déplace le point de contact, ni sur la droite, ni sur le cylindre; puis une translation perpendiculairement à G, translation qui a pour effet de faire rouler le cylindre sur le plan fixe, son axe progressant deux fois moins vite que D, comme on peut s'en rendre compte en remplaçant le cylindre par un prisme d'un nombre infini de faces; on vérifie aisément que les éléments décrits sur la droite et sur le cylindre par leurs points de contact successifs sont égaux, c'est-à-dire que la translation considérée s'est effectuée sans glissement.

Nous allons maintenant montrer que pour qu'une rotation infiniment petite de D déplace cette droite et, par suite, le cylindre sans qu'il y ait glissement, il faut et il suffit que le centre de rotation soit sur la génératrice G de contact.

La condition est suffisante : en effet [1], soit un point O situé à une distance infiniment petite δ de la génératrice G; désignons par a la distance de O au point de contact A de la droite mobile D et de G, et faisons tourner D autour de O d'un angle ε égal à $\frac{2\delta}{a}$; A vient en A' sur la normale élevée en A à G, et

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

l'on a

$$AA' = 2\delta;$$

élevons la perpendiculaire $O\gamma$ sur le milieu de AA', et soit A_1 son intersection avec la nouvelle position D_1 de D, la parallèle D'_1 menée par A_1 à D rencontre AA' en un point A'_1; $A'A'_1$ est infiniment petit du second ordre, et l'on a

$$AA'_1 = 2\delta,$$

en négligeant les infiniment petits de cet ordre ; si donc l'on fait effectuer successivement à la droite D les deux mouvements élémentaires sans glissement envisagés plus haut, à savoir ici une translation de D en D'_1, après laquelle la nouvelle génératrice de contact G_1 est précisément OA_1, puis une rotation $\widehat{\varepsilon}$ de D'_1 autour de A_1 qui ne change pas la génératrice de contact, on amènera D sur D_1 et les points de D se trouveront respectivement à une distance infiniment petite du second ordre des points correspondants de D_1 ; la rotation autour de O, point infiniment voisin de G, donne donc lieu à un mouvement sans glissement.

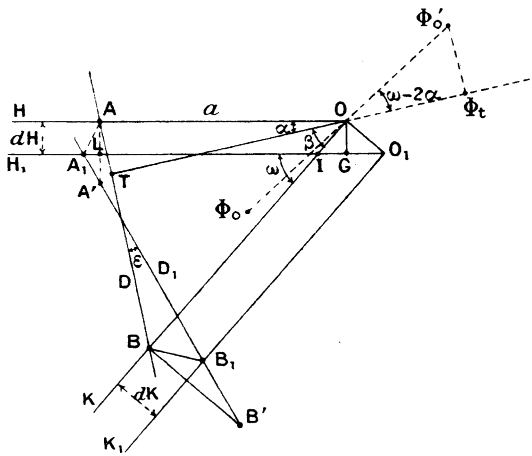
La condition est d'ailleurs nécessaire, car la rotation d'une droite D autour d'un point O extérieur à G peut se décomposer en une rotation sans glissement autour du point d'intersection de G et de la normale à D passant par O, suivie d'une translation de la droite obliquement à G, celle-ci accompagnée de glissement.

De ces considérations élémentaires il résulte que le mouvement sans glissement d'une droite sur deux cylindres circulaires égaux roulant sur un plan fixe est possible et ne l'est que d'une seule manière : *il faut et il suffit, pour qu'un pareil mouvement ait lieu, que le centre instantané de rotation pour la droite soit au point de concours fictif des génératrices de contact.*

III. — Courbes [A] et [B], lieux des points de contact successifs avec les cylindres. Courbe [O], lieu du point d'intersection fictif des génératrices de contact. Tangente et rayon de courbure en un point.

Soient A et B (*fig.* 1) les points de contact de la

Fig. 1.



droite mobile D et des cylindres, H et K les génératrices de contact faisant entre elles l'angle $\widehat{\omega}$, et O le point de rencontre de leurs prolongements ; soient de plus $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ les angles de D avec les normales à H et K, et dH, dK les distances respectives infinitésimales de H et K aux génératrices voisines H_1 et K_1 ; si l'on pose enfin

$$\text{OA} = a, \qquad \text{AA}_1 = d\text{A},$$
$$\text{OB} = b, \qquad \text{BB}_1 = d\text{B},$$

et

$$\text{OO}_1 = d\text{O},$$

on a les égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} dH = \dfrac{1}{2} a\varepsilon, \\ dK = \dfrac{1}{2} b\varepsilon; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} dA = \dfrac{1}{2} \dfrac{a}{\cos\alpha}\varepsilon, \\ dB = \dfrac{1}{2} \dfrac{b}{\cos\beta}\varepsilon; \end{cases}$$

$$(3)\qquad dO = \frac{1}{2}\frac{AB}{\sin\omega}\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{\sin\omega}\varepsilon.$$

Les égalités (1) et (2) sont évidentes; l'égalité (3) se vérifie aisément : soit I l'intersection de H_1 et de K, on a

$$OI = \frac{dH}{\sin\omega}, \qquad O_1 I = \frac{dK}{\sin\omega},$$

ce qui, joint aux égalités (1), montre que les triangles OO_1I et ABO sont semblables, le rapport de similitude étant égal à

$$\frac{\varepsilon}{2\sin\omega},$$

on a donc

$$dO = \frac{1}{2}\frac{AB}{2\sin\omega}\varepsilon;$$

on en conclut aussi que la tangente à la courbe [O] est symétrique de D par rapport à la bissectrice de l'angle des droites H et K, bissectrice dont la direction est fixe.

De même, la tangente en A à la courbe [A] est symétrique de D par rapport à H, car le triangle AA_1A' doit être considéré comme isoscèle.

Les formules (2) et (3) permettent de construire les rayons de courbure R_a, R_b, R_o, aux différents points A, B et O.

Leur expression est

$$(4)\qquad \begin{cases} R_a = \dfrac{a}{2\cos\alpha}, & R_b = \dfrac{b}{2\cos\beta}, \\ R_o = \dfrac{AB}{2\sin\omega} = \dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{2\sin\omega}. \end{cases}$$

Au moyen de ces formules et de la direction précédemment indiquée des tangentes on peut déterminer les centres de courbure correspondants.

Rayons de courbure de l'enveloppe [T] *de* D. — Le centre de courbure Φ_t de la courbe [T] enveloppe de la droite D est lié d'une façon très simple aux points O et Φ_o, centre de courbure de [O] : il est situé sur la normale OT à D, au pied de la perpendiculaire abaissée du point Φ'_o, symétrique de Φ_o par rapport à O.

En effet, T est le point de contact de D avec son enveloppe, d'autre part Φ_t et Φ_o doivent voir OO_1 sous le même angle $\widehat{\varepsilon}$, ils sont d'ailleurs de part et d'autre de OO_1, d'où la construction indiquée. On a donc l'expression

$$(4^{bis})\qquad R_t = OT + R_o\cos(\omega - 2\alpha),$$

en particulier pour $\omega = \dfrac{\pi}{2}$,

$$R_t = 2\,OT.$$

IV. — L'aire du triangle formé par la droite mobile et les deux génératrices de contact est constante. Enveloppe [T] de D.

L'enveloppe [T] de D par rapport au plan fixe n'est autre que le lieu des pieds T des perpendiculaires abaissées des points successifs O, O_1, ... sur les positions successives de D. Considérons un plan mobile appliqué sur le plan de la figure et entraîné d'un mouvement de translation par le point O variable sur le plan fixe. Par rapport à ce plan mobile la droite variable D dans ses positions successives enveloppe une courbe C dont la podaire prise par rapport au point fixe O est le lieu sur ce plan des points successifs T, T_1, ...; cette podaire et la courbe [T] sont donc intimement liées l'une à l'autre; aussi allons-nous étudier d'abord la courbe C enveloppe relative de D dans le plan mobile.

Prenons comme sens positif sur la génératrice H le sens de O vers A, et soit G le pied de la perpendiculaire abaissée de O et L celui de la perpendiculaire abaissée de A sur H_1; on a

$$da = \overline{O_1 G} + \overline{LA_1}, \qquad \overline{O_1 G} = \overline{O_1 I} + \overline{IG},$$

et, en supposant $\omega < \frac{\pi}{2}$, comme $\overline{O_1 I}$ sera toujours positif et $\overline{IG}$ négatif

$$da = \overline{LA_1} + |O_1 I| - |IG|;$$

d'ailleurs

$$LA_1 = dH \operatorname{tang} \alpha,$$

en grandeur et en signe si l'on convient de regarder $\widehat{\alpha}$ comme l'angle ayant pour origine OA, pour extrémité OT, le sens positif étant celui de la rotation qui amène OA sur OB par un angle égal à $\widehat{\omega}$; posant enfin $\omega = \alpha + \beta$, on obtient

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} da &= \quad \frac{\varepsilon}{2} a \left(\operatorname{tang} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sin \omega} + \cot \omega \right), \\ db &= -\frac{\varepsilon}{2} b \left(\operatorname{tang} \beta + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \sin \omega} + \cot \omega \right). \end{aligned} \right.$$

Formant la quantité $a\,da + b\,db$, double de la différentielle de l'aire AOB, on trouve

$$a\,db + b\,da$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{ab}{\sin\omega}\left[(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)\sin\omega + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right],$$

la quantité entre crochets peut s'écrire

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) + \cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$$

ou

$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\cos\alpha - \cos\beta};$$

sous cette forme il est visible qu'elle est nulle : *l'aire* AOB *est donc constante* et *la courbe* C *est une hyperbole* ayant pour asymptotes les droites du plan entraîné qui coïncident à chaque instant avec les génératrices de contact.

Autre démonstration. — Intégrons la formule (5), l'on a

$$\log a = \frac{1}{2}\left(-\log\cos\alpha + \int\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\sin\omega}\,d\alpha + \alpha\cot\omega\right) + C,$$

puis remplaçant sous le signe d'intégration $\cos\alpha$ par $\cos(\omega-\beta)$, et comme $d\alpha = -\,d\beta$,

$$\log a = \frac{1}{2}(-\log\cos\alpha + \log\cos\beta) + C$$

ou

$$\log a = \log\frac{\cos^{\frac{1}{2}}\beta}{\cos^{\frac{1}{2}}\alpha} + C',$$

donc

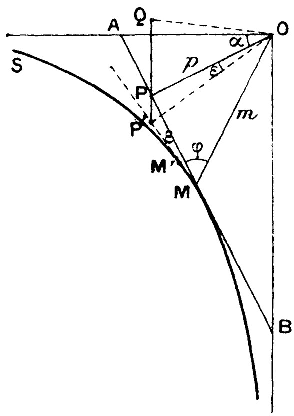
$$\frac{a^2\cos\alpha}{\cos\beta} = k^2 \qquad \text{ou} \qquad ab = k^2.$$

C. Q. F. D.

V. — Rectifications de la courbe [T] et de la courbe [O]. Analogie avec des podaires d'hyperbole dans le cas $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Lemme. — *Soient une courbe* [S] (*fig.* 2) *et un*

Fig. 2.



point O *par rapport auquel on prend la podaire* [P] *de* [S]. *Soit* P *le point de* [P] *correspondant à la tangente* MP *de* [S], *si l'on appelle* $\widehat{\varepsilon}$ *l'angle de contingence des deux tangentes infiniment voisines* MP, M'P', *l'arc infinitésimal* dP *de la podaire est donné par*

$$dP = OM\,\varepsilon.$$

En effet, appelons p et m les vecteurs OP et OM, l'angle $\widehat{\varphi}$ de PM et MO se retrouve en $P\widehat{P'}O$, donc

$$dP = \frac{p\,\varepsilon}{\sin\varphi}$$

ou

$$p = m \sin \varphi,$$

donc

$$dP = m\varepsilon, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Revenons au problème principal. Dans le cas $\omega = \frac{\pi}{2}$ les formules (4) et (4^{bis}) donnent pour R_o et R_t les expressions simples

$$R_o = \frac{AB}{2}, \qquad R_t = 2\,OT;$$

soit M le milieu de AB, c'est aussi le point de contact sur l'hyperbole, et, dans ce cas particulier où l'hyperbole est équilatère,

$$\frac{AB}{2} = OM.$$

Appliquons le lemme à la podaire de l'hyperbole équilatère prise par rapport à O, on a

$$dP = OM\varepsilon$$

et comme $OM = R_o$,

$$dP = R_o \varepsilon = dO, \tag{6}$$

ce qui montre l'égalité qui existe entre les arcs correspondants de [O] et de la podaire [P].

Remarquons que la tangente en P à la podaire d'hyperbole équilatère fait avec l'asymptote OA un angle $3\widehat{\alpha}$, car $\widehat{\varphi} = 2\widehat{\alpha}$; appliquant alors une nouvelle fois le lemme, et désignant par dQ l'arc correspondant de la deuxième podaire [Q], podaire de [P] par rapport à O, on a (*fig.* 2)

$$dQ = OP\, d(3\alpha);$$

mais

$$OP \equiv OT$$

(*fig.* 1 et *fig.* 2), donc

$$dT = \frac{2}{3} dQ.$$

On peut remarquer que la tangente en Q à la podaire de l'hyperbole équilatère fait un angle $5\widehat{\alpha} - \frac{\pi}{2}$ avec OA.

On conclura donc, dans le cas $\omega = \frac{\pi}{2}$:

1° *L'enveloppe* [T] *de la droite* D *est une courbe dont l'arc infinitésimal est égal en longueur aux deux tiers de l'arc correspondant de la deuxième podaire centrale de l'hyperbole équilatère associée; son rayon de courbure, égal au double de la distance de la droite au point* O, *est aussi égal aux dix tiers du rayon correspondant de cette deuxième podaire.*

2° *Le lieu* [O] *du point fictif d'intersection des génératrices,* O, *est une courbe dont l'arc infinitésimal est égal en longueur à l'arc correspondant de la première podaire centrale de l'hyperbole; son rayon de courbure égal à la moitié du segment de la droite compris entre les génératrices est triple du rayon correspondant de cette première podaire.*

[O6k]

SUR CERTAINES QUESTIONS RELATIVES AUX SURFACES;

Par M. J. RICHARD.

On sait l'importance que présentent, pour l'étude des surfaces, les formules concernant le mouvement à deux ou trois paramètres, d'un trièdre mobile. Je rappelle d'abord ces formules de la façon la plus brève possible. Le mouvement est supposé à trois paramètres u, v, w.

Les composantes parallèles aux arêtes du trièdre mobile de la rotation élémentaire sont désignées par

$$\begin{aligned} &p\,du + p_1\,dv + p_2\,dw,\\ &q\,du + q_1\,dv + q_2\,dw,\\ &r\,du + r_1\,dv + r_2\,dw,\end{aligned}$$

et les composantes de la translation de l'origine mobile sont

$$\begin{aligned} &\xi\,du + \xi_1\,dv + \xi_2\,dw,\\ &\eta\,du + \eta_1\,dv + \eta_2\,dw,\\ &\zeta\,du + \zeta_1\,dv + \zeta_2\,dw.\end{aligned}$$

a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' étant les neuf cosinus des angles que font les axes mobiles avec les axes fixes, on a neuf équations analogues à celle-ci

$$\frac{da}{du} = br - cq; \tag{1}$$

on a aussi neuf équations analogues à la suivante, où X, Y, Z sont les coordonnées de l'origine mobile,

$$\frac{dX}{du} = a\xi + b\eta + c\zeta. \tag{2}$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité des équations (1) et (2), on obtient neuf équations analogues à celle-ci

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \tag{3}$$

et neuf autres analogues à celle-ci

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta. \tag{4}$$

On trouvera dans le Ier Volume de la *Théorie des surfaces*, de M. Darboux, et dans la *Cinématique* de M. Königs la manière d'établir ces équations.

Je vais considérer le cas particulier où l'axe des x du trièdre mobile est tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand u seul varie, où l'axe des y est tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand v varie seul, et l'axe des z tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand w varie seul. On a alors :

$$\xi_1 = \xi_2 = \eta_2 = \eta = \zeta = \zeta_1 = 0.$$

Les équations analogues à (4) se simplifient alors, mais perdent, en partie, leur symétrie, de sorte qu'il ne suffira plus d'en écrire une pour avoir les autres par permutation.

Je vais donc écrire ici ces neuf équations séparément :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l}
\dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -r\eta_1 & r_2\eta_1 + q_1\zeta_2 = 0 & \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = q\zeta_2 \\
\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1\xi & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial w} = -p_1\zeta_2 & p\zeta_2 + r_2\xi = 0 \\
q_1\xi + p\eta_1 = 0 & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial v} = p_2\eta_1 & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u} = -q_2\xi
\end{array}\right.$$

M. Darboux se sert de ces formules dans sa *Théorie des surfaces*, nous allons nous en servir ici pour établir quelques propositions démontrées autrement dans cet Ouvrage.

I. *Le théorème de Dupin.* — Prenons un point sur l'axe des z du trièdre mobile, axe qui est normal à la surface $w =$ const. Soient o, o et λ les coordonnées de ce point. Le déplacement de ce point a pour projections sur les axes mobiles (quand w reste constant) :

Sur Ox.........	$\xi\, du + (q\, du + q_1\, dv)\lambda$
» Oy.........	$\eta_1\, dv - (p\, du + p_1\, dv)\lambda$
» Oz.........	$d\lambda$

Si le point O (l'origine mobile) décrit une ligne de courbure, et si λ est le rayon de courbure principal correspondant, le déplacement considéré doit être tangent à Oz, et l'on doit avoir

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi\, du + (q\, du + q_1\, dv)\lambda = 0, \\ \eta_1\, dv - (p\, du + p_1\, dv)\lambda = 0; \end{cases}$$

en éliminant λ, on a

$$\xi\, du(p\, du + p_1\, dv) + \eta_1\, dv(q\, du + q_1\, dv) = 0.$$

C'est l'équation des lignes de courbure de la surface $w = \text{const.}$

Or, cette équation se réduit à

$$du\, dv = 0.$$

En effet, des trois équations (5) qui ne contiennent pas de dérivées on déduit facilement que p, q_1, r_2 sont nuls.

Les lignes de courbure sont donc

$$u = \text{const.},\qquad v = \text{const.},$$

ce qui démontre le théorème de Dupin.

II. On sait (*voir* l'Ouvrage de M. Darboux) que, si l'on prend pour variables les paramètres des lignes de courbure, X, Y, Z et $X^2 + Y^2 + Z^2$ vérifient une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} + m\frac{\partial X}{\partial u} + n\frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

Je vais démontrer le résultat suivant, qui se trouve démontré, dans l'Ouvrage de M. Darboux sur les systèmes orthogonaux, par une méthode bien différente.

La distance de deux surfaces infiniment voisines $w = \text{const.}$ *satisfait à l'équation aux dérivées partielles précédente.*

Cette distance n'est autre que $\zeta_2\, dw$. Je vais démontrer que ζ_2 satisfait à cette équation.

On forme facilement cette équation (*Théorie des surfaces*, t. I, p. 211). On a ici l'élément linéaire de l'espace

$$ds^2 = \xi^2\, du^2 + \eta_1^2\, dv^2 + \zeta_2^2\, dw^2;$$

on a en particulier

$$\xi^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2,$$

d'où

$$\xi\frac{\partial \xi}{\partial v} = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\left(m\frac{\partial X}{\partial u} + n\frac{\partial X}{\partial v}\right) = -m\xi^2,$$

d'où

$$m = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v};$$

de même

$$n = -\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial u};$$

donc l'équation est

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Il s'agit de montrer que ζ_2 satisfait à cette équation.

Or, puisque p, q_1 et r_2 sont nuls, l'une des équations analogues à (3) se réduit à

$$\frac{\partial p_2}{\partial u} = r q_2.$$

On peut tirer des équations (5) les valeurs de p_2, r et q_2, et, en les portant dans la relation précédente, on a précisément l'équation qu'il s'agit d'établir.

De la proposition qui vient d'être démontrée on pourrait déduire sans trop de difficultés l'équation aux dérivées partielles d'où dépend la recherche de tous les systèmes triples orthogonaux.

III. *Démonstration d'un théorème dû à Liouville.* — La belle proposition que nous allons maintenant démontrer est la suivante :

Dans l'espace à trois dimensions les seules transformations qui conservent les angles sont des combinaisons d'inversions, d'homothéties, de déplacements et de symétries.

Considérons une transformation conservant les angles. Elle transformera le système des plans parallèles aux plans de coordonnées en un système triple orthogonal. Je suppose ce système formé des surfaces

$$u = \text{const}, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.},$$

dont il est question ci-dessus. Comme la transformation change un triangle infiniment petit dans un autre semblable, le rapport des deux éléments d'arcs correspondants doit être indépendant de leur direction et dépendre seulement de leur position. Or

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2$$

est la formule donnant le carré du premier élément d'arc, et le second est donné par la formule

$$ds_1^2 = \xi^2\, du^2 + \eta_1^2\, dv^2 + \zeta_2^2\, dw^2.$$

Pour que leur rapport ne dépende que de la position du point, il faut évidemment que

$$\xi = \eta_1 = \zeta_2.$$

Appelons k la valeur commune de ces trois quantités; d'après ce qui précède k satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 k}{\partial u\, \partial v} = \frac{2}{k} \frac{\partial k}{\partial u} \frac{\partial k}{\partial v}$$

et à deux autres analogues en permutant u, v, w, qui s'intègrent facilement et donnent

$$\frac{1}{k} = f(u) + \varphi(v) + \psi(w),$$

f, φ et ψ étant trois fonctions arbitraires : *nous n'aurons pas besoin de cette formule.*

Calculons les rayons de courbure principaux de la surface $w =$ const. Ils sont donnés par l'une ou l'autre des formules (6), où l'on fait d'abord $du = 0$, puis $dv = 0$. Ce sont

$$\frac{-\xi}{q} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_1}{p_1};$$

or, ici,

$$\xi = \eta_1 = k, \qquad p_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial w}, \qquad q = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial w},$$

comme le montrent les formules (5).

Les rayons de courbure sont égaux, tous les points sont des ombilics, la surface $w =$ const. est une sphère ; il en est de même des surfaces $u =$ const., $v =$ const.

Considérons les sphères w. Puisqu'elles coupent à angle droit deux sphères quelconques $u =$ const., elles ont leur centre dans le plan radical de ces sphères. On conclut de là que toutes les sphères $u =$ const. ont même plan radical et forment un faisceau. De même, pour les deux autres séries de sphères.

Maintenant toutes les sphères u et v étant coupées à angle droit par les sphères w doivent avoir même axe radical, intersection du plan radical de toutes les sphères u avec celui de toutes les sphères v. Mais les sphères u et v se coupant à angle droit, les unes couperont leur plan radical suivant un cercle réel, les autres, non. Elles ne peuvent donc avoir un même axe radical que dans le cas limite où toutes les sphères d'une même série sont tangentes entre elles. Nos trois séries de sphères passent donc par un même point et y touchent trois plans rectangulaires fixes. Dès lors, une inversion ayant pour pôle ce point les change en des plans rectangulaires. De là résulte sans peine le théorème énoncé.

[P4b]

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES BIRATIONNELLES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Étant donnés deux points m, m' situés dans deux plans P, P′ distincts ou non, soient x, y, z les coordonnées trilinéaires de m par rapport à un certain triangle de référence T dans le plan P; de même x', y', z' pour m' par rapport à un triangle T′ de P′.

On dira que m' dérive de m par une transformation quadratique birationnelle si l'on a

$$(1) \qquad \frac{x'}{f(x,y,z)} = \frac{y'}{g(x,y,z)} = \frac{z'}{h(x,y,z)},$$

f, g, h étant trois polynomes homogènes du second degré tels que les équations $f=0$, $g=0$, $h=0$ représentent trois coniques ayant exactement trois points communs d'ailleurs distincts ou confondus : A, B, C.

On donne généralement une forme canonique distincte aux trois cas qui peuvent se présenter : A, B, C distincts; A, B confondus; A, B, C confondus.

Je me propose de montrer qu'on peut présenter ces trois cas sous la même forme géométrique.

1. Supposons d'abord A, B, C distincts et prenons pour triangle de référence T le triangle ABC; A, B, C ne sont pas en ligne droite, sans quoi $f=0$, $g=0$

et $h=0$ auraient plus de trois points communs, car elles comprendraient toute la droite ABC. On aura alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} f &\equiv ayz + bzx + cxy, \\ g &\equiv a'yz + b'zx + c'xy, \\ h &\equiv a''yz + b''zx + c''xy. \end{aligned}\right.$$

Soient

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad A,\ B,\ C,\ A',\ \ldots$$

les mineurs de Δ.

δ n'est pas nul, sans quoi $f=0$, $g=0$, $h=0$ auraient plus de trois points communs. Donc le déterminant adjoint

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

De (1) et (2), on tire

$$\begin{aligned} \frac{x'}{ayz+bzx+cxy} &= \frac{y'}{a'yz+b'zx+c'xy} \\ &= \frac{z'}{a''yz+b''zx+c''xy} = \frac{Ax'+A'y'+A''z'}{\delta yz} \\ &= \frac{Bx'+B'y'+B''z'}{\delta zx} = \frac{Cx'+C'y'+C''z'}{\delta xy}. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta \neq 0$ on pourra prendre comme triangle de référence dans le plan P′, le triangle formé par les droites

$$\begin{aligned} Ax'+A'y'+A''z' &= 0, \\ Bx'+B'y'+B''z' &= 0, \\ Cx'+C'y'+C''z' &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par un choix convenable des coordonnées, les relations (1) prendront la forme

$$(3)\qquad \frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}.$$

2. Si AB sont confondus et distincts de C, on peut choisir le triangle T de façon que

$$\begin{aligned} f &\equiv a\,xz + b\,yz + c\,x^2, \\ y &\equiv a'\,xz + b'\,yz + c'\,x^2, \\ h &\equiv a''\,xz + b''\,yz + c''\,x^2, \end{aligned}$$

et l'on voit de même qu'on peut choisir le triangle T′ de façon que les relations (1) prennent la forme

$$(4) \qquad \frac{x'}{xz} = \frac{y'}{yz} = \frac{z'}{x^2}.$$

3. Enfin, si ABC sont confondus, on voit par un raisonnement analogue qu'on peut mettre la relation (1) sous la forme

$$(5) \qquad \frac{x'}{xy} = \frac{y'}{y^2} = \frac{z'}{x^2 - zy}.$$

Ayant ramené selon les cas la relation (1) à l'une des formes (3), (4), (5) par un simple changement de coordonnées, faisons sur m' une transformation homographique H′ qui le transforme en un point M du plan P de coordonnées X, Y, Z par rapport au même triangle T que m. Et nous définirons cette transformation particulière par les formules

$$\frac{x'}{\mathrm{Y}} = \frac{y'}{\mathrm{X}} = \frac{z'}{\mathrm{Z}} \qquad \text{(dans le premier cas),}$$

$$\frac{x'}{\mathrm{X}} = \frac{y'}{\mathrm{Y}} = \frac{z'}{\mathrm{Z}} \qquad \text{(dans les deux autres cas).}$$

On voit alors que les relations (3), (4), (5) deviennent

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y},$$

$$(7) \qquad \mathrm{X}F'_x + \mathrm{Y}F'_y + \mathrm{Z}F'_z = 0,$$

en posant

$$F \equiv xy - z^2 \qquad \text{(dans le premier cas)},$$
$$F \equiv x^2 - z^2 \qquad \text{(dans le deuxième cas)},$$
$$F \equiv x^2 - 2yz \qquad \text{(dans le troisième cas)}.$$

Ainsi soit H_1 la transformation définie par les formules (6), (7) où F est un certain polynome homogène du second degré et soit H_2 la transformation inverse de H' :

Toute transformation birationnelle quadratique peut se décomposer en une transformation birationnelle quadratique réciproque H_1 *du plan* P *sur lui-même, suivie d'une transformation homographique* H_2 *du plan* P *sur le plan* P'.

De plus, *la transformation* H_1 *s'obtient ainsi : on fait correspondre au point* m *un point* M *tel que :*

1° mM *passe par un point fixe* $O(x = 0, y = 0)$;

2° M *et* m *sont conjugués par rapport à la conique* (*décomposable ou non*) $F = 0$.

Réciproquement une telle transformation est bien birationnelle quadratique réciproque, sauf le cas où F *serait décomposée en deux droites et passerait par* O (*cas où l'on aurait une homologie*). Car les relations (6) peuvent s'écrire

$$\frac{X}{xF'_z} = \frac{Y}{yF'_z} = \frac{Z}{-(xF'_x + yF'_y)}.$$

Les dénominateurs égalés à zéro représentent trois coniques se coupant aux trois points

$$(x = y = 0) \qquad \text{et} \qquad (F'_z = 0,\ xF'_x + yF'_y = 0).$$

Elles ne se coupent en quatre points que dans le cas indiqué.

Enfin, remarquons que : si F est décomposable, deux des points A, B, C sont confondus ; si F n'est pas décomposable mais passe par O, les trois points A, B, C sont confondus ; dans le cas général A, B, C sont distincts.

Observons en passant que si $F = 0$ est un cercle de centre O, la transformation est une simple inversion. D'ailleurs, dans le cas général, on peut supposer qu'il en soit ainsi en faisant d'abord une transformation homographique convenable. Donc, le cas général se ramène à celui de l'inversion au moyen de deux transformations homographiques.

Remarque. — Mentionnons, pour terminer, une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements que je crois nouvelle et qui se démontre facilement au moyen de la transformation quadratique birationnelle :

Toute hypocycloïde à trois rebroussements peut être considérée comme enveloppe de celles des hyperboles passant par ses trois rebroussements dont l'angle des asymptotes est de 60°.

[D2aβ]

SUR LE RÉSULTAT DU CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES DANS UNE SÉRIE ;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

On sait que si l'on modifie de façon quelconque l'ordre des termes d'une série absolument convergente, la nouvelle série est encore absolument convergente et a même somme.

On sait aussi que l'on peut toujours modifier l'ordre des termes supposés réels d'une série semi-convergente de façon à lui donner telle somme que l'on voudra (finie ou même infinie).

Il est intéressant de compléter ces résultats en cherchant l'effet produit par une modification quelconque de l'ordre des termes d'une série *quelconque*.

Établissons d'abord quelques théorèmes presque évidents.

1° *Si, dans une série* S *convergente à termes tous positifs ou nuls, on modifie l'ordre de ces termes de façon quelconque, la série transformée* S' *est aussi convergente et a même somme que* S.

En effet, aussi grand que soit n on peut trouver p tel que S_p contienne au moins tous les termes de S'_n, donc

$$S'_n \leqq S_p \leqq s.$$

Quand n croît indéfiniment S'_n a donc une limite $s' \leqq s$. On a de même

$$s \leqq s'.$$

Donc S' converge et a pour somme $s' = s$.

2° *Si l'on modifie l'ordre des termes d'une série divergente* S *à termes positifs ou nuls, la série transformée* S' *est aussi divergente.*

En effet, si grand que soit le nombre A, on peut trouver un nombre q tel que pour $n \geqq q$ on ait

$$S_n > A.$$

Or, on peut trouver p tel que S'_p contienne au moins tous les termes de S_q; donc

$$S'_p \geqq S_q > A,$$

et alors pour $n > p$,

$$S'_n > A.$$

3° *Si, dans une série* S *à termes réels ou imaginaires quelconques dont le terme général* u_n *tend vers zéro, on modifie l'ordre des termes de façon quelconque, le terme général* u'_n *de la série transformée* S' *tend aussi vers zéro.*

En effet, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver p tel que pour $n > p$

$$|u_n| < \varepsilon.$$

Or les termes $u_1, \ldots, u_p$ sont devenus $u'_{m_1}, \ldots, u'_{m_p}$. Soit q, un nombre entier supérieur à $m_1, \ldots, m_p$. Pour $m > q$, le terme u'_m ne peut provenir que d'un terme u_n tel que n soit supérieur à p. Donc, pour $m > q$, on a

$$|u'_m| = |u_n| < \varepsilon.$$

4° Il en résulte que si, au contraire, le terme général de S ne tend pas vers zéro, il en sera de même de celui de S'.

SÉRIES A TERMES RÉELS.

Appelons P et Q les séries formées par les termes positifs d'une part et les termes négatifs d'autre part, de la série à termes réels S dont le terme général est u_n.

Nous dirons que la série S est absolument convergente si les séries P et Q sont convergentes. Nous dirons qu'elle est absolument divergente si l'une des séries P et Q converge et que l'autre diverge; ou bien si le terme général u_n ne tend pas vers zéro.

Enfin nous dirons que la série S est semi-convergente ou semi-divergente si les séries P et Q divergent toutes deux et si de plus le terme général de chacune d'elles tend vers zéro.

Ces définitions n'impliquent pas de contradiction, car si P et Q convergent toutes deux, S converge aussi ; de même dans le second cas, S diverge.

On voit maintenant qu'*une série quelconque* S *à termes réels peut toujours être rangée dans l'une des trois classes précédentes,* en convenant que, si l'une des séries P ou Q est limitée, on lui ajoute une infinité de termes nuls.

Et alors, ce qu'il y a lieu d'observer, c'est que *si l'on modifie l'ordre des termes de la série* S *de façon quelconque, elle reste toujours dans la même classe.*

Ceci résulte immédiatement des théorèmes énoncés plus haut. En outre, la démonstration classique du théorème cité au début, concernant les séries semi-convergentes, suppose seulement sur ces séries que les séries P et Q divergent et que leur terme général tend vers zéro. *Elle s'applique donc aussi aux séries semi-divergentes.*

On pourrait encore les ranger d'une autre manière en deux classes.

Convenons de dire qu'une série S telle que S_n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ a pour somme $+\infty$ ou $-\infty$.

Alors, la première classe sera formée des séries S pour lesquelles l'une au moins des séries P ou Q converge. La seconde classe sera formée des autres séries.

On voit que si l'on intervertit l'ordre des termes, une série reste dans sa classe ; mais *une série de la première classe garde toujours la même somme.* Au contraire, *on peut toujours modifier l'ordre des termes d'une série de la seconde classe de façon que* S_n *ne tende vers aucune limite finie ou non.* Il suffira de prendre n_1 termes de P, m_1 termes de Q, n_2 termes de P_1, ..., de façon que

$$\left.\begin{aligned}&(P_{n_1} - Q_{m_1} + \ldots + P_{n_{r-1}} - Q_{m_{r-1}}) + P_{n_r} > A\\ &(P_{n_1} - Q_{m_1} + \ldots + P_{n_r}) \qquad\qquad\quad - Q_{n_r} < B\end{aligned}\right\} \quad (A \neq B).$$

SÉRIES A TERMES IMAGINAIRES.

Le théorème cité au début à propos des séries semi-convergentes ne s'étend pas aux séries à termes imaginaires. Il suffit de considérer l'exemple suivant :

La série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n^2} + i\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

est convergente, car il en est ainsi pour

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

D'autre part,

$$|u_n| = \sqrt{\frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^2}} > \frac{1}{n};$$

donc la série des modules est divergente. Alors la série $\sum u_n$ est semi-convergente. Cependant, en modifiant l'ordre de ses termes, on ne peut lui donner une somme quelconque, car la partie réelle sera toujours $\sum \frac{1}{n^2}$.

[M^4g]

SUR UNE PROPRIÉTÉ APPARTENANT A CERTAINES HÉLICES;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

Considérons les courbes C, C_1 et C_2, où C_1 est le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C, et C_2 le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C_1; $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ trois points correspondants; M_1 étant le centre de la sphère correspondant à M, et M_2 le centre de la sphère correspondant à M_1.

Je me propose de démontrer le théorème suivant :

Si les distances des points M_1 *et* M_2 *aux plans osculateurs aux courbes* C *et* C_1 *sont constantes, ces courbes sont des hélices.*

En effet, soient α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale à la courbe C au point M. Les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la bi-normale au point correspondant M_1 seront aux signes près α'', β'', γ''; α', β', γ'; α, β, γ. Désignons encore par ρ et τ, ρ_1 et τ_1 les rayons de courbure et de torsion de deux courbes aux points M et M_1, et par s et s_1 les arcs de deux courbes.

Nous aurons, d'après les formules de Frenet,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'}{\rho}, & \dfrac{d\alpha''}{ds_1} = \dfrac{\alpha'}{\rho_1}, \\[2mm] \dfrac{d\alpha''}{ds} = \dfrac{\alpha'}{\tau}, & \dfrac{d\alpha}{ds_1} = \dfrac{\alpha'}{\tau_1}, \end{cases}$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\rho}.$$

Cette dernière formule nous montre que, si la courbe C est une hélice, la courbe C_1 sera aussi une hélice.

Remarquons que les distances des points M_1 et M_2 aux plans osculateurs en M et M_1 sont $\tau \dfrac{d\rho}{ds}$ et $\tau_1 \dfrac{d\rho_1}{ds_1}$; on aura alors

$$(3)\qquad \tau \frac{d\rho}{ds} = A,$$

$$(4)\qquad \tau_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} = A_1,$$

A et A_1 étant des constantes. Je dis que les rayons de courbures aux points M, M_1 et M_2 sont égaux.

En effet, on a pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = x + \rho\alpha' - \tau\frac{d\rho}{ds}\alpha'',$$

$$y_1 = y + \rho\beta' - \tau\frac{d\rho}{ds}\beta'',$$

$$z_1 = z + \rho\gamma' - \tau\frac{d\rho}{ds}\gamma'';$$

d'où, en différentiant et en ayant égard aux formules de Frenet, on aura

$$dx_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\alpha''\,ds,$$

$$dy_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\beta''\,ds,$$

$$dz_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\gamma''\,ds;$$

et comme on a, aux signes près,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha'', \qquad \frac{dy_1}{ds_1} = \beta'', \qquad \frac{dz_1}{ds_1} = \gamma'',$$

on aura, en ayant égard à (2),

$$\frac{\rho_1}{\tau} = \pm\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)\right],$$

et, par analogie,

$$\frac{\rho_2}{\tau_1} = \pm\left[\frac{\rho_1}{\tau_1} + \frac{d}{ds_1}\left(\tau_1\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)\right].$$

Il résulte donc, d'après (3) et (4), que ces rayons de courbure sont égaux.

Si nous divisions les relations (3) et (4), on trouve, en ayant égard à (2),

$$\frac{\tau}{\rho} = \pm\frac{A}{A_1},$$

c'est-à-dire que la courbe C est une hélice, et d'après la remarque faite au début, il résulte que les courbes C_1 et C_2 sont aussi des hélices. On remarque que le théorème proposé est en défaut si la constante $A = 0$, car cette condition entraîne aussi la condition $A_1 = 0$. En effet, la courbe C_2 coïncide avec la courbe C, puisque ρ est constant, et les deux courbes C et C_1 sont alors réciproques; le rapport $\frac{\tau}{\rho}$ sera indéterminé.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené.** — *Au sujet des questions* 1804, 1806, 1807.

Si l'on mène à une conique S *les tangentes* MT, MT' *et* mt, mt', *la conique des six points* M, T, T', m, t, t' *est un cercle à la condition que l'axe focal de la conique* S *soit la bissectrice de l'angle* $\widehat{\mathrm{MO}m}$, *et que* OF *soit moyen proportionnel entre* OM *et* Om.

Les couples de points M, m sont les mêmes pour une série de coniques homofocales. Celle de ces coniques dont les asymptotes sont OM, Om est donc tangente à la droite Mm (en son milieu φ), de sorte que *les directions* MO et Mm, *par exemple, sont également inclinées sur* MF *et* MF'. Il suit de là que les paraboles tangentes aux couples de droites MT et MT' en T et T', ou aux couples de droites mt et mt' en t et t', ont même foyer φ, et par suite même axe; c'est la question 1804 généralisée (¹), et le fait énoncé dans la question 1806 devient intuitif.

Il passe aussi au point φ une ellipse du système homofocal considéré, et cette ellipse est normale à la droite Mm. Les longueurs φM et φm étant égales, les directions OM et Om étant également inclinées sur les axes, les points M et m sont les cercles de Chasles de cette ellipse. C'est la question 1807 (²).

(¹) *Nouvelles Annales*, 1901, p. 334.
(²) *Cf.* Duporcq, *Ibid.*, p. 330, 332.

Un abonné. — Le théorème II de la Note de M. Suchar sur le rayon de courbure d'une conique (*N. A.*, 1903, p. 402) a déjà été donné par M. d'Ocagne sous forme de la question 1919. Les deux expressions du rayon de courbure données par M. Suchar au n° 7 de sa Note figurent l'une et l'autre dans la démonstration que M. d'Ocagne a donnée de son théorème (*N. A.*, 1902, p. 231 et 232).

M. S. Chassiotis. — *Au sujet de la question* 1919. — ... Je rectifie une erreur qui s'est glissée dans la solution que j'ai donnée de la question 1919.

Page 93, ligne 3, *au lieu de :*

... et l'intégrale est de la forme

$$p^2 = a\cos\alpha + b\sin\alpha + c,$$

il faut lire :

... dont l'intégrale est

$$2p^2 = c + \sqrt{c^2 - k^2}\sin 2(\alpha + \alpha_0),$$

c et α_0 étant des constantes.

On reconnaît alors que la propriété signalée par l'énoncé de M. M. d'Ocagne n'appartient qu'aux coniques, contrairement à ce que j'avais affirmé.

M. Guichard. — *Au sujet d'un théorème relatif aux lignes de courbures des surfaces.* — Le théorème démontré géométriquement par M. Bricard, dans le numéro d'août des *Nouvelles Annales* (p. 359), est un cas particulier d'une proposition générale que j'ai établie analytiquement dans mon Mémoire *Sur les systèmes cycliques et orthogonaux* (*Annales de l'École Normale,* mars 1903, n° 17), et que j'énonce comme il suit :

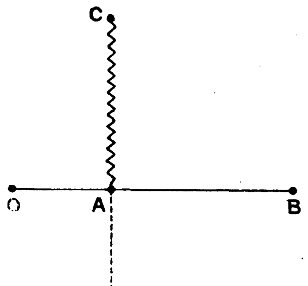
Si deux systèmes correspondants formés de lignes conjuguées sont tels que chaque tangente de l'un soit perpendiculaire à la tangente qui ne lui correspond pas dans l'autre, il en est de même des systèmes déduits des systèmes primitifs en leur appliquant, en sens inverse, la transformation de Laplace.

MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Représenter par une série trigonométrique une fonction de x admettant la période* T *et prenant la valeur b quand x est compris entre* o *et* $\frac{1}{2}$T *et la valeur* o *quand x est compris entre* $\frac{1}{2}$T *et* T.

II. *On considère un levier* OB, *de masse négligeable, de longueur b et mobile, autour du point* O, *dans le plan de la figure. En* A, *à une distance a de* O, *est attachée l'extré-*



mité d'un ressort qui s'allonge de h sous l'action de l'unité de poids, l'autre extrémité étant fixée en C. *L'extrémité* B *du levier porte un poids* W *tel que le levier soit horizontal dans sa position d'équilibre.*

1° *Déterminer l'allongement du ressort dans la position d'équilibre du levier.*

2° *On écarte le levier vers le bas à partir de sa position d'équilibre de manière que le point* A *prenne un petit écart α et puis on abandonne le système à lui-même. Étudier les petites oscillations du système.*

3° *On suppose que* C *n'est plus fixe, mais possède un déplacement vertical harmonique simple* $\lambda \sin qt$, *compté posi-*

tivement dans le même sens que le sens positif adopté pour le déplacement de A. *On demande d'étudier les petites oscillations du point* A, *dans ces nouvelles conditions.*

N. B. — *On suppose les frottements nuls.*

Épreuve pratique. — *La même que pour le certificat de calcul différentiel et intégral.* (Juillet 1903.)

Lyon.

Mécanique. — I. *Vitesses relatives; théorème de Coriolis.*

II. *Théorème des aires.*

Analyse. — I. *Étudier les variations de la fonction*

$$y = \mathrm{L}(x^2) + \frac{3x-2}{x-1};$$

L *étant l'algorithme du logarithme népérien.*

II. *Intégrer*

$$y^2\,dx^2 + x^2\,dy^2 - 2xy\,dx\,dy = 0.$$

Quelle est l'enveloppe des courbes intégrales?

(Juillet 1903.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Établir les lois du mouvement diurne. Dire si ces lois sont rigoureusement exactes.*

II. *On considère une planète de masse* μ (*celle du Soleil étant* 1) *qui décrit une orbite circulaire dont on prend le rayon pour unité de longueur.*

On considère, en second lieu, une comète de masse négligeable, qui se meut sur une parabole située dans le plan *de l'orbite de la planète, la distance périhélie* $q = \mathrm{SC}$ *de cette comète étant* $\frac{1}{n}$.

On suppose que la planète et la comète se meuvent dans le même sens et que le rayon vecteur de la planète, au moment du passage de la comète au périhélie, fait un angle v_0 *avec le rayon vecteur de la comète.*

On demande de déterminer la constante v_0 *de manière que la comète rencontre la planète dans la suite de sa course.*

Application au cas où

$$n = 4 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{324439}.$$

On rappelle aux candidats les formules suivantes :

$$n^2 a^3 = k^2(1+\mu),$$

$$r = q\left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{v}{2}\right),$$

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{v}{2} = \frac{k\sqrt{1+\mu'}}{\sqrt{2q^3}}(t - \mathrm{T}),$$

où μ' *désigne la masse de la comète,* T *la date de son passage au périhélie,* k *la constante de Gauss,* n *le moyen mouvement de la planète, c'est-à-dire le coefficient du temps dans l'expression de l'anomalie,* a *le demi-grand axe de l'orbite.*

NOTA. — *Les candidats sont autorisés à se servir de Tables de logarithmes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une planète a pour excentricité* $\sin\varphi$ *où* $\varphi = 14^\circ 12' 1'', 87$. *Elle part de son périhélie à l'origine du temps. On demande de calculer son anomalie excentrique au moment où elle a accompli le cinquième de sa révolution.* (Juillet 1903.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir la suite des formules rigoureuses qui permettent de calculer :*

1° *L'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne ;*

2° *L'anomalie vraie et le rayon vecteur en fonction de l'anomalie excentrique.*

II. *Développer l'anomalie excentrique en série ordonnée suivant les sinus des multiples de l'anomalie moyenne.*

Dans ce développement, on négligera les puissances de l'excentricité supérieures à la cinquième.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant l'ascension droite α et la déclinaison δ d'un astre ainsi que l'inclinaison ε de l'écliptique, calculer la longitude λ et la latitude β de cet astre.*

Données numériques :

$$\alpha = 19^h 46^m 53^s,45, \qquad \delta = -34^\circ 53' 41'',9, \qquad \varepsilon = 23^\circ 27' 7'',1.$$

Indiquer la signification géométrique de l'angle auxiliaire employé, si l'on rend les formules calculables par logarithmes au moyen d'un tel angle.

SOLUTION.

$$\begin{aligned}\text{tang}\,N &= \text{tang}\,\delta : \sin\alpha,\\ \text{tang}\,\lambda &= \text{tang}\,\alpha\cos(N-\varepsilon) : \cos N,\\ \text{tang}\,\beta &= \text{tang}(N-\varepsilon)\sin\lambda\end{aligned}$$

(N est l'angle que fait l'équateur avec l'arc de grand cercle qui joint l'astre à l'origine des ascensions droites. Cette remarque permet d'écrire immédiatement les équations précédentes; $\cos\alpha$ et $\cos\lambda$ ont le même signe).

	Log.
tang δ	$\bar{1},8435312$
col. sin α	$0,0490546$
tang N	$\bar{1},8925858$
tang α	$0,2980486$
$\cos(N-\varepsilon)$	$\bar{1},9858755$
col. cos N	$0,1033830$
tang λ	$0,3873071$
tang$(N-\varepsilon)$	$\bar{1},4137105$
sin λ	$\bar{1},9662731$
tang β	$\bar{1},3799836$

Résultats.

$$\alpha = 296°.43'.21'',75 \qquad \lambda = 292°.17'.21'',9$$
$$N = 37.59.\ 8,39 \qquad \beta = -\ 13.29.20,1$$
$$\varepsilon = 23.27.\ 7,\ 1$$
$$N - \varepsilon = 14.32.\ 1,29$$

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Éclipses de Lune. Chercher si, dans le voisinage d'une opposition, il y aura éclipse de Lune.*

L'éclipse devant avoir lieu, calculer l'instant auquel se produit une phase déterminée du phénomène.

Évaluer la grandeur de l'éclipse.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Connaissant le côté a et les deux angles adjacents* B, C *d'un triangle géodésique, calculer les autres éléments du triangle ainsi que sa surface.*

2° *L'erreur du côté a étant supposée de* $56^{cm},7$, *calculer les erreurs de b, c et* A.

Données numériques :

$$a = 63\,576^{m},89 \qquad R = 6\,378\,356^{m} \qquad B = 52°.43'.19'',6$$
$$C = 63.54.20,7$$
$$B + C = 116.38$$

SOLUTION.

$$\varepsilon'' = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C) R^2 \sin 1''}, \qquad B' = B - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$C' = C - \frac{\varepsilon}{3}, \qquad A' = 180° - (B+C) + \frac{2\varepsilon}{3};$$

$$b = a\frac{\sin B'}{\sin A'}, \qquad c = a\frac{\sin C'}{\sin A'},$$

$$A = 180° - (B+C) + \varepsilon, \qquad S = S' = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{2\sin A'};$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta B' = \Delta C' = \Delta A = 0, \qquad \Delta b = \Delta a\frac{\sin B'}{\sin A'},$$

$$\Delta c = \Delta a\frac{\sin C'}{\sin A'},$$

ou

$$\Delta b = \Delta a\,\frac{b}{a}, \qquad \Delta c = \Delta a\,\frac{c}{a};$$

	Log.		Log.
a	4,80329925	R	6,8047
a^2	9,6066	R^2	13,6094
sin B	$\bar{1}$,9007	2	0,3010
sin C	$\bar{1}$,9533	sin 1″	$\bar{6}$,6856
a^2 sin B sin C	9,4606	sin(B + C)	$\bar{1}$,9513
2 sin(B + C) R^2 sin 1″	8,5473		
ε	0,9133		

$$\varepsilon = 8'',19 \qquad \frac{\varepsilon}{3} = 2'',73$$

$$\begin{aligned} B' &= 52^\circ.43'.16'',87 \\ C' &= 63.54.17,97 \\ A' &= 63.22.25,16 \end{aligned}$$

	Log.		Log.
sin B′	$\bar{1}$,9007490	a^2	9,6065985
a	4,80329925	sin B′ sin C′	$\bar{1}$,8540572
col. sin A′	0,0486876	col. 2	$\bar{1}$,6989700
sin C′	$\bar{1}$,9533082	col. sin A′	0,0486876
b	4,7527359	S′	9,2083133
c	4,8052951		

$$\begin{aligned} A &= 63^\circ 22' 27'',89 & \Delta A &= 0 \\ b &= 56589^{m},51 & \Delta b &= 50^{c},5 \\ c &= 63869,74 & \Delta c &= 57,0 \\ S &= 1\,615\,523\,500^{m^2} \end{aligned}$$

	Log.		Log.
$b : a$	$\bar{1}$,9494	Δb	1,7030
Δa	1,7536		
$c : a$	0,0020	Δc	1,7556

(Novembre 1902.)

Épreuve pratique. — *Connaissant les coordonnées géographiques* (λ, φ) (λ', φ') *de deux points de la Terre, calculer, en milles marins, la longueur* S *de l'arc de loxodromie, qui joint ces deux points, ainsi que l'angle* V *sous lequel la courbe coupe les méridiens successifs.*

(*On considérera la Terre comme sphérique.*)

Données numériques :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \;\; 6^\circ 49' 50'' \\ \lambda' = 82.14.59\end{array}\right\}\text{ longitudes ouest,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = 48.23.32 \\ \varphi' = \;\; 9.22.\;9\end{array}\right\}\text{ latitudes boréales.}$$

SOLUTION.

$$\operatorname{tang} V = \frac{M(\lambda - \lambda')\sin 1''}{\operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)} = \frac{N}{D};$$

$$S = \frac{\varphi - \varphi'}{\cos V}.$$

$\lambda - \lambda' = 75^\circ 25'\ 9'' = 271\,509''$, $\quad \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 69^\circ 11' 46''$,

$\varphi - \varphi' = 39^\circ\ 1' 23'' = 140\,483''$, $\quad \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} = 49^\circ 41'\ 4'',5$;

Log.				Résultats.
$\sin 1''$..	$\bar{6},6855749$	$\operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$..	0,4202826	$V = 58^\circ 36' 0'',08$
M.....	$\bar{1},6377843$	$\operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi\lambda}{2}\right)$.	0,0713357	$S = 269\,636'',3$
$\lambda - \lambda'$.	5,4337842	D................	0,3489469	$= 74^\circ 53' 56'',3$
N.....	$\bar{1},7571434$			$= 4493^{\text{mil}},938$
D.....	$\bar{1},5427594$			
tang V.	0,2143840			
$\varphi - \varphi'$.	5,1476238			
séc V..	0,2831545			
S.....	5,4307783			

(Juillet 1903.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorie et mesure de la parallaxe annuelle des étoiles.*

II. *Théorème de Legendre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a observé le passage au premier vertical d'une étoile dont les coordonnées sont*

Asc. droite..... $7^{\text{h}} 58^{\text{m}} 27^{\text{s}},6$ Dist. polaire.... $44^\circ 9' 51''$

Le temps sidéral du passage, corrigé de la réfraction, est

$$6^h 15^m 11^s,3.$$

On demande de calculer :

1° *La colatitude du lieu d'observation.*

2° *La correction de réfraction qu'a dû recevoir le temps observé du passage. Constante de la réfraction* 60″61 (*pour* $\tan z = 1$).

3° *L'erreur que produirait sur la colatitude une erreur d'une seconde sur le temps du passage.*

4° *L'erreur qui résulterait d'une erreur de* 10″ *d'arc sur l'azimut du premier vertical.* (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer les méthodes employées pour déterminer les éléments elliptiques du Soleil.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu de colatitude* 41°9′49″, *on a observé le lever apparent d'une étoile à* $6^h 50^m 41^s$ *de temps sidéral, en un point de l'horizon situé à* 3°25′32″ *du point est vers le nord. Déduire de là l'ascension droite et la distance polaire de l'étoile.*

Réfraction à l'horizon : 33′48″.

On fera les calculs avec des logarithmes à cinq décimales. (Octobre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1840.

(1900, p. 190.)

On décrit un cercle ayant pour diamètre un rayon de courbure d'une conique donnée et l'on mène les tangentes communes à ces deux courbes. Quelle est l'enveloppe de la courbe de contact de ces tangentes et du cercle, lorsque l'on prend successivement tous les rayons de courbure de la conique? (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Soient C la conique donnée, MA et MB deux tangentes à cette conique, A et B leurs points de contact. Construisons le cercle Γ circonscrit au triangle MAB. Il existe un quadrilatère inscrit dans Γ et circonscrit à C, à savoir le quadrilatère AMBM dont deux sommets opposés sont confondus en M. D'après le théorème de Poncelet, tout quadrilatère inscrit à Γ et dont trois côtés sont tangents à C est tel que son quatrième côté est aussi tangent à C.

Soient, en particulier, P le point de contact avec Γ d'une tangente commune à C et à Γ, PQ la seconde tangente issue du point P à C, Q son second point de rencontre avec Γ. Le quadrilatère QPPQ, dont les sommets sont confondus deux à deux en P et en Q est inscrit à Γ; il a ses côtés QP, PP, PQ tangents à C. Donc son quatrième côté QQ est aussi tangent à C. Autrement dit, Q *est, comme* P, *le point de contact avec* Γ *d'une tangente commune à* C *et à* Γ.

Supposons maintenant que les points A et B se rapprochent indéfiniment sur C. Le cercle Γ, qui passe par le point de rencontre des normales en A et B, devient un cercle ayant pour diamètre un rayon de courbure de C. Comme la droite PQ ne cesse pas d'être tangente à C, on voit que *l'enveloppe demandée n'est autre que la conique donnée.*

1851.

(1900, p. 240.)

Soient ABC *un triangle et* Σ *une conique circonscrite donnés. Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A *rencontrent, pour la seconde fois,* Σ *en* α *et* α'. *Les cordes* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *se coupent en un même point* P.

Si la conique Σ *passe par un quatrième point fixe* D, *quel sera le lieu de* P *pour toutes les coniques du faisceau* ABCD? (A. Droz-Farny.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit

$$lyz + mzx + nxy = 0$$

l'équation de Σ, ABC étant pris comme triangle de référence. La bissectrice intérieure de A est

$$y - z = 0;$$

les coordonnées de α sont donc

$$x_1, \quad -\frac{m+n}{l}x_1, \quad -\frac{m+n}{l}x_1.$$

De même celles de α' sont

$$x'_1, \quad \frac{-m+n}{l}x'_1, \quad \frac{m-n}{l}x'_1.$$

La droite $\alpha\alpha'$ a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -\dfrac{m+n}{l} & -\dfrac{m+n}{l} \\ 1 & \dfrac{n-m}{l} & \dfrac{m-n}{l} \end{vmatrix} = 0$$

ou, après simplification,

$$D_1 \equiv (n^2 - m^2)x - mly + nlz = 0.$$

En employant le même procédé, on trouve que les droites $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ ont respectivement pour équations :

$$D_2 \equiv mlx + (l^2 - n^2)y - mnz = 0$$

et

$$D_3 \equiv -nlx + mny + (m^2 - l^2)z = 0.$$

Or, on voit que

$$lD_1 + mD_2 + nD_3 \equiv 0.$$

Cela montre que ces trois droites concourent en un même point P. Pour avoir les coordonnées de P, il suffit de résoudre deux des trois équations des droites considérées par rapport à x, y, z. On trouve

$$(1, 2) \qquad \frac{x}{l(m^2 + n^2 - l^2)} = \frac{y}{m(n^2 + l^2 - m^2)} = \frac{z}{n(l^2 + m^2 - n^2)}.$$

Si a, b, c sont les coordonnées du point D, on doit avoir

$$lbc + mca + nab = 0$$

ou, en désignant par A, B, C les coordonnées de l'inverse de D

$$(3) \qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

On obtiendra le lieu de P en éliminant l, m, n entre (1, 2) et (3). Or les équations (1, 2) peuvent s'écrire

$$\frac{mnx}{m^2+n^2-l^2} = \frac{lny}{n^2+l^2-m^2} = \frac{mlz}{l^2+m^2-n^2} = \frac{mnx+lny}{2n^2} = \frac{mnx+mlz}{2m^2} = \frac{lny+lmz}{2l^2}$$

ou finalement

$$(4)\quad \left\{ \frac{l}{ny+mz} = \frac{m}{lz+nx} = \frac{n}{mx+ly} = \frac{Al+Bm+Cn}{A(ny+mz)+B(lz+nx)+C(mx+ly)}. \right.$$

Le numérateur du dernier rapport étant nul, en vertu de (3), le dénominateur doit être nul aussi, l, m, n n'étant évidemment pas nuls; cela donne, en mettant l, m, n en facteurs,

$$(5)\quad (Bz+Cy)l+(Cx+Az)m+(Ay+Bx)n=0.$$

De (3) et (5) on tire

$$\frac{l}{B(Ay+Bx)-C(Cx+Az)} = \frac{m}{C(Bz+Cy)-A(Ay+Bx)} = \frac{n}{A(Cx+Az)-B(Bz+Cy)}.$$

En portant ces valeurs de l, m, n dans l'égalité des deuxième et troisième rapports (4), on trouve pour l'équation du lieu de P

$$\frac{C(Bz+Cy)-A(Ay+Bx)}{A(Cx+Az)x-B(Bz+Cy)x+B(Ay+Bx)z-C(Cx+Az)z} = \frac{A(Cx+Az)-B(Bz+Cy)}{B(Ay+Bx)y-C(Cx+Az)y+C(Bz+Cy)x-A(Ay+Bx)x}.$$

Ce lieu est une cubique. Développons; il vient successivement

$$\begin{aligned} 0 = {} & [-ABx+(C^2-A^2)y+BCz] \\ & \times[-ABx^2+ABy^2+(B^2-A^2)xy+BCxz-ACyz] \\ & -[ACx-BCy+(A^2-B^2)z] \\ & \times[ACx^2-ACz^2+(A^2-C^2)xz-BCxy+AByz] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&A(B^2-C^2)x^3+B(C^2-A^2)y^3+C(A^2-B^2)z^3\\&\quad+A(A^2-C^2-2B^2)xy^2+B(B^2-A^2-2C^2)yz^2\\&\quad+C(C^2-B^2-2A^2)zx^2+B(2A^2+C^2-B^2)x^2y\\&\quad+C(2B^2+A^2-C^2)y^2z+A(2C^2+B^2-A^2)z^2x=0.\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation

$$\begin{aligned}&\Sigma A(B^2-C^2)x^3+\Sigma A(A^2-C^2-2B^2)xy^2\\&\qquad\qquad+\Sigma B(2A^2+C^2-B^2)x^2y=0,\end{aligned}$$

en convenant de permuter circulairement et simultanément les lettres A, B, C d'une part et x, y, z d'autre part.

1923.

(1901, p. 96.)

On donne une quadrique (Q) *et deux droites* A *et* B; *démontrer que les droites qui, avec* A *et* B, *déterminent un hyperboloïde harmoniquement inscrit* (*ou circonscrit*) *à* (Q) *forment un complexe linéaire.* (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

L'énoncé comprend deux propositions corrélatives : il suffit de démontrer, par exemple, celle qui est relative aux hyperboloïdes harmoniquement circonscrits à (Q).

Considérons les hyperboloïdes (H), qui sont harmoniquement circonscrits à (Q), qui passent par un point fixe a, et qui contiennent enfin les droites A et B. Ces hyperboloïdes sont assujettis à huit conditions linéaires : ils forment donc un faisceau ponctuel. La courbe base de ce faisceau comprend les droites A, B, et celle qui passe par le point a et s'appuie sur A et B. Elle se complète donc d'une quatrième droite D qui s'appuie sur A et B.

Il s'ensuit que toutes les génératrices des hyperboloïdes (H), de même système que A et B, rencontrent une droite fixe D; toutes les droites qui satisfont à la condition de l'énoncé et qui passent en outre par un point fixe a engendrent donc un plan. Ces droites appartiennent bien à un complexe linéaire.

Si la quadrique (Q) se réduit à l'ombilicale, on voit que :

Les droites qui, avec deux droites fixes, déterminent un hyperboloïde orthogonal, engendrent un complexe linéaire.

Ce dernier résultat conduit immédiatement à un théorème énoncé par Ribaucour :

Les droites faisant partie d'un système de grandeur invariable assujetti à quatre conditions, et qui, pour l'ensemble des déplacements infiniment petits de ce système, engendrent un pinceau de normales, forment un complexe linéaire.

Soient, en effet, D et Δ les deux droites qui, d'après le théorème classique de Schönemann et Mannheim, sont conjuguées pour tous les déplacements infiniment petits du système, L une droite quelconque de ce système. La droite L engendre un pinceau dont les foyers sont, comme l'on sait, les points de rencontre avec L des deux droites G et Γ qui s'appuient sur L, D, Δ, et sont en outre perpendiculaires à L. G et Γ sont en outre les normales aux surfaces focales du pinceau.

Pour que le pinceau engendré par L soit un pinceau de normales, il faut et il suffit que G et Γ soient rectangulaires. Or ceci ne peut avoir lieu que si l'hyperboloïde défini par L, D, Δ est *orthogonal*.

Donc, etc.

QUESTIONS.

1984. On donne un cercle de centre O et un point A. Soient M un point du plan et B un des points de rencontre de OM avec le cercle. Le lieu des points M tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OB}$$

est un limaçon de Pascal. (E.-N. BARISIEN.)

1985. On sait que le lieu du milieu des cordes normales à une ellipse est une sextique.

Montrer que l'aire de cette courbe est la moitié de celle de l'ellipse de Frégier relative à l'ellipse donnée.

(E.-N. BARISIEN.)

[R1e]

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE M. KEMPE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Le résultat principal de ce Mémoire est l'apparition d'une relation involutive indépendante des points cycliques dans une question d'ordre purement métrique.

§ I. — LES HYPOTHÈSES.

1. M. Kempe a fait connaître (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. IX, 1878, p. 133) un système articulé dont il a deviné presque tous les cas de déformabilité. M. Darboux a donné une étude analytique remarquable du problème (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. III, 1879, p. 151). La

Fig. 1.

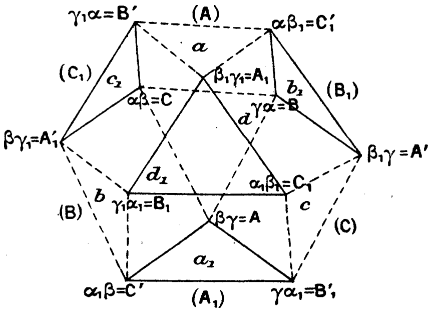


figure 1 représente ce système sous l'aspect qui m'a paru le plus propre à en montrer les diverses symétries.

2. Je définirai l'appareil comme composé de huit triangles :

d	a	b	c
d_1	a_1	b_1	c_1

formant d'une part 2 tétrades, d'autre part 4 couples; 2 *triangles qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulés entre eux*. Les 2 triangles d'un couple seront dits *opposés;* le point d'articulation de 2 triangles, et le point d'articulation des deux triangles opposés aux premiers, seront 2 points opposés.

J'emploierai, pour les 12 points d'articulation, deux systèmes de notations. Dans l'un, les points sont désignés par les couples de lettres $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ avec des indices convenables; les sommets des divers triangles empruntent alors leurs notations aux lettres du Tableau suivant :

$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta_1\gamma_1$	$\beta\gamma_1\alpha_1$	$\gamma\alpha_1\beta_1$
$\alpha_1\beta_1\gamma_1$	$\alpha_1\beta\gamma$	$\beta_1\gamma\alpha$	$\gamma_1\alpha\beta$

L'autre système de notations est donné par ce Tableau :

$$\beta\gamma = \text{A},\quad \beta_1\gamma_1 = \text{A}_1,\quad \beta_1\gamma = \text{A}',\quad \beta\gamma_1 = \text{A}'_1;$$
$$\gamma\alpha = \text{B},\quad \gamma_1\alpha_1 = \text{B}_1,\quad \gamma_1\alpha = \text{B}',\quad \gamma\alpha_1 = \text{B}'_1;$$
$$\alpha\beta = \text{C},\quad \alpha_1\beta_1 = \text{C}_1,\quad \alpha_1\beta = \text{C}',\quad \alpha\beta_1 = \text{C}'_1.$$

Deux points opposés sont $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$, $\beta_1\gamma$ et $\beta\gamma_1$, ..., ou encore A et A_1, A' et A'_1, ..., de même que deux triangles opposés sont d et d_1, a et a_1, ...

3. Les 3 couples de combinaisons (da, bc), (db, ca), (dc, ab) fournissent la manière de voir adoptée par M. Kempe, et qui est aussi celle de M. Darboux.

On peut, de trois manières différentes, regarder le système comme formé de *deux chaînes de 4 triangles réunies entre elles par les derniers sommets des triangles.*

On a désigné par (A) et (A_1), (B) et (B_1), (C) et (C_1) les trois couples de contours quadrangulaires articulés bordés par les triangles en question, et il importe de bien remarquer deux modes distincts de correspondance entre (A) et (A_1) par exemple.

A un point de vue qui prend de l'importance par la suite, les sommets de ces deux quadrilatères sont deux à deux des points opposés,

$$(1)\qquad \begin{cases} (A) & \alpha\beta, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\beta_1, \quad \alpha\gamma_1, \\ (A_1) & \alpha_1\beta_1, \quad \alpha_1\gamma_1, \quad \alpha_1\beta, \quad \alpha_1\gamma, \end{cases}$$

ou encore

$$(1')\qquad \begin{cases} (A) & C, \quad B, \quad C'_1, \quad B', \\ (A_1) & C_1, \quad B_1, \quad C', \quad B'_1, \end{cases}$$

et les triangles qui bordent ces deux quadrilatères sont

$$(1'')\qquad \begin{cases} (A) & d, \quad b_1, \quad a, \quad c_1, \\ (A_1) & d_1, \quad b, \quad a_1, \quad c. \end{cases}$$

A un autre point de vue, les sommets des deux quadrilatères sont, afin de rapprocher les côtés qui portent des triangles articulés entre eux,

$$(2)\qquad \begin{cases} (A) & \alpha\beta, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\beta_1, \quad \alpha\gamma_1, \\ (A_1) & \alpha_1\beta, \quad \alpha_1\gamma, \quad \alpha_1\beta_1, \quad \alpha_1\gamma_1 \end{cases}$$

ou encore

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (A) & C, & B, & C'_1, & B', \\ (A_1) & C', & B'_1, & C_1, & B_1, \end{array} \right.$$

et les points d'attache des triangles sont

$$\beta\gamma, \quad \beta_1\gamma, \quad \beta_1\gamma_1, \quad \beta\gamma_1$$

ou

$$A, \quad A', \quad A_1, \quad A'_1;$$

ces triangles sont d'ailleurs

$$(2'') \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (A) & d, & b_1, & a, & c_1, \\ (A_1) & a_1, & c, & d_1, & b. \end{array} \right.$$

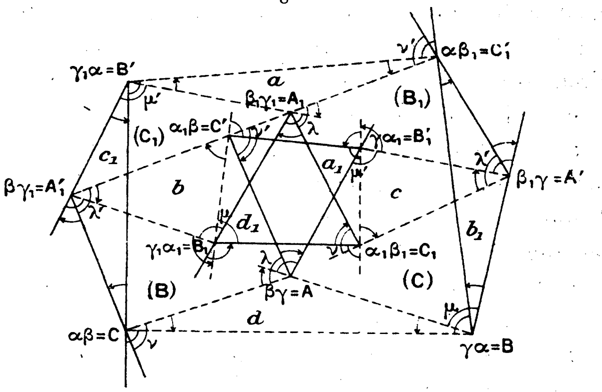
4. La figure, dans son état de généralité, a 21 paramètres de grandeur puisqu'elle est définie par 12 points. Comme les 8 triangles, considérés en eux-mêmes, ont 24 paramètres de grandeur, la possibilité de les agencer comme sur la figure soumet leurs éléments à 3 conditions, en dehors de la question de déformabilité. Si l'on supprime 4 tiges, de sorte qu'il en reste 20, on obtiendra un appareil déformable; si donc l'appareil complet est déformable, il présente 4 tiges surabondantes.

La Note actuelle est relative au second cas de déformabilité de M. Kempe; dans le Mémoire de M. Darboux, c'est la solution III, avec $\varepsilon = -1$ (p. 170 et 185).

L'appareil (comme on le verra) dépend alors de 7 paramètres de grandeur, sans compter le paramètre de déformation. Si l'on part de la figure où les triangles sont agencés, le nombre des conditions de déformabilité est donc 13. Si l'on considère les triangles isolément, le nombre des conditions est 17, les 4 tiges surabondantes entrant comme les autres en ligne de compte.

La figure 2 est relative à ce cas ; et il importe de suivre sur cette figure les faits indiqués au n° **3**. On remarquera, en particulier [(1), (1′), (1″)], les deux quadrilatères

Fig. 2.



$$CBC'_1B' \quad \text{et} \quad C_1B_1C'B'_1,$$

qui sont (comme l'on verra) inversement semblables, et dont les côtés homologues portent des triangles équivalents d et d_1, b_1 et b, a et a_1, c_1 et c ; en outre [(2), (2′), (2″)], si l'on écrit

$$CBC'_1B' \quad \text{et} \quad C'B'_1C_1B_1,$$

les côtés correspondants portent les triangles d et a_1, b_1 et c, a et d_1, c_1 et b, articulés entre eux, et dont les angles à la base sont liés simplement. Les deux autres couples de quadrilatères sont indiqués sur la figure, et ont d'ailleurs les mêmes propriétés que le couple dont on vient de parler.

5. Je donnerai d'abord l'énoncé des 17 conditions *distinctes* relatives aux triangles, en choisissant celles qui sont les plus symétriques par rapport à l'ensemble du système. Je les séparerai en deux groupes, l'un contenant 12 relations angulaires (dont la dernière est la relation involutive signalée au début), l'autre contenant 5 relations d'aires; le plan étant orienté par la flèche circulaire φ, les angles seront considérés avec leurs signes, ainsi que les aires.

1° En premier lieu, les 24 angles de triangles, dont 16 seulement sont paramétriques, doivent vérifier 12 conditions, qui laissent 4 paramètres. Les arcs qui désignent ces angles sur la figure sont munis d'une flèche.

a. D'une part, *les deux triangles qui se réunissent en un point d'articulation doivent y avoir le même angle,* au sens suivant : au point $\alpha\beta$ ou C, par exemple, on doit avoir (à $k\pi$ près)

$$(\mathrm{CB}, \mathrm{CA}) = (\mathrm{CB}', \mathrm{CA}'_1),$$

ces angles étant comptés à partir du quadrilatère (A) vers le quadrilatère (B), de manière que ces deux quadrilatères aient même angle en ce point. On a indiqué sur la figure les angles de cette nature, en les comptant de (B) vers (C), de (C) vers (A), de (A) vers (B), et en s'arrangeant pour que, dans chaque triangle, les trois angles marqués aient une somme nulle.

Voici dès lors l'intérêt de la notation adoptée :

Au point C ou $\alpha\beta$, par exemple, les deux angles marqués peuvent être désignés par $\beta - \alpha$, et il en est de même pour tous les angles analogues.

En effet, prenant arbitrairement un angle α, on peut désigner par

$$\beta - \alpha, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta_1 - \alpha, \quad \alpha - \gamma_1$$

les 4 angles fournis par les sommets du quadrilatère (A), ces angles étant comptés alternativement à partir de ce quadrilatère et vers lui, c'est-à-dire de (A) vers (B), ou de (C) vers (A); l'angle du triangle d marqué au point $\beta\gamma$ est alors $\gamma-\beta$, etc. On peut de même désigner momentanément par $\beta'-\alpha_1$, $\alpha_1-\gamma'$, ..., les 4 angles fournis par les sommets du quadrilatère (A_1), ces sommets étant pris dans l'ordre du Tableau (2) ou (2′) où l'on a égard aux points d'attache des triangles; l'angle du triangle a_1 marqué au point $\beta\gamma$ est alors $\gamma'-\beta'$, etc. Comme on veut avoir [Tableau (2″)]

$$\gamma'-\beta'=\gamma-\beta, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\beta'-\beta=\gamma'-\gamma=\beta'_1-\beta_1=\gamma'_1-\gamma_1,$$

on prend

$$\beta'=\beta, \quad \gamma'=\gamma, \quad \ldots,$$

et les angles fournis par les sommets du quadrilatère (A_1) sont

$$\beta-\alpha_1, \quad \alpha_1-\gamma, \quad \ldots.$$

Le fait annoncé est établi.

On a ainsi 11 conditions (et non 12); il reste pour le moment 5 paramètres angulaires, correspondant aux cinq différences

$$\beta-\alpha, \quad \gamma-\alpha, \quad \beta_1-\alpha, \quad \gamma_1-\alpha, \quad \alpha_1-\alpha.$$

a′. Il n'est pas fait mention dans le Mémoire de M. Kempe d'une relation angulaire essentielle, à savoir la relation (39-40) du Mémoire de M. Darboux. Aux sommets des deux quadrilatères (A) et (A_1) qui se correspondent d'après le Tableau (2), les angles de triangles *comptés à partir des quadrilatères* sont respectivement

$$\begin{array}{llll} \beta-\alpha, & \gamma-\alpha, & \beta_1-\alpha, & \gamma_1-\alpha, \\ \beta-\alpha_1, & \gamma-\alpha_1, & \beta_1-\alpha_1, & \gamma_1-\alpha_1, \end{array}$$

de sorte que les angles de la seconde suite sont ceux de la première augmentés d'une même quantité $\alpha - \alpha_1$. L'expression de cette différence a été donnée par M. Darboux. Avec les notations actuelles, la formule de cet auteur conduit au résultat suivant :

Si l'on regarde les trois couples d'angles α, α_1; β, β_1; γ, γ_1 *comme les arguments de trois couples de droites menées par un point dans un plan, le faisceau de ces droites doit être en involution.*

On a d'une part trois relations à 4 termes

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)} : \frac{\sin(\beta-\alpha_1)}{\sin(\gamma-\alpha_1)} = \frac{\sin(\beta_1-\alpha_1)}{\sin(\gamma_1-\alpha_1)} : \frac{\sin(\beta_1-\alpha)}{\sin(\gamma_1-\alpha)}, \qquad \ldots,$$

ou encore, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$\frac{\sin C \sin C'_1}{\sin B \sin B'} = \frac{\sin C_1 \sin C'}{\sin B_1 \sin B'_1}, \qquad \ldots;$$

les deux membres de la première relation sont liés aux deux quadrilatères (A) et (A_1).

On a, d'autre part, quatre relations à 3 termes

$$\frac{\sin(\beta-\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\gamma)} \times \frac{\sin(\gamma-\beta_1)}{\sin(\beta_1-\alpha)} \times \frac{\sin(\alpha-\gamma_1)}{\sin(\gamma_1-\beta)} = -1,$$

$$\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\gamma_1)} \times \frac{\sin(\gamma_1-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} \times \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta_1)} = -1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou encore

$$\sin A' \sin B' \sin C' = -\sin A'_1 \sin B'_1 \sin C'_1,$$

$$\sin A_1 \sin B'_1 \sin C = -\sin A \sin B' \sin C_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous reviendrons sur les quatre hexagones, très visibles dans la figure 1, auxquels se rattachent ces dernières relations.

a''. Donc : *Si l'on prend arbitrairemnt un angle* α, *on peut déterminer* 5 *angles* $\beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, *tels que les angles de triangles soient* $\gamma - \beta, \ldots$; *et, si l'on regarde les trois couples d'angles comme les arguments de trois couples de directions rapportées à un axe* Ox, *ces trois couples de directions sont en involution.*

Les 4 paramètres angulaires sont ceux d'un faisceau involutif de 6 droites.

2° En second lieu, les 8 paramètres relatifs à la grandeur des triangles doivent satisfaire à 5 conditions, qui laissent 3 nouveaux paramètres. Soient $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, et $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$, $\overline{d_1}$ les aires algébriques des triangles, les sommets étant pris dans l'ordre $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ pour chaque triangle.

b. *D'une part, les aires algébriques de deux triangles opposés doivent être égales.*

b'. *D'autre part, la somme des aires algébriques* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ *doit être nulle.*

b''. On doit donc avoir

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c} \overline{d} + \overline{d_1} = 0, \quad \overline{a} + \overline{a_1} = 0, \quad \overline{b} + \overline{b_1} = 0, \quad \overline{c} + \overline{c_1} = 0, \\ \overline{d} + \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0. \end{array} \right.$$

On peut écrire

$$\overline{d} - \overline{b_1} + \overline{a} - \overline{c_1} = 0$$

ou

$$\overline{ABC} - \overline{A'BC'_1} + \overline{A_1B'C'_1} - A'_1B'C = 0$$

ou, en changeant les signes,

$$\overline{ACB} + \overline{A'BC'_1} + \overline{A_1C'_1B'} + \overline{A'_1B'C} = 0;$$

la somme algébrique des aires des triangles construits sur les côtés du quadrilatère (A) par exemple doit donc être nulle, le premier sommet étant successivement A, A′, A_1, A'_1, les deux derniers sommets étant pris dans l'ordre circulaire CBC'_1B'.

6. Voici une conséquence des hypothèses faites, dont nous aurons à faire usage; l'involution a' joue ici un rôle important. Considérons, par exemple, les côtés de triangles qui doivent former les deux quadrilatères (A_1) et (A); je dis que l'on a

$$\frac{C_1B_1}{CB}=\frac{B_1C'}{BC'_1}=\frac{C'B'_1}{C'_1B'}=\frac{B'_1C_1}{B'C}(=k). \tag{4}$$

On a, en effet, indépendamment des conditions (3),

$$\frac{\overline{d_1}}{\overline{d}}=\left(\frac{C_1B_1}{CB}\right)^2 \times\left(\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1)\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\gamma_1-\beta_1)}:\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}\right),$$

et, en échangeant β et β_1,

$$\frac{\overline{b}}{\overline{b_1}}=\left(\frac{B_1C'}{BC'_1}\right)^2 \times\left(\frac{\sin(\beta-\alpha_1)\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\gamma_1-\beta)}:\frac{\sin(\beta_1-\alpha)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta_1)}\right);$$

les deux parenthèses qui contiennent des sinus sont égales, la suppression du facteur commun

$$\sin(\alpha_1-\gamma_1):\sin(\alpha-\gamma)$$

réduisant cette égalité à la suivante

$$\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}:\frac{\sin(\gamma_1-\beta_1)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)}=\frac{\sin(\gamma-\beta_1)}{\sin(\alpha-\beta_1)}:\frac{\sin(\gamma_1-\beta)}{\sin(\alpha_1-\beta)},$$

que le changement des moyens transforme en la seconde des relations à quatre termes fournies par l'involution supposée. On a donc

$$(5) \qquad \frac{\overline{d_1}}{\overline{d}} : \frac{\overline{b}}{\overline{b_1}} = \left(\frac{C_1B_1}{CB}\right)^2 : \left(\frac{B_1C'}{BC'_1}\right)^2;$$

en vertu des relations (3) on a, par suite, la première des relations (4).

On a facilement la valeur de k qui correspond à l'hypothèse $d_1 = -d, \ldots$; si l'on prend, par exemple, les triangles b et b_1, cela donne, d'après ce qui précède,

$$-\frac{1}{k^2} = \frac{\sin(\beta - \alpha_1)\sin(\alpha_1 - \gamma_1)\sin(\gamma - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \alpha)\sin(\alpha - \gamma)\sin(\gamma_1 - \beta)};$$

or, la seconde relation d'involution à trois termes est

$$-1 = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1)\sin(\gamma_1 - \beta)\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\gamma - \beta_1)\sin(\alpha_1 - \gamma_1)};$$

on a donc, en multipliant,

$$(6) \qquad k^2 = \frac{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\beta_1 - \alpha_1)\sin(\beta - \alpha_1)},$$

et l'on aurait une formule analogue avec γ au lieu de β; on peut écrire

$$(6') \qquad k^2 = \frac{\sin C \sin C'_1}{\sin C_1 \sin C'} = \frac{\sin B \sin B'}{\sin B_1 \sin B'_1}.$$

On aurait des expressions analogues pour k'^2 et k''^2 en considérant les couples de quadrilatères (B_1) et (B), (C_1) et (C).

§ II. — Déformabilité du système.

7. Laissons maintenant de côté la figure 2, considérons (*fig.* 3 et 4) 8 triangles qui seront simplement astreints aux 17 conditions a'' et b''; nous allons montrer qu'il est possible de construire avec ces triangles la

figure 2, et cela d'une infinité de façons, ce qui donne un appareil déformable.

La démonstration qu'on va lire est imitée de celle de M. Kempe, et nous emploierons en les modifiant légèrement les notations de l'auteur; nous remplacerons

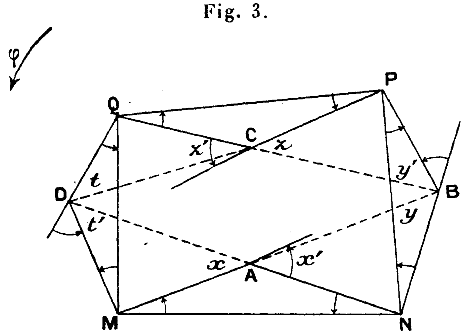
$$(C, B, C'_1, B'), \quad (C_1, B_1, C', B'_1), \quad (A, A', A_1, A'_1),$$

par

$$(M, N, P, Q), \quad (M_1, N_1, P_1, Q_1), \quad (A, B, C, D).$$

a. La figure 3 se compose de 4 triangles, dont les

Fig. 3.



angles marqués sur la figure satisfont aux 4 conditions

$$(7) \qquad M = M, \qquad N = N, \qquad P = P, \qquad Q = Q;$$

les angles A, B, C, D, *qui sont ceux de la figure* 2 *changés de signes*, seront désignés par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, de sorte que l'on aura

$$\widehat{A} = M + N, \qquad \widehat{B} = N + P, \qquad \widehat{C} = P + Q, \qquad \widehat{D} = Q + M,$$

avec

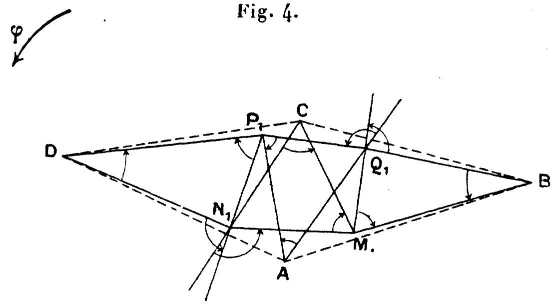
$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D};$$

nous représenterons par a, b, c, d les quatre côtés du quadrilatère MNPQ, par $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ les aires $\overline{AMN}$,

$-\overline{BNP}$, $\overline{CPQ}$, $-\overline{DQM}$, qui sont positives dans le cas de figure adopté.

b. La figure 4 est analogue à la figure 3, et d'ailleurs complètement déterminée par elle. Les sommets du quadrilatère étant pris dans l'ordre P_1, Q_1, M_1, N_1 [Tableau (2')], on a d'abord les quatre conditions d'angles

Fig. 4.



$$(8)\qquad P_1 = P_1,\qquad Q_1 = Q_1,\qquad M_1 = M_1,\qquad N_1 = N_1.$$

Afin d'avoir (*fig.* 3 et 4, quadrilatères MNPQ et $P_1Q_1M_1N_1$)

$$\widehat{A} = \widehat{A},\qquad \widehat{B} = \widehat{B},\qquad \widehat{C} = \widehat{C},\qquad \widehat{D} = \widehat{D}$$

ou

$$\widehat{A} = P_1 + Q_1,\qquad \widehat{B} = Q_1 + M_1,$$
$$\widehat{C} = M_1 + N_1,\qquad \widehat{D} = N_1 + P_1,$$

on a en second lieu les trois conditions

$$(9)\quad P_1 - M = -(Q_1 - N) = M_1 - P = -(N_1 - Q)(= \delta);$$

les angles de triangles comptés à partir des quadrilatères sont respectivement

$$M,\quad -N,\quad P,\quad -Q,$$
$$P_1,\quad -Q_1,\quad M_1,\quad -N_1,$$

et les angles de la seconde suite sont ceux de la première suite augmentés d'une même quantité δ. On doit remarquer les égalités

$$M - P = A - B = -(C - D) = -(M_1 - P_1),$$
$$N - Q = B - C = -(D - A) = -(N_1 - Q_1).$$

La valeur commune des différences (9), désignée précédemment par $(\alpha - \alpha_1)$, doit en outre donner lieu à l'involution a'; il n'est pas sans intérêt de retrouver par cette voie la formule de M. Darboux, bien que les relations d'involution vraiment essentielles ici soient celles qui ont été écrites. Désignons par m, n, p, q les cotangentes des angles marqués sur la figure aux points M, N, P, Q; on aura

$$\operatorname{tang}(\beta - \alpha) = \frac{1}{m}, \qquad \operatorname{tang}(\gamma - \alpha) = -\frac{1}{n},$$
$$\operatorname{tang}(\beta_1 - \alpha) = \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{tang}(\gamma_1 - \alpha) = -\frac{1}{q};$$

l'involution en question donne la relation

$$\begin{vmatrix} 0 \times \operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha) & 0 + \operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha) & 1 \\ \dfrac{1}{mp} & \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{p} & 1 \\ \dfrac{1}{np} & -\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{q}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\cot\delta = \frac{nq - mp}{m + n + p + q} = \frac{\Delta}{S}; \tag{10}$$

dans le Mémoire de M. Darboux, m, n, p, q représentent les quantités désignées ici par $\frac{1}{m}$, $-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{q}$, et de plus les lettres M_1, N_1, P_1, Q_1 remplacent les lettres P_1, Q_1, M_1, N_1. On a alors, pour le quadrilatère (A_1),

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{p\Delta - S}{pS + \Delta} = \frac{p\Delta - S}{(p+n)(p+q)}, \\ -n_1 &= \frac{q\Delta + S}{qS - \Delta} = \frac{q\Delta + S}{(q+p)(q+m)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en suivant ici l'ordre $M_1N_1P_1Q_1$ [Tableau (1')], et en observant que les couples de points *opposés* sont M et M_1, N et N_1, ..., A et C, B et D, on a les quatre conditions d'aires

$$(11)\qquad \overline{A}_1 = -\overline{A},\qquad \overline{B}_1 = -\overline{B},\qquad \overline{C}_1 = -\overline{C},\qquad \overline{D}_1 = -\overline{D},$$

les notations $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, ... désignant les aires $\overline{CM_1N_1}$, $-\overline{DN_1P_1}$, ...

On a alors

$$\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{N_1P_1}{NP} = \frac{P_1Q_1}{PQ} = \frac{Q_1M_1}{QM} (= k),$$

$$k^2 = \frac{\sin M \sin P}{\sin M_1 \sin P_1} = \frac{\sin N \sin Q}{\sin N_1 \sin Q_1}.$$

a'. Nous joindrons enfin aux conditions (7) qui concernent la figure 3 la nouvelle condition

$$(12)\qquad \overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D}.$$

c. La figure 3 possède un paramètre de déformation, l'angle MNP par exemple; nous supposerons que, dans la figure 4, l'angle $M_1N_1P_1$ est égal à l'angle MNP, de sorte que les deux quadrilatères MNPQ et $M_1N_1P_1Q_1$ sont inversement semblables. La figure 3 dépend de 7 paramètres, sans compter le paramètre de déformation, puisque les 12 éléments des triangles sont astreints aux 5 conditions (7) et (12); la figure 4 est complètement déterminée par la figure 3, au moyen des 12 conditions (8), (9) et (10), (11) et de l'hypothèse relative à l'angle $M_1N_1P_1$; l'ensemble des deux figures dépend de 7 paramètres, sans compter le paramètre de déformation.

[Relativement à la figure 4, M. Kempe fait les hypothèses

$$\begin{array}{lll} M_1 = M_1, & \widehat{A} = \widehat{A}, & a_1 = ka, \\ N_1 = N_1, & \widehat{B} = \widehat{B}, & b_1 = kb, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

qui forment onze conditions distinctes, et, dans une rédaction d'ailleurs très concise, affirme, sans démonstration formelle, la possibilité de déterminer k de manière à avoir à la fois

$$\overline{A}_1 = -\overline{A}, \qquad \overline{B}_1 = -\overline{B}, \qquad \ldots$$

(l'auteur ne met pas de signes); cette possibilité est une conséquence de l'involution a'', ou, si l'on veut, de la relation (10) de M. Darboux. Voici comment M. Kempe calcule la valeur de k. En posant

$$P = \frac{a^2 c^2}{\overline{A}\,\overline{C} \sin A \sin C} = \frac{b^2 d^2}{\overline{B}\,\overline{D} \sin B \sin D},$$

on a la relation facile à vérifier

$$\left(\frac{a^2}{\overline{A}} \cot A + \frac{c^2}{\overline{C}} \cot C\right) - \left(\frac{b^2}{\overline{B}} \cot B + \frac{d^2}{\overline{D}} \cot D\right)$$
$$= \frac{P}{2} \sin(M - P) \sin(N - Q);$$

pour la figure 4, il faut remplacer a par ka, $\overline{A}$ par $-\overline{A}$, $\widehat{A}$ par $\widehat{C}$, par suite P par Pk^4, et l'on a

$$-\left(\frac{a^2}{\overline{A}} \cot C + \frac{c^2}{\overline{C}} \cot A\right) + \left(\frac{b^2}{\overline{B}} \cot D + \frac{d^2}{\overline{D}} \cot B\right)$$
$$= \frac{P}{2} k^2 \sin(M - P) \sin(N - Q);$$

si l'on retranche membre à membre, en tenant compte des égalités

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}, \qquad \frac{a^2}{\overline{A}} + \frac{c^2}{\overline{C}} = \frac{b^2}{\overline{B}} + \frac{d^2}{\overline{D}},$$

on obtient par exemple

$$\left(\frac{\overline{A}}{a^2} + \frac{\overline{C}}{c^2}\right) \frac{\sin(B+D)}{\sin B \sin D} (\sin B \sin D - \sin A \sin C)$$
$$= \frac{1}{2}(k^2 - 1) \sin(M - P) \sin(N - Q);$$

à cause de $A = M + N, \ldots,$ il reste

$$1 - k^2 = 2\left(\frac{\overline{A}}{a^2} + \frac{\overline{C}}{c^2}\right) \frac{\sin(B+D)}{\sin B \sin D} = \ldots.$$

M. Darboux donne la formule

$$k^2 = \frac{(nq - mp)^2 + (m+n+p+q)^2}{(m+n)(m+q)(p+n)(p+q)},$$

à laquelle on arrive en observant que les hypothèses

$$\overline{A}_1 + \overline{A} = 0, \qquad \ldots$$

donnent

$$-k^2 = \frac{m_1 + n_1}{m + n} = \frac{n_1 + p_1}{n + p} = \ldots,$$

et en tenant compte des formules (10'); la relation entre m, n, p, m_1, n_1, p_1 qui se présente ici exprime l'involution dont on a parlé : si l'on y regarde n et n_1 comme des variables, on peut faire en effet n et n_1 infinis, ou $n = -m$ avec $n_1 = -m_1$, ou $n = -p$ avec $n_1 = -p_1$.]

8. Il s'agit de faire voir que les quadrilatères ABCD des figures 3 et 4 sont égaux. On a d'abord, en ayant égard aux couples de points opposés,

$$\frac{\overline{B}}{\overline{A}} = \frac{NP \times NB}{NM \times NA}, \qquad \frac{\overline{B}}{\overline{A}} = \frac{N_1P_1 \times N_1D}{N_1M_1 \times N_1C},$$

et par suite

$$\frac{NB}{NA} = \frac{N_1D}{N_1C};$$

les triangles ANB et CN_1D sont donc inversement semblables. Il en est de même des triangles CQD et AQ_1B. Or on a, dans la figure 3,

$$\begin{aligned}(AB, CD) &= (AB, NB) + (NB, NP) + (NP, QM)\\ &\quad + (QM, QD) + (QD, CD)\\ &= (AB, NB) + (NP, QM) + (QD, CD) + (N - Q);\end{aligned}$$

la figure 4 donne de même

$$\begin{aligned}&(CD, AB)\\ &\quad = (CD, N_1D) + (N_1P_1, Q_1M_1) + (Q_1B, AB) + (N_1 - Q_1);\end{aligned}$$

d'après la similitude inverse des quadrilatères (A), (A_1), et celle des triangles mentionnés plus haut, les seconds membres des deux égalités ont même valeur absolue et des signes contraires; l'angle (AB, CD) a donc la même valeur dans les deux figures.

Il reste à montrer que la longueur AB, par exemple, est aussi la même dans les deux figures. On a (*fig.* 3)

$$\overline{MP}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{MNP},$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{a^2\sin^2 M}{\sin^2 A} + \frac{b^2\sin^2 P}{\sin^2 B} - \frac{2ab\sin M\sin P}{\sin A\sin B}\cos\widehat{MNP};$$

et, en éliminant $\cos\widehat{MNP}$,

$$\begin{aligned}&\overline{AB}^2\sin A\sin B - \overline{MP}^2\sin M\sin P\\ &\quad = \frac{a^2\sin M}{\sin A}(\sin M\sin B - \sin P\sin A)\\ &\qquad + \frac{b^2\sin P}{\sin B}(\sin P\sin A - \sin M\sin B);\end{aligned}$$

la première parenthèse devient

$$\begin{aligned}&\sin M(\sin P\cos N + \sin N\cos P),\\ &-\sin P(\sin M\cos N + \sin N\cos M)\end{aligned}$$

ou

$$\sin N\sin(M - P);$$

la relation entre AB et MP devient, par l'introduction des aires $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\mathrm{AB}}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} - \overline{\mathrm{MP}}^2 \sin \mathrm{M} \sin \mathrm{P} \\ &\quad = 2(\overline{\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{B}}) \sin(\mathrm{M} - \mathrm{P}). \end{aligned}\right.$$

On a de même (*fig.* 3)

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\mathrm{CD}}^2 \sin \mathrm{C} \sin \mathrm{D} - \overline{\mathrm{MP}}^2 \sin \mathrm{M} \sin \mathrm{P} \\ &\quad = 2(\overline{\mathrm{D}} - \overline{\mathrm{C}}) \sin(\mathrm{M} - \mathrm{P}); \end{aligned}\right.$$

par analogie, on a dans la figure 4,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\mathrm{AB}}^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} - k^2\, \overline{\mathrm{MP}}^2 \sin \mathrm{M}_1 \sin \mathrm{P}_1 \\ &\quad = -2(\overline{\mathrm{D}} - \overline{\mathrm{C}}) \sin(\mathrm{M}_1 - \mathrm{P}_1); \end{aligned}\right.$$

comme on a

$$\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{D}},$$

les seconds membres des relations (13) et (15) sont égaux; on a, d'autre part,

$$k^2 \sin \mathrm{M}_1 \sin \mathrm{P}_1 = \sin \mathrm{M} \sin \mathrm{P};$$

la longueur AB est donc la même dans les deux figures.

M. Kempe, qui ne donne pas la formule (6) pour k^2, s'appuie directement sur les relations d'aires qui déterminent la valeur de k. La relation fournie par l'élimination de $\cos \widehat{\mathrm{MNP}}$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{MP}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2 \frac{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{M} \sin \mathrm{P}} \\ &\quad = \left(\frac{a^2 \sin \mathrm{M}}{\sin \mathrm{A}} - \frac{b^2 \sin \mathrm{P}}{\sin \mathrm{B}}\right) \times \left(\frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{M}} - \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{P}}\right), \end{aligned}$$

ou, en multipliant la première parenthèse du second membre par $\sin \mathrm{N}$ et en divisant la seconde par $\sin \mathrm{N}$,

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2 \frac{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{M} \sin \mathrm{P}} = (\overline{\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{B}}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{\mathrm{A}}} - \frac{b^2}{\overline{\mathrm{B}}}\right);$$

à cause de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}}\right) = \frac{\sin P \sin A - \sin M \sin B}{\sin M \sin N \sin P} = \frac{-\sin(M-P)}{\sin M \sin P} = \frac{-\sin(A-B)}{\sin M \sin P},$$

on peut donc écrire

$$(13')\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{MP}^2 + \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{2\sin(A-B)}\left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}}\right) \\ &\quad = (\overline{A} - \overline{B}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}}\right). \end{aligned}\right.$$

On a de même (*fig.* 3)

$$(14')\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{MP}^2 + \overline{CD}^2 \frac{\sin C \sin D}{2\sin(C-D)}\left(\frac{c^2}{\overline{C}} - \frac{d^2}{\overline{D}}\right) \\ &\quad = (\overline{C} - \overline{D}) \times \left(\frac{c^2}{\overline{C}} - \frac{d^2}{\overline{D}}\right); \end{aligned}\right.$$

par analogie, la figure 4 donne, *après suppression du facteur commun* k^2,

$$(15')\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{MP}^2 + \overline{AB}^2 \frac{\sin A \sin B}{2\sin(A-B)}\left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}}\right) \\ &\quad = (\overline{A} - \overline{B}) \times \left(\frac{a^2}{\overline{A}} - \frac{b^2}{\overline{B}}\right); \end{aligned}\right.$$

la comparaison des formules (13′) et (15′) donne le résultat cherché.

Le calcul de l'auteur, un peu différent de celui qu'on vient de lire, donne lieu à cette remarque. M. Kempe a signalé le premier, dans un Mémoire reproduit par la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. III, p. 133), le fait suivant :

Pendant la déformation d'un quadrilatère articulé MNPQ, les cosinus de deux angles opposés sont liés par une relation linéaire; pour les angles N et Q par exemple, cela résulte des deux expressions de la diagonale MP fournies par les triangles MNP et MQP. Dans la figure 3, cette relation se transforme en une relation linéraire entre les quantités $\overline{AB}^2$ et $\overline{CD}^2$; la comparaison des formules (13) et (14) donne ainsi, en tenant compte de l'hypothèse $\overline{A}+\overline{C}=\overline{B}+\overline{D}$,

$$\overline{CD}^2 \sin C \sin D = \overline{AB}^2 \sin A \sin B;$$

on peut écrire, avec les notations de la figure 2,

$$\left(\frac{A_1 A'_1}{AA'}\right)^2 = \frac{\sin A \sin A'}{\sin A_1 \sin A'_1},$$

et cette formule, qui fait connaître le rapport de similitude des quadrilatères (C_1) et (C), se déduit de la formule (6′) par permutation circulaire.

9. Les 12 angles variables des 3 quadrilatères (A), (B), (C) ou (A_1), (B_1), (C_1) sont égaux deux à deux (*fig.* 2). Au point A par exemple, l'angle intérieur du quadrilatère (B) et l'angle extérieur du quadrilatère (C) sont égaux. Ces angles sont :

Quadrilatère	(A)......	angles	ν, μ, ν', μ'
»	(B)......	»	λ, ν, λ', ν'
»	(C)......	»	μ, λ, μ', λ'

λ et λ' sont intérieurs pour (B), extérieurs pour (C); μ et μ' sont intérieurs pour (C) et (A); ν et ν' sont extérieurs pour (A) et (B); on a ainsi

$$(16) \qquad \lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \nu + \nu'.$$

(*A suivre.*)

[P6c]

DES INVOLUTIONS I_2^3 ET I_{n-1}^n DONNÉES PAR LEURS POINTS MULTIPLES : RELATIONS ET CONSTRUCTIONS;

PAR M. HENRI BOUVIER,
Professeur à l'Institution Robin, Vienne (Isère).

Lorsque les points d'un support sont rangés par groupes de n points, de telle façon que k points du support pris arbitrairement se trouvent réunis dans un groupe et dans un seul, on dit que l'ensemble k fois infini de ces n points forme une involution d'*ordre* ou de *degré* n et de *dimension, espèce* ou *rang* k (¹). La loi de formation doit donc être telle que k points (dont plusieurs peuvent être confondus) pris dans un groupe déterminent sans ambiguïté les $n-k$ autres points du groupe, et c'est en cela que consiste le caractère involutif proprement dit. Pour abréger, on représente l'involution d'ordre n et de rang k par I_k^n.

L'importance particulière de l'involution I_{n-1}^n résulte de ce que les involutions I_k^n peuvent être considérées comme formées de groupes communs à $n-k$ involutions I_{n-1}^n.

Nous nous proposons ici d'étudier d'abord l'involution I_2^3 sur support rectiligne au moyen de deux relations

(¹) Nous trouvons ces différentes dénominations dans les travaux très nombreux faits surtout en Allemagne sur les involutions. Plusieurs n'emploient même jamais le mot *involutions;* ils les désignent sous les noms de *systèmes polaires du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* (Wiener), de *correspondance symétrique trilinéaire* ou *réseau de ternes* (B. Klein), de *système conjugués de formes linéaires* (Schlesinger).

analogues à celles qui définissent l'involution quadratique I_1^2.

Nous déterminerons dans une première étude certaines propriétés ou constructions qui résultent de la première de ces relations, puis dans une autre étude celles qui découlent de la seconde. Il nous sera dès maintenant possible d'étendre certaines de ces propriétés ou constructions aux involutions I_{n-1}^n générales ou particulières.

I. — De la relation cubique involutive.

De même que l'involution quadratique I_1^2 se définit par le rapport harmonique qu'on peut mettre sous la forme

$$X_1A_1.X_2A_2 + X_2A_1.X_1A_2 = 0,$$

où X_1, X_2 représentent un groupe quelconque de l'involution quadratique ayant A_1 et A_2 pour points *doubles*, de même l'involution I_2^3 sera définie par la relation suivante, où X_1, X_2, X_3 représentent les points d'un terne et A_1, A_2, A_3 les points *triples* de l'involution :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & X_1A_1.X_2A_2.X_3A_3 + X_2A_1.X_3A_2.X_1A_3 \\ & \qquad + X_3A_1.X_1A_2.X_2A_3 = 0, \end{aligned} \right.$$

relation dont le caractère involutif est évident.

On tirerait de cette relation [1], que nous désignerons sous le nom de *relation cubique involutive*, les propriétés suivantes, du reste bien connues, mais qu'il sera utile de rappeler au début de cette étude.

a. Les points triples A_1, A_2, A_3 forment eux-mêmes un groupe de l'involution I_2^3.

---

[1] Cette relation a été simplement signalée dans la thèse d'Appel : *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'École Normale*, 1876).
Nous ne l'avons vu signaler nulle part ailleurs

b. Deux points d'un terne déterminent nécessairement le troisième appelé *polaire mixte* de ces points; il existe pourtant deux points, appelés *points neutres* et que nous désignerons par M_1 et M_2, qui n'admettent pas de polaire mixte déterminé.

c. Lorsque deux points neutres sont réels, deux points triples sont imaginaires conjugués; lorsqu'ils sont imaginaires conjugués, les points triples sont tous réels. La réciproque est vraie.

d. A chaque point correspondent les groupes d'une involution quadratique I_1^2; les points doubles de ces involutions I_1^2 seront eux-mêmes les couples d'une involution I_1^2 ayant les points neutres M_1 et M_2 pour points doubles.

e. Deux points dans un groupe peuvent se confondre; nous leur donnerons alors un double indice. On aura donc (X_{22} et X_{33} étant les points doubles de l'involution quadratique correspondant à X_1) les groupes

$$X_{22},\quad X_{22},\quad X_1 \qquad \text{et} \qquad X_{33},\quad X_{33},\quad X_1.$$

L'usage est alors d'appeler *premières polaires* de X_1 les points X_{22} et X_{33} et *seconde polaire* de X_{22} ou X_{33} le point X_1. Ce sont bien, en effet, les points qu'on désigne sous ce nom, lorsqu'on traite d'une forme cubique (définissant ici les points A_1, A_2, A_3) et de ses polaires.

II. — Expression paramétrique des points d'un groupe d'une involution I_2^3.

De la relation involutive (1) nous tirons une expression paramétrique des points d'un terne de l'involution I_2^3, expression analogue à la suivante qu'on établit pour les points de coordonnées x_1 et x_2, formant les groupes d'une involution I_1^2 de points doubles A_1 et A_2 :

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda + \mu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda a_1 - \mu a_2}{\lambda - \mu}.$$

Cherchons donc à représenter les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'un terne X_1, X_2, X_3 d'une involution I_2^3, dont les points triples A_1, A_2, A_3 ont pour coordonnées a_1, a_2, a_3. Soient λ, μ, ν ; λ', μ', ν' ; λ'', μ'', ν'' des paramètres. On aura des expressions de la forme

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3}{\lambda + \mu + \nu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda' a_1 + \mu' a_2 + \nu' a_3}{\lambda' + \mu' + \nu'},$$

$$x_3 = \frac{\lambda'' a_1 + \mu'' a_2 + \nu'' a_3}{\lambda'' + \mu'' + \nu''}.$$

Pour que ces valeurs de x_1, x_2, x_3 satisfassent à la relation involutive (1) mise sous la forme

$$(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) + (x_1 - a_2)(x_2 - a_3)(x_3 - a_1) + (x_1 - a_3)(x_2 - a_1)(x_3 - a_2) = 0,$$

un calcul simple montre qu'on doit avoir :

$$\frac{\nu}{\lambda} + \frac{\nu'}{\lambda'} + \frac{\nu''}{\lambda''} = 0, \qquad \frac{\nu}{\mu} + \frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu''}{\mu''} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda'}{\mu'} + \frac{\lambda''}{\mu''} = 0, \qquad \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda'}{\nu'} + \frac{\lambda''}{\nu''} = 0,$$

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} = 0, \qquad \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu'}{\lambda'} + \frac{\mu''}{\lambda''} = 0,$$

relations qui seront vérifiées par

$$\lambda = \lambda' = \lambda'',$$

$$\mu' = \mu\varepsilon, \qquad \mu'' = \mu\varepsilon^2,$$

$$\nu' = \nu\varepsilon^2, \qquad \nu'' = \nu\varepsilon,$$

où 1, ε et ε^2 sont les racines cubiques de l'unité positive.

On aura donc les relations cherchées

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3}{\lambda + \mu + \nu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda a_1 + \mu\varepsilon a_2 + \nu\varepsilon^2 a_3}{\lambda + \mu\varepsilon + \nu\varepsilon^2},$$

$$x_3 = \frac{\lambda a_1 + \mu\varepsilon^2 a_2 + \nu\varepsilon a_3}{\lambda + \mu\varepsilon^2 + \nu\varepsilon}.$$

Réciproquement, partant de ces relations sous la forme

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1 - a_1) + \mu(x_1 - a_2) + \nu(x_1 - a_3) &= 0,\\
\lambda(x_2 - a_1) + \mu\varepsilon(x_2 - a_2) + \nu\varepsilon^2(x_2 - a_3) &= 0,\\
\lambda(x_3 - a_1) + \mu\varepsilon^2(x_3 - a_2) + \nu\varepsilon(x_3 - a_3) &= 0,
\end{aligned}$$

on a, en éliminant λ, μ, ν,

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_1 - a_2 & x_1 - a_3 \\ x_2 - a_1 & \varepsilon(x_2 - a_2) & \varepsilon^2(x_2 - a_3) \\ x_3 - a_1 & \varepsilon^2(x_3 - a_2) & \varepsilon(x_3 - a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on développe ce déterminant et que l'on tienne compte de la signification de ε, on retrouve la relation involutive donnée plus haut.

Remarque. — L'involution I_2^3 étant déterminée par trois ternes de points ayant pour coordonnées x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 peut être représentée sous la forme connue

$$\lambda(X - y_1)(X - y_2)(X - y_3) + \mu(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) + \nu(X - u_1)(X - u_2)(X - u_3) = 0.$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les coordonnées des points d'un terne; en substituant à X ces trois valeurs et en prenant comme ternes les points triples de coordonnées a_1, a_2, a_3, nous aurons, par l'élimination de λ, μ et ν, la relation

$$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^3 & (x_1-a_2)^3 & (x_1-a_3)^3 \\ (x_2-a_1)^3 & (x_2-a_2)^3 & (x_2-a_3)^3 \\ (x_3-a_1)^3 & (x_3-a_2)^3 & (x_3-a_3)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

En rapprochant ce déterminant du précédent, nous voyons que la théorie de l'involution I_2^3 nous permet de conclure que le premier déterminant est facteur du dernier, ce qui aurait sans doute exigé de longs et pénibles calculs pour être démontré directement.

III. — Construction des groupes d'une involution I_2^3 donnée par ses points triples.

Remarques préliminaires.

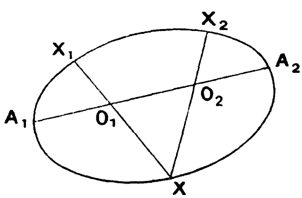
a. On sait que toute involution ou homographie située sur un support rectiligne peut être amenée à avoir pour support une conique, en projetant d'un point de la conique les éléments qui déterminent l'involution ou l'homographie, ce qui sera particulièrement avantageux pour les involutions et homographies quadratiques, dont on aura à faire usage.

b. Nous supposons connus, pour les involutions quadratiques, les moyens de construire, soit les couples d'une involution donnée par deux points doubles ou deux couples, soit le couple commun à deux involutions.

c. Nous signalerons pourtant, comme moyens auxiliaires, les solutions de certains problèmes concernant les homographies quadratiques.

Soit donc une homographie quadratique donnée sur une conique ou un cercle par ses deux points doubles A_1

et A_2 et par un couple X_1, X_2. On peut toujours supposer qu'on connaît les points doubles, car, par un procédé connu, on les trouverait facilement dans le cas où l'homographie serait donnée par trois quelconques de ses groupes. Joignons par une droite les deux points doubles. Par X_1 faisons passer une droite quelconque X_1X qui rencontre A_1A_2 en O_1 ; nous obtiendrons sur A_1A_2 un nouveau point O_2 en joignant X à X_2. Les deux involutions de centre O_1 et O_2 ont pour *résultante* ([1]) l'homographie donnée, si l'on entend par résultante l'homographie évidente obtenue en faisant correspondre à tout point d'une involution de



centre O_1 le correspondant de son conjugué harmonique dans une autre involution O_2.

Une homographie quadratique est donc d'une infinité de façons la résultante de deux involutions. Sans insister sur ce point de vue, remarquons que la construction des deux points qui correspondent à un même point dans une homographie où les supports sont confondus devient extrêmement facile.

Ce procédé nous conduit aussi à la solution de cet autre problème : chercher les couples communs à deux homographies. En les considérant chacune comme résul-

---

([1]) Deruyts, dans un *Mémoire sur la théorie de l'involution* (*Mémoires de la Société Royale de Liège,* 2[e] série, t. XVII), a traité cette question de la résultante de deux involutions, mais au point de vue algébrique.

tante de deux involutions, on voit que le problème peut se ramener à déterminer le quadrilatère inscrit dans un cercle et qui passe par quatre points fixes. C'est le problème de Castillon étendu aux quadrilatères; on peut le résoudre par la méthode des inversions. Le problème admet deux solutions.

Dans le cas où l'une des homographies serait une involution, le problème reviendrait à chercher un triangle inscrit, passant par trois points donnés, et c'est le problème proprement dit de Castillon qu'on peut résoudre directement ou par la méthode des inversions ([1]).

d. Si les trois points triples sont réels, les constructions que nous allons donner s'effectueront directement. S'ils sont imaginaires conjugués, on peut supposer que ces deux points sont donnés par deux couples de points réels d'une involution qui aurait pour points doubles ces points imaginaires; les constructions sont ainsi rendues toujours possibles.

Construction de la seconde polaire d'un point.

Soit X_{11} le point dont nous cherchons la seconde polaire X_2. Désignons par ξ_1 le conjugué harmonique de X_{11} par rapport au couple de points triples A_2 et A_3.

Théorème I. — *La seconde polaire* X_2 *d'un point* X_{11} *est le correspondant* X_2 *de* X_{11} *dans une homographie de points doubles* ξ_1 *et* A_1 *définie par le rapport anharmonique*

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_2\xi_1}\,\frac{X_2 A_1}{X_{11} A_1} = -2.$$

([1]) Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, Vol. I, p. 294.

En effet, la seconde polaire X_2 de X_{11} est définie par la relation

$$\frac{1}{X_{11}A_1} + \frac{1}{X_{11}A_2} + \frac{1}{X_{11}A_3} = \frac{3}{X_{11}X_2}.$$

Soit ξ_1 la première polaire (conjugué harmonique) de X_{11} par rapport à A_2 et A_3, on a

$$\frac{1}{X_{11}A_2} + \frac{1}{X_{11}A_3} = \frac{2}{X_{11}\xi_1},$$

et la première relation devient

$$\frac{1}{X_{11}A_1} + \frac{2}{X_{11}\xi_1} = \frac{3}{X_{11}X_2}.$$

Remplaçant $X_{11}X_2$ par $\xi_1 X_2 - \xi_1 X_{11}$, on aboutit au rapport anharmonique donné.

Remarque. — Dans la construction, au lieu d'employer un rapport harmonique et un rapport anharmonique, on peut se servir des trois rapports harmoniques suivants, qui définissent deux points auxiliaires ξ_1 et ξ'_1 :

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_3}\,\frac{\xi_1 A_3}{\xi_1 A_2} = -1,$$

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi'_1 A_1}{\xi'_1 \xi_1} = -1,$$

$$\frac{A_1\xi'_1}{A_1\xi_1}\,\frac{X_2\xi_1}{X_2\xi'_1} = -1.$$

En effet, le dernier rapport harmonique devient, par transposition de lettres,

$$\frac{\xi_1\xi'_1}{\xi_1 X_2}\,\frac{A_1 X_2}{A_1\xi'_1} = 2.$$

En le multipliant par le second on retrouve le rapport anharmonique indiqué dans le théorème précédent.

Comme le conjugué harmonique d'un point peut se construire au moyen de la règle seule, la construction de la seconde polaire d'un point relativement à trois autres se fera, elle aussi, *avec la règle seule.*

Propriétés des points auxiliaires ξ employés dans la construction.

Nous désignerons par ξ_2 et ξ_3 les points obtenus de la même façon que ξ_1 et nous les appellerons *points auxiliaires* de X_{11}.

L'élimination de X_{11} entre les deux rapports signalés dans le théorème précédent donne la relation

$$\frac{1}{\xi_1 A_2} + \frac{1}{\xi_1 A_3} + \frac{1}{\xi_1 X_2} = \frac{3}{\xi_1 A_1}.$$

D'où :

THÉORÈME II. — *Le point ξ_1, auxiliaire de X_{11}, a pour seconde polaire le point triple A_1 dans une involution I_2^3 qui aurait pour points triples les deux autres points triples A_2, A_3 de la première involution et la seconde polaire X_2 de X_{11} dans cette même involution.*

COROLLAIRE. — *Le point α_1, conjugué harmonique de A_1 relativement à A_2 et A_3, a pour seconde polaire le point A_1.*

Ce résultat pouvait être obtenu directement, car les ternes $A_1 A_1 A_1$ et $A_1 A_2 A_3$ font partie de l'involution cubique; donc à A_1 sont associés tous les couples de l'involution quadratique, qui a pour point double A_1 et pour couple A_2, A_3; et cette involution aura pour deuxième point double le point α_1 conjugué harmonique du premier point double A_1, relativement à A_2 et A_3.

THÉORÈME III. — *La seconde polaire d'un point X_{11} dans une involution I_2^3 est la polaire mixte des points* *triples* A_2 *et* A_3 *dans une involution particulière qui aurait deux points triples confondus au point auxiliaire* ξ_1 *et pour autre point triple le troisième point triple* A_1 *de la première involution.*

Or, on sait que, dans le cas de ces involutions particulières, les constructions se simplifient beaucoup.

Théorème IV. — *Si deux points sont conjugués harmoniques par rapport à deux points triples, les secondes polaires de ces deux points divisent toujours la distance de ces deux mêmes points dans un rapport anharmonique égal à* 9.

Signalons enfin les relations suivantes :

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2}\,\frac{\xi_2 X_2}{\xi_2 A_2} = 1,$$

$$\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2}\,\frac{\xi_2 X_2}{\xi_2 A_2}\,\frac{\xi_3 A_2}{\xi_3 A_1} = -1,$$

relations qui permettraient de trouver la seconde polaire X_2 au moyen de procédés tirés de la géométrie du triangle.

Construction des premières polaires d'un point X_2.

Première méthode. — Du théorème sur la seconde polaire, on tire les relations

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_3}\,\frac{\xi_1 A_3}{\xi_1 A_2} = -1$$

et

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_2\xi_1}\,\frac{X_2 A_1}{X_{11}A_1} = -2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{X_{11}X_2}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2} = 3.$$

Le couple ξ_1, X_{11} sera donc le couple commun à l'involution quadratique et à l'homographie définie par le deuxième rapport anharmonique mis sous sa seconde forme. Nous avons indiqué dans les remarques préliminaires que le problème, dans le cas où le support était une conique (et par projection il est toujours possible d'avoir un tel support), admettait deux solutions.

Seconde méthode. — Le procédé suivant nous semble plus pratique.

Soit α_1 le conjugué harmonique de A_1 par rapport aux deux points A_2 et A_3. Comme nous l'avons indiqué dans un corollaire du théorème, A_1 et α_1 sont les premières polaires du point A_1, c'est-à-dire les points doubles de l'involution quadratique correspondant à A_1. Si donc X'_2 désigne le conjugué harmonique de X_2, relativement aux points A_1, α_1, le terne $X_2 A_1 X'_2$ appartient à l'involution cubique; il en serait de même des ternes analogues $X_2 A_2 X''_2$, $X_2 A_3 X'''_2$. Les couples $A_1 X'_2$ et $A_2 X''_2$, par exemple, définissent une involution quadratique dont les points doubles sont les premières polaires de X_2.

Dans le cas où A_2 et A_3 sont imaginaires conjugués, il faut remarquer que α_1 et X'_2 se construisent aisément et que le couple $X_2 X'$ (X' étant la seconde polaire de X_2) appartient à l'involution $A_1 X'_2$ et $A_2 X''_2$. Or, X' se construit toujours. L'involution quadratique se trouvera donc définie par les couples $A_1 X'_2$ et $X_2 X'$.

Construction de la polaire mixte d'un point et du point à l'infini.

Désignons par X_0 la polaire mixte du point X_1 et du point à l'infini; la relation involutive devient

$$X_1 A_1 . X_0 A_2 + X_1 A_2 . X_0 A_3 + X_1 A_3 . X_0 A_1 = 0.$$

Théorème V. — *La polaire mixte* X_0 *de* X_1 *et du* *point à l'infini s'obtient au moyen de simples rapports, en cherchant :*

1° *Un point auxiliaire* E *qui divise intérieurement (ou extérieurement)* A_2A_3 *dans le même rapport que* X_1 *divise extérieurement (ou intérieurement)* A_2A_1 ;

2° *Le point* X_0 *qui divise extérieurement (ou intérieurement)* A_1E *dans le même rapport que* X_1 *divise intérieurement (ou extérieurement)* FA_3, F *étant à une distance de* X_1 *égale à* $X_1A_1 + X_1A_2$.

D'après cet énoncé, on trouvera le point X_0 en éliminant E entre les relations

$$\frac{EA_2}{EA_3} = -\frac{X_1A_2}{X_1A_1}, \qquad \frac{X_0A_1}{X_0E} = -\frac{X_1F}{X_1A_3} = -\frac{X_1A_1 + X_1A_2}{X_1A_3}.$$

On en tire, en effet,

$$X_0E(X_1A_1 + X_1A_2) = X_0A_2.X_1A_1 + X_0A_3.X_1A_2,$$
$$X_0E(X_1A_1 + X_1A_2) = -X_0A_1.X_1A_3.$$

Divisant membre à membre, on tombe immédiatement sur la relation donnée plus haut.

La construction déduite de ce théorème est purement linéaire.

Remarques :

1° La seconde polaire du point à l'infini serait donnée par ces simples rapports :

$$\frac{EA_2}{EA_3} = -1, \qquad \frac{X_0A_1}{X_0E} = -2;$$

le point E serait le milieu de A_2A_3.

2° En s'appuyant sur la relation donnée plus haut, on peut dire que la distance d'un point triple A_1 à la polaire mixte de ce même point et du point à l'infini est moyenne proportionnelle entre les distances à cette même polaire mixte des deux autres points triples.

Construction de la polaire mixte de deux points.

Soient X_1 et X_2 les deux points dont on cherche la polaire mixte X_3.

Première méthode. — Elle consiste à chercher les deux premières polaires de X_1 par exemple, puis le conjugué de X_2 dans l'involution quadratique qui aurait pour points doubles les deux premières polaires déjà obtenues.

Deuxième méthode. — Elle suppose qu'on a cherché par les méthodes indiquées la polaire mixte X_{02} de X_2 et du point à l'infini, et la seconde polaire X'_1 du point X_1. On arrive alors facilement au moyen de la relation symétrique trilinéaire qui, elle aussi, définit une involution I_3^2 à ce théorème :

Théorème VI. — *La polaire mixte* X_3 *de* X_1 *et* X_2 *divise la distance* $X_1 X_{02}$ *dans le même rapport que la seconde polaire* X'_1 *de* X_1 *divise la distance* $X_2 X_{02}$, *ce qui est exprimé par la relation*

$$\frac{X_3 X_1}{X_3 X_{02}} = \frac{X'_1 X_2}{X'_1 X_{02}}.$$

On est ainsi conduit à une construction linéaire.

Autres procédés de construction.

Par projection, on peut transformer toute involution sur support rectiligne en une involution du même ordre et du même rang située sur une courbe unicursale et en particulier sur une conique.

Sur ce dernier support, d'ingénieuses constructions ont été données par B. Klein ([1]), Schlesinger ([2]), Le Paige et Deruyts ([3]) et nous pourrons revenir utilement sur ce sujet.

Nous terminerons cette étude des constructions par une remarque qui donne lieu à un nouveau procédé assez simple.

Si la base d'une involution I_2^3 à points triples réels est un cercle et que ces points triples a_1, a_2, a_3 soient les sommets d'un triangle équilatéral, les points x_1, x_2, x_3 formeront les ternes d'une involution I_2^3 si, dans un même sens, on a la relation

$$\text{arc}\, a_1 x_1 + \text{arc}\, a_2 x_2 + \text{arc}\, a_3 x_3 = 2k\pi,$$

ce qui avec le compas donne des constructions faciles. Or il est également facile de transformer une involution I_2^3 sur support rectiligne et de points triples réels A_1, A_2, A_3 en une involution I_2^3 sur support circulaire ayant pour points triples les sommets d'un triangle équilatéral inscrit.

Remarquons aussi qu'il existe une parabole inscrite aux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $x_1 x_2 x_3$.

IV. — Construction de la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire dans une involution I_{n-1}^n.

Théorème VII. — *Si ξ_α désigne la $(\alpha - 1)^{ième}$ polaire d'un point X dans une involution $I_{\alpha-1}^\alpha$ et $\xi_{n-\alpha}$, la $(n-\alpha-1)^{ième}$ polaire de ce même point X dans*

([1]) *Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde.* Marburg, 1881.

([2]) *Ueber conjugirte binäre Formen.* Breslau, 1882. Dans ce Mémoire Schlesinger traite également des formes de degré supérieur.

([3]) *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, 2e série; t. XVII, 1882).

une autre involution $I^{n-\alpha}_{n-\alpha-1}$, la $(n-1)^{ième}$ polaire X' de X dans une involution I^{n}_{n-1}, ayant pour points multiples les n points multiples des deux premières, sera donnée par le rapport anharmonique

$$\frac{X\xi_\alpha}{X\xi_{n-\alpha}}\frac{X'\xi_{n-\alpha}}{X'\xi_\alpha}=\frac{\alpha-n}{\alpha}.$$

En effet, de

$$\frac{1}{XA_1}+\ldots+\frac{1}{XA_\alpha}=\frac{\alpha}{X\xi_\alpha},$$
$$\frac{1}{XA_{\alpha+1}}+\ldots+\frac{1}{XA_n}=\frac{n-\alpha}{X\xi_{n-\alpha}},$$

on tire par addition :

$$\frac{1}{XA_1}+\ldots+\frac{1}{XA_\alpha}+\frac{1}{XA_{\alpha+1}}+\ldots+\frac{1}{XA_n}=\frac{\alpha}{X\xi_\alpha}+\frac{n-\alpha}{X\xi_{n-\alpha}}$$

ou

$$\frac{n}{XX'}=\frac{\alpha}{X\xi_\alpha}+\frac{n-\alpha}{X\xi_{n-\alpha}},$$

et de cette expression on tire en remplaçant XX' par $X\xi_\alpha+\xi_\alpha X'$ le rapport anharmonique énoncé dans le théorème.

Conclusions.

1° Supposons $\alpha=1$, le rapport anharmonique devient si A_1 est l'un des points multiples d'une involution I^{n}_{n-1}

$$\frac{X\xi_1}{XA_1}\frac{X'A_1}{X'\xi_1}=-(n-1).$$

Le point ξ_1 pourra se trouver au moyen d'une série de points ξ obtenus de la même façon. La $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire peut donc s'obtenir en partant d'un rapport harmonique par une suite de rapports anharmoniques dont les constantes sont en progression arithmétique, de raison -1. Chaque point multiple paraîtra dans l'un de ces rapports et l'ordre des points multiples ainsi employés est indifférent pour le résultat final.

2° Le rapport anharmonique du théorème précédent devient harmonique pour $\frac{\alpha - n}{\alpha} = -1$ ou $\alpha = \frac{n}{2}$. D'où :

Théorème VIII. — *Dans une involution* I_{n-1}^{n} *de degré pair où* $n = 2n'$, *la* $(n-1)^{ième}$ *polaire* X' *d'un point* X *forme avec ce point* X *un couple dans une involution quadratique dont les points doubles sont respectivement les* $(n'-1)^{ièmes}$ *polaires de* X *relativement aux* n' *points de chacun des deux groupes qui composent d'une façon quelconque la totalité des* n *points multiples de l'involution* I_{n-1}^{n} *donnée.*

Comme les couples d'une involution quadratique sur support rectiligne peuvent se construire avec la règle seule, on constate que les $(n-1)^{ièmes}$ polaires dans une involution I_{n-1}^{n} pourront se construire *avec la règle seule* dans le cas où $n = 2^p$ (p entier et positif).

3° L'emploi d'un rapport anharmonique se ramène, comme nous l'avons vu (théorème I, remarque), à l'emploi de deux rapports harmoniques et d'un point auxiliaire dans le cas où $\frac{\alpha - n}{\alpha} = -2$, ce qui donne $\alpha = \frac{n}{3}$.

On voit par là que *les* $(n-1)^{ièmes}$ *polaires dans une involution* I_{n-1}^{n} *pourront se construire avec la règle seule dans le cas où* $n = 3^q$ (q entier et positif) *et plus généralement encore dans le cas où* $n = 2^p \times 3^q$.

Dans un prochain article nous étudierons les involutions I_2^3 en partant du couple de points neutres et nous généraliserons les résultats pour toute une classe d'involutions I_{n-1}^{n}.

[P1c]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HOMOGRAPHIE;

PAR M. J. RÉVEILLE.

Cette propriété s'énonce ainsi :

Les droites qui joignent les points homologues de deux plans homologues, passant par une arête du tétraèdre double de l'homographie, rencontrent deux droites fixes et forment ainsi une congruence linéaire.

Les coordonnées des points homologues des deux figures homographiques, rapportées au tétraèdre double, sont liées par les relations

$$X' = \lambda X, \qquad Y' = \mu Y, \qquad Z' = \nu Z, \qquad T' = \rho T.$$

Soit un plan $T = KX$ passant par une arête du tétraèdre double; un point de ce plan a pour coordonnées x, y, z, kx; on a alors, pour les coordonnées du point homologue,

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \mu y, \qquad z' = \nu z, \qquad t' = \rho k x,$$

et pour celles d'un point de la droite qui joint ces deux points

$$lx + m\lambda x, \quad ly + m\mu y, \quad lz + m\nu z, \quad lkx + m\rho kx.$$

Au point où cette droite perce le plan $Y = o$, on a

$$l + m\mu = o;$$

ce point est donc

$$X = (-\mu + \lambda)x, \qquad Y = o, \qquad Z = (-\mu + \nu)z,$$
$$T = k(-\mu + \rho)x;$$

d'où

$$\frac{T}{X} = \frac{k(\rho - \mu)}{\lambda - \mu}.$$

Il est sur la droite fixe

$$Y = 0, \qquad (\lambda - \mu)T = k(\rho - \mu)X.$$

On trouverait de même que la droite qui joint deux points homologues perce le plan $Z = 0$ en un point de la droite fixe

$$Z = 0, \qquad (\lambda - \nu)T = k(\rho - \nu)X.$$

Les deux plans

$$(\lambda - \mu)T = k(\rho - \mu)X, \qquad (\lambda - \nu)T = k(\rho - \nu)X$$

forment avec les plans $T = 0$, $X = 0$ un faisceau dont le rapport anharmonique est

$$\frac{\rho - \mu}{\rho - \nu} : \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \nu};$$

c'est le rapport anharmonique des quatre points d'intersection des quatre faces du tétraèdre double avec toute droite qui joint deux points homologues. On pourrait l'appeler le *rapport anharmonique de l'homographie*.

La propriété démontrée par M. Fontené [1] au sujet de deux figures semblables est un cas particulier de celle qui vient d'être exposée.

On énoncerait aisément la propriété corrélative.

---

[1] *Sur un cas remarquable de la projection gauche* (*Nouvelles Annales*, 1896).

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On demande d'étudier le mouvement d'une plaque elliptique infiniment mince homogène et pesante, dont chaque élément superficiel est attiré par un point fixe* A *proportionnellement à la masse et à la distance.*

La masse de la plaque est égale à 1; *les longueurs de ses demi-axes de symétrie sont* 2 *et* 1. *A l'origine du mouvement, le centre de la plaque n'a pas de vitesse, et la plaque tourne, avec la vitesse angulaire* $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, *autour d'une droite passant par le centre, située dans le plan mené par le grand axe perpendiculairement au plan de la plaque, et faisant avec ce grand axe un angle dont la tangente vaut* $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point matériel, de masse égale à l'unité, se meut sous l'influence d'une force centrale issue de* O. *On demande de déterminer la trajectoire et la loi de force, sachant que l'hodographe du mouvement, construit avec le point* O, *est un cercle de centre* O.

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Le sommet d'un cône de révolution, pesant et homogène, glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe. On imprime au cône une rotation autour de son axe qui est laissé sans vitesse dans une position inclinée sur la verticale, et l'on abandonne le cône aux forces qui le sollicitent. Trouver le mouvement du cône, indiquer la forme de la trajectoire du sommet.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point d'une figure plane de forme invariable décrit une droite fixe d'un mouvement uniformément accéléré, tandis que la figure tourne autour de ce point d'un mouvement uniforme.*

1° *Trouver les roulettes;*

2° *Pour une position de la figure, construire le cercle des inflexions et le point d'accélération nulle; trouver le lieu de ce dernier point quand la figure se déplace.*

(Novembre 1902.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical on donne une barre fixe* Ox *inclinée d'un angle* α *sur l'horizontale, et une barre pesante et homogène* AB *mobile autour de son extrémité inférieure* A *qui est fixe.*

Entre les deux barres est placé un disque circulaire pesant et homogène qui a le même poids que la barre AB.

Le diamètre du disque est égal à la distance du point A *à la barre* Ox *de sorte que les deux barres sont parallèles.*

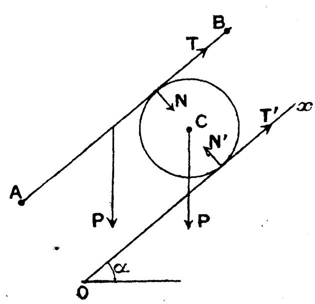
Les corps sont dépolis et le coefficient de frottement f *du disque sur les deux barres est égal à* $\frac{1}{2}\tan g\alpha$.

Au commencement, le disque est immobile et il touche la barre AB *à son extrémité supérieure* B.

Montrer qu'il n'y a pas équilibre, que le disque commence à rouler sans glisser sur la barre Ox, *et qu'il finira par s'arrêter dans une position qu'on demande de déterminer.*

SOLUTION.

Soient R le rayon du disque, $2a$ la longueur AB, et x l'ab-



scisse du centre C; soit M la masse commune du disque et de AB, leur poids P est Mg; soient N, T, N', T' les réactions normales et tangentielles au disque; soit enfin θ l'angle dont tourne le disque.

S'il y avait équilibre, on aurait

$$N x = P a \cos\alpha, \qquad N' = N + P\cos\alpha,$$
$$T + T' = P\sin\alpha, \qquad T = T';$$

on en conclurait

$$N = P\cos\alpha\,\frac{a}{x}, \qquad N' = P\cos\alpha\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$
$$2T = 2T' = P\sin\alpha;$$

mais on doit avoir

$$T < Nf.$$

On aurait donc

$$f > \operatorname{tang}\alpha$$

à cause de la position initiale. Il y a donc mouvement.

Les équations du mouvement du centre de gravité du disque donnent

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = T + T' - Mg\sin\alpha, \qquad 0 = N' - N - P\cos\alpha.$$

Or

$$MK^2 = \frac{1}{2}MR^2,$$

on a donc

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2(T' - T).$$

S'il y a roulement simple sur Ox, on a

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad T' < N'f,$$

et il y aura glissement sur AB, ce qui donne

$$T = Nf = Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x}.$$

On aura donc

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x} - Mg\sin\alpha + T',$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2T' - 2Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x};$$

on en déduit

$$3\frac{d^2x}{dt^2} - 4gf\cos\alpha\,\frac{a}{x} - 2g\sin\alpha = 2g\sin\alpha\left(\frac{a}{x} - 1\right).$$

De là on peut déduire T′ et vérifier facilement que $T' < N'f$.

En posant $\frac{dx}{dt} = u$, on a en intégrant avec la condition $u = 0$ pour $x = 2a$,

$$3u^2 = 4g \sin\alpha\left(a \log\frac{x}{2a} + 2a - x\right).$$

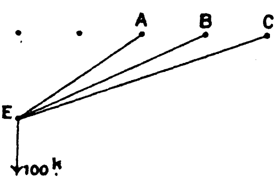
Le disque s'arrête pour

$$a \log\frac{x}{2a} + 2a - x = 0$$

ou environ pour

$$x = \frac{a}{5}.$$

Épreuve pratique. — *Trois barres* AE, BE, CE *de même section et de même métal, et dont on néglige le poids, sont*



articulées ensemble en un point E. *Elles peuvent pivoter autour de trois points fixes* A, B, C *situés sur une même horizontale, et tels que l'on ait*

$$AB = BC = 1^m.$$

Le point E *est à une distance de deux mètres de l'horizontale* ABC; *il est à une distance de* 2^m *de la verticale du point* A.

Sachant qu'une barre qui aurait 1^m *de long s'allongerait de* 1^{mm} *sous l'action d'un poids de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des trois barres données quand on applique en* E *un poids de* 100^{kg}.

Trouver aussi les projections sur l'horizontale et sur la verticale du déplacement du point E.

Solution.

En négligeant les variations des angles que font les barres avec l'horizontale, et en appelant x et y les coordonnées du point E primitivement égales à o et à 2, on trouve pour les tensions

$$T_1 = 303^{kg},727, \qquad T_2 = -53^{kg},340, \qquad T_3 = -190^{kg},422,$$

et pour le déplacement du point E

$$dx = 0^m,0031, \qquad dy = 0^m,0043.$$

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque pesante* ABDEF *formée par un carré homogène de côté a et de densité* 5 *et par un demi-cercle homogène de densité* 2 *ayant pour diamètre* FD *est assujettie à tourner autour de la droite fixe horizontale* AB. *A l'instant initial elle est en repos et verticale; on lui imprime une percussion* CP *appliquée en son centre de masse et normale à la plaque.*

1° *Quelle doit être l'intensité de cette percussion pour que la plaque oscille autour de* AB *avec un angle d'oscillation* α *égal à* $\frac{\pi}{2}$?

2° *Quelle est alors la durée de chaque oscillation?*

3° *Quelle doit être l'intensité de la percussion pour que la plaque tende, sans jamais l'atteindre, vers la position verticale symétrique de celle qu'elle occupe au repos?*

4° *A quel instant passe-t-elle alors par la position horizontale?*

On donnera les résultats à $\frac{1}{100}$ *près.*

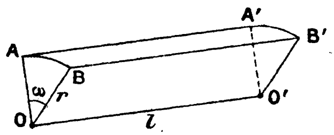
(Juillet 1902.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir en partant du principe des vitesses virtuelles les équations d'équilibre d'un solide libre, soumis à des forces quelconques.*

II. *Une tige rigide* OA, *de longueur l, a l'une de ses extrémités* O *qui est fixe; l'autre,* A, *est attirée vers un point fixe* P, *situé à la distance l de* O, *par une force proportionnelle à la distance* AP. *Mouvement de la tige.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le couteau d'une balance a la forme d'un secteur cylindrique. Déterminer, en le supposant formé d'une matière homogène, son moment d'inertie par rapport à l'arête vive, connaissant la longueur l de cette* *arête, le rayon r du cylindre auquel appartient le secteur, l'angle ω d'ouverture de ce secteur, le poids spéci-*



fique p de la substance du couteau.

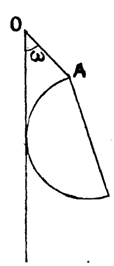
Données numériques des unités C. G. S. :

l	$1^{cm},27$
r	$0^{cm},38$
ω	$8^{\circ}32'$
p	$7,816$

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorème de Coriolis. — Application à la détermination des projections de l'accélération d'un point mobile dans un plan, et rapportée à un système de coordonnées polaires, sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire à ce rayon vecteur.*

II. *Un demi-cercle homogène pesant de rayon* R, *situé dans un plan vertical, est rattaché par un fil inextensible et sans masse de longueur l fixé à l'extrémité* A *du diamètre qui le limite, à un point fixe* O *de ce plan vertical. La demi-circonférence appuie contre une tige verticale parfaitement polie passant par* O. *On demande de former*



l'équation qui donne l'angle ω du fil avec la tige dans la position d'équilibre. Cet angle étant connu, comment calculerait-on la tension du fil et la réaction de la tige?

(Novembre 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1940.

(1902, p. 480.)

Deux triangles T, T′ *circonscrits à une même conique* C, *sont, comme on sait, inscrits à une conique* Γ. *Si* Γ *passe par le point de Brianchon de l'un des triangles, elle passe aussi par celui de l'autre.* (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

En effet, soient abc l'un des triangles T, α, β, γ les points de contact avec C et O le point de Brianchon où se coupent $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$. Les points α, β, γ sont les points de concours des diagonales du quadrangle $abOc$. Si donc Γ passe en O, le triangle $\alpha\beta\gamma$, qui est inscrit à C, est conjugué à Γ.

Il y a alors une infinité de triangles conjugués à l'une quelconque des coniques C, Γ et inscrites (ou circonscrites) à l'autre. Si le triangle T′ ou $a'b'c'$ a pour contacts α', β', γ' la polaire $\alpha'\gamma'$ de b par rapport à C coupe Γ en deux points conjugués à $\alpha'\gamma'$. Donc $\alpha'\beta'\gamma'$ est conjugué à Γ qui passe en O′.

1942.

(1902, p. 480.)

Soient a, b, c, d quatre points d'une conique Γ, *et soient a', b', c', d' les points où cette courbe coupe les cercles bcd, cda, dab, abc. Les droites aa', bb', cc', dd' touchent une conique homothétique et concentrique à* Γ.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

Montrons que aa' et bb', par exemple, touchent une conique homothétique et concentrique à Γ. Il suffit de remarquer que $a'b$ et ab' sont parallèles. Transformons alors la figure de façon que les points à l'infini de Γ soient les points cycliques de la nouvelle figure; Γ devient un cercle C; il devient alors évident qu'il y a un cercle concentrique à C et tangent aux transformées de aa' et bb'.

1943.

(1902, p. 480.)

Si une conique variable a un contact du quatrième ordre avec une courbe fixe quelconque le lieu de son centre est une courbe tangente à la droite qui joint ce centre au point de contact. (X. Stouff.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

Le lieu des pôles d'une droite D par rapport aux coniques qui ont un contact du troisième ordre en un point fixe avec une conique fixe est une droite Δ; car ces coniques forment un faisceau tangentiel. Cette droite passe évidemment par le point fixe Deux coniques infiniment voisines qui ont un contact du quatrième ordre en deux points consécutifs avec une courbe quelconque ont un contact du troisième ordre et leurs centres sont deux points infiniment voisins d'une droite Δ.

QUESTIONS.

1986. D'un point arbitraire T on mène à une parabole donnée les tangentes TA, TB. Sur la normale en A on projette orthogonalement en C le point de contact B. Du point T on élève la perpendiculaire TE à TC, elle coupe en E la normale en A : quel est le lieu du point E lorsque T varie de position. (Mannheim.)

1987. Si les segments aa', bb', cc' sont en involution, ainsi que les segments aa'', bb'', cc'', les points a, b, c auront le même conjugué dans les trois involutions respectivement déterminées par les segments $b'c''$ et $c'b''$, $a'c''$ et $c'a''$, $a'b''$ et $b'a''$. (A. Tissot.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME III, 4^{e} SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

C. — Principes du calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME III, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

33007 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.