NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES LERY

Sur les mouvements pour lesquels il existe plusieurs centres des aires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 97-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__97_1>

[N[1] 1 i]

SUR LES MOUVEMENTS POUR LESQUELS IL EXISTE PLUSIEURS CENTRES DES AIRES;

PAR M. GEORGES LERY (1).

On dit qu'un point M *décrit une courbe* C *suivant la loi des aires, le centre des aires étant un point* S, *lorsque la portion de droite* SM *décrit des aires qui varient proportionnellement au temps sur la surface du cône qui a pour sommet le point* S *et pour directrice la courbe* C.

On demande d'étudier les mouvements pour lesquels il existe deux ou trois centres des aires.

1. Je commence par étudier le cas d'un seul centre des aires. Pour que le point M décrive la courbe C suivant la loi des aires par rapport au centre S, il faut et

(1) Mémoire ayant obtenu le prix au concours de 1901 des *Nouvelles Annales.*

il suffit qu'on ait la relation

$$pv = c,$$

en désignant par v la vitesse du point M, par p la distance de S à la tangente en M à la trajectoire, et par c une constante. Si l'on se donne la trajectoire C, le point S et le nombre c, cette relation définit la vitesse en chaque point de la trajectoire, et l'on obtient l'arc M_0M en fonction du temps par l'inversion d'une intégrale

$$\int_{s_0}^{s} p(s)\,ds = c(t - t_0).$$

Si la courbe C est dans un plan contenant le point S, on sait que l'accélération du point M dans son mouvement est constamment dirigée vers S. Lorsque la courbe C est gauche, ou que son plan ne contient pas le centre S, on a une propriété analogue :

Le vecteur accélération au point M *se trouve dans le plan normal, le long de* SM, *au cône qui projette* C *du point* S.

Soient, en effet, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les coordonnées du mobile par rapport à un trièdre trirectangle de sommet S. La loi des aires fournit l'équation

$$(yz' - zy')^2 + \ldots = c^2,$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$(yz' - zy')(yz'' - zy'') + \ldots = 0.$$

Les deux plans menés respectivement par la vitesse et l'accélération, et par S sont donc rectangulaires. On démontre aussi simplement ce théorème par la Géométrie infinitésimale.

CAS DE DEUX CENTRES DES AIRES.

2. Pour que le mobile M décrive la courbe C suivant la loi des aires relativement à deux centres S et S_1, il faut et il suffit que l'on ait les deux relations

$$pv = c,$$
$$p_1 v = c_1,$$

v désignant la vitesse du mobile, p et p_1 les distances respectives des deux centres à la tangente en M, et c, c_1 deux constantes.

On en déduit la relation nécessaire

$$p : p_1 = c : c_1; \tag{1}$$

ainsi, le rapport des distances des tangentes de la trajectoire aux deux centres des aires doit être constant. Je dis que cette condition est suffisante : soit, en effet, une courbe C qui y satisfasse; comme nous l'avons vu au début, nous pouvons la faire parcourir par un mobile suivant la loi des aires, le centre étant S et la constante c; on aura alors

$$pv = c.$$

Mais l'équation (1) devient

$$p_1 v = c_1;$$

le point mobile obéit donc à la loi des aires pour le centre S_1 et le nombre c_1. D'ailleurs la courbe C répond encore à la question si les deux constantes sont kc et kc_1, mais la loi du mouvement du mobile sur elle est changée.

Ainsi, la question cinématique proposée se ramène à une question géométrique :

Étudier les courbes telles que le rapport des dis-

tances de leurs tangentes à deux points fixes soit constant.

3. Ces tangentes doivent donc appartenir à un complexe dont il est facile d'obtenir une autre définition. Soient A et A_1 les deux points qui partagent SS_1 dans le rapport constant donné; les plans menés par une droite quelconque p du complexe, et les points A, A_1 sont rectangulaires; c'est évident si l'on projette la figure sur un plan perpendiculaire à p. Par suite, les droites p font partie du complexe de Painvin relatif à la surface de seconde classe composée des points A et A_1. Je suppose d'abord ces points à distance finie.

Les courbes de ce complexe sont les seules sur lesquelles on puisse trouver un mouvement tel que la loi des aires soit vérifiée par rapport aux centres S et S_1, les constantes étant proportionnelles à c et c_1. Il est intéressant de remarquer que ces courbes jouissent de la même propriété relativement à d'autres couples de centres, en nombre infini. Prenons, en effet, des points S' et S'_1 divisant harmoniquement le segment AA_1; il existe toujours un rapport $c' : c'_1$ tel que A et A_1 divisent $S'S'_1$ dans ce rapport, de sorte que le complexe est défini par les centres S' et S'_1, et le nombre $c' : c'_1$ est identique à celui que déterminent S et S_1 et $c : c_1$.

Les droites du complexe qui sont parallèles à une direction donnée se trouvent évidemment sur un cylindre de révolution; A et A_1 sont sur deux génératrices diamétralement opposées. Les droites qui passent par un point M ont pour lieu un cône du deuxième degré, dont les plans de sections cycliques sont respectivement perpendiculaires à MA et MA_1. Enfin un calcul de Géométrie élémentaire fournit l'enveloppe des droites du complexe dans un plan ϖ : on vérifie que le produit de leurs distances aux projections de A et A_1 sur ϖ est constant; l'enveloppe est donc une conique ayant pour foyers les projections de A, A_1; les sommets situés sur l'axe focal se trouvent à l'intersection de cet axe et de la sphère de diamètre AA_1.

Ces propriétés très simples, et d'ailleurs bien connues, nous fournissent déjà des solutions du problème : ce sont les courbes planes du complexe, en plus des droites elles-mêmes. Et l'on voit que les seules courbes planes sur lesquelles on peut trouver un mouvement satisfaisant à la loi des aires par rapport à deux centres sont des coniques, ayant leurs foyers et leurs sommets à distance finie.

4. Avant de rechercher toutes les courbes du complexe, on peut étudier le degré de généralité de la question.

Considérons un point M d'une surface F; le cône du complexe en M coupe le plan tangent de la surface suivant deux droites : il y a donc deux courbes du complexe tracées sur la surface et passant par le point M; elles sont tangentes aux deux droites. Toute surface est donc doublement recouverte par une famille de courbes du complexe; il y a exception pour les surfaces qui sont touchées en chacun de leurs points par le cône du complexe correspondant.

Les courbes C du complexe qui passent par un point M de l'espace ont pour tangentes respectives les différentes génératrices du cône du complexe ayant pour sommet le point M. Toutes celles qui ont en M la même tangente ont aussi le même plan osculateur : c'est le plan tangent au cône du complexe le long de la génératrice qui sert de tangente commune. La propriété précédente est exacte pour tous les complexes; on peut la démontrer directement et la compléter pour celui que nous étudions. Je considère en effet le mouvement d'un mobile sur la courbe C, la loi des aires étant vérifiée pour les centres S et S_1 ; le vecteur accélération en un point M de C doit se trouver dans le plan mené par SM perpendiculairement au plan SMT, MT étant la tangente, ainsi que dans le plan mené par S_1M et perpendiculaire à S_1MT. L'accélération est donc sur une droite déterminée d'une façon unique par le point M et la tangente MT ; *toutes les courbes* C *tangentes en un point* M *ont donc les accélérations des mouvements correspondants dirigées suivant une même droite,* et par suite ont même plan osculateur. La droite en question est issue du point M, elle rencontre la normale s menée en S au plan SMT, et la normale s_1 menée en S_1 au plan S_1MT.

Cette construction montre que le plan osculateur en un point quelconque de la droite MT du complexe est le plan tangent, en ce point, à l'hyperboloïde défini par les droites MT, s et s_1.

5. Je considère maintenant les droites du complexe de direction donnée; en les coupant par un plan perpendiculaire à cette direction, on voit que le lieu de leurs traces est un cercle ayant pour diamètre le segment qui est la projection de AA_1 sur le plan. Il est alors évident que toutes les droites réelles du complexe rencontrent la sphère de diamètre AA_1 ou lui sont tangentes; ce dernier cas se présente si la direction de la droite est orthogonale à AA_1. La distance du point S à une droite réelle du complexe est au plus égale à la plus grande des deux distances SA et SA_1, soit SA par exemple :

$$p \leq \mathrm{SA} :$$

p peut être nul, mais alors p_1 l'est aussi, et l'on a la droite SS_1. Comme p a une limite supérieure, la vitesse v a une limite inférieure : elle n'est jamais nulle, et ne devient infinie que si la courbe C considérée touche SS_1.

Bien que les tangentes des courbes C restent à une distance finie de S et S_1, ces courbes peuvent avoir des branches infinies : par exemple, il y a des hyperboles parmi les courbes planes; cela arrive lorsque le plan ne passe pas entre A et A_1, car, d'après la construction des sommets et des foyers que nous avons indiquée, les premiers sont entre les seconds.

Dans tout ce qui précède, on a étudié les courbes C sur lesquelles on peut trouver un mouvement pour lequel existe la loi des aires relativement aux deux centres S et S_1, et à des *constantes proportionnelles à c et c_1* ; les tangentes de ces courbes appartiennent à un complexe quadratique, le complexe de Painvin relatif à la quadrique composée des points A et A_1, qui divisent le segment SS_1 dans le rapport des constantes. Si ce rapport varie, à chacune de ses valeurs correspond un segment AA_1 et un complexe; l'ensemble des courbes de tous ces complexes fournit la solution du problème proposé.

Deux de ces complexes n'ont aucune droite réelle commune, en dehors de SS_1, car il faudrait que l'on eût

$$c_1 p - c p_1 = 0.$$
$$c'_1 p - c' p_1 = 0,$$

p et p_1 n'étant pas nuls. Par suite, si l'on peut trouver sur une courbe C un mouvement qui vérifie la loi des aires pour les centres S et S_1 et les constantes respectives c et c_1, il n'existe sur elle aucun mouvement qui vérifie la même loi pour les mêmes centres, mais avec des constantes qui ne sont pas proportionnelles aux premières.

6. Nous avons obtenu quelques propriétés des courbes C; il reste à trouver ces courbes elles-mêmes. Je considère l'un des complexes, correspondant à une certaine valeur de $c : c_1$; les axes de coordonnées étant choisis, soit

$$\Phi(yz' - zy', \ldots ; x - x', \ldots) = 0$$

l'équation de ce complexe; pour qu'un point mobile dépendant d'un paramètre décrive une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe, il faut que les trois coordonnées satisfassent à l'équation

$$\Phi(y\,dz - z\,dy, \ldots ; dx, \ldots) = 0.$$

On pourra prendre arbitrairement les fonctions y et z du paramètre, et l'équation précédente déterminera x.

Cela revient à chercher les courbes du complexe qui sont sur un cylindre donné. L'équation différentielle en x est du premier ordre, mais elle contient, comme coefficients, des fonctions que l'on peut prendre arbitrairement, et l'on ne peut rien dire de général sur elle. Le problème se ramène cependant à deux quadratures.

Je prends pour axe des z la droite AA_1 et pour origine le milieu de AA_1. L'équation du complexe est, en déterminant chaque droite par les quantités $(y\,dz - z\,dy, \ldots ; dx, \ldots)$,

$$(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 - a^2(dx^2 + dy^2) = 0.$$

On l'obtient en exprimant que les plans menés par les points $A(0, 0, a)$ et $A_1(0, 0, -a)$ et chaque droite du complexe sont rectangulaires. Le complexe étant de révolution autour de l'axe des z, il y a intérêt à prendre des coordonnées polaires dans le plan des xy; il vient

$$r^2 \varphi'^2 (r^2 + z^2 - a^2) + (r z' - z r')^2 - a^2 r'^2 = 0.$$

On voit qu'en divisant par r^4, on a au premier membre une fonction de $\frac{1}{r}$, de $\frac{z}{r}$ et de leurs dérivées; je pose donc

$$\frac{1}{r} = u, \qquad \frac{z}{r} = v;$$

l'équation devient

$$\varphi'^2 (v^2 - a^2 u^2 + 1) + v'^2 - a^2 u'^2 = 0.$$

Si l'on prend $\varphi' = 0$, on a

$$v = \pm au + \text{const.}$$

ou

$$z = br \pm a.$$

Ce sont là les droites passant par A ou A_1, et qui font partie du complexe. On obtient les autres droites du complexe en prenant dans la première équation

$$dx = dy = dz = 0.$$

Je suppose maintenant que φ ne soit pas constant; je le prends comme variable. On peut choisir pour u, par exemple, une fonction arbitraire de φ, et v est donné par une équation du premier ordre

$$v'^2 + v^2 = a^2 u'^2 + a^2 u^2 - 1,$$

ou plutôt, en posant

$$v - au = m, \qquad v + au = n,$$

on a une équation du premier ordre et linéaire, soit en m, soit en n :

$$m'n' + mn + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = e^{-\int \frac{m}{m'} d\varphi} \times \left(k - \int \frac{1}{m'} e^{\int \frac{m}{m'} d\varphi} d\varphi\right).$$

On trouverait facilement un grand nombre de cas particuliers où l'on puisse faire les intégrations; par exemple l'hypothèse $u =$ const. donne

$$v = A \sin(\varphi - \varphi_0).$$

7. Si les constantes des aires sont égales, l'un des points A et A_1 est à l'infini. Les courbes planes du complexe correspondant sont des paraboles. Dans le cas général, la surface singulière du complexe se compose de la sphère de diamètre AA_1 et des deux plans isotropes menés par AA_1 : c'est là en effet le lieu des points où les cônes du complexe sont décomposés. Lorsque $c = c_1$, la surface singulière devient un système de quatre plans; on a donc affaire à un complexe tétraédral; en prenant comme origine le milieu de SS_1, et comme axe des z la droite SS_1, on arrive à l'équation

$$(x\,dx + y\,dy)\,dz - z(dx^2 + dy^2) = 0$$

ou

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx^2 + dy^2}{x\,dx + y\,dy}.$$

Prenons pour y une fonction arbitraire de x; alors

$$\log z = \int \frac{1 + y'^2}{x + yy'}\,dx.$$

CAS DE TROIS CENTRES.

8. Pour qu'une courbe C soit parcourue suivant la loi des aires par rapport à trois centres S, S_1, S_2, les constantes des aires respectives étant c, c_1, c_2, il faut que l'on ait en chaque point M de C :

$$pv = c, \qquad p_1 v = c_1, \qquad p_2 v = c_2;$$

v étant la vitesse, et p, p_1, p_2 les distances des centres à la tangente en M. On en déduit que les distances de toute tangente de C aux trois centres doivent être proportionnelles à c, c_1, c_2; la condition est nécessaire et suffisante pour que sur C on puisse trouver un mouvement répondant à la question.

Les tangentes des courbes C doivent donc faire partie des trois complexes définis par les équations

$$\begin{aligned} c_1 p - c p_1 &= 0, \\ c_2 p - c p_2 &= 0, \\ c_1 p_2 - c_2 p_1 &= 0. \end{aligned}$$

Or, toute droite qui appartient à deux d'entre eux appartient évidemment au troisième, de sorte que les trois complexes définissent une congruence, du quatrième ordre et de la quatrième classe.

Soient A et B, A_1 et B_1, A_2 et B_2 les couples de points qui divisent respectivement les segments S_1S_2, S_2S, SS_1 dans les rapports $c_1 : c_2$, $c_2 : c$, $c : c_1$. Ces six points sont les sommets d'un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est SS_1S_2; de chacune des droites de la congruence, on voit sous un angle droit les segments AB, A_1B_1, A_2B_2, et par suite toutes les coniques inscrites au quadrilatère complet. Tout ceci suppose que SS_1S_2 ne sont pas en ligne droite. Il y a deux droites de la congruence perpendiculaires à un plan; leurs pieds sont les points cycliques du quadrilatère qui a pour sommets les projections des points A et B; les deux autres droites que l'on devrait encore trouver passent par les points circulaires à l'infini du plan.

Il y a quatre droites de la congruence dans un plan; ce sont les tangentes communes aux coniques des trois complexes; ces coniques doivent bien appartenir à un même faisceau tangentiel, puisque les trois complexes ont en commun la congruence définie par deux d'entre eux. Il n'existe pas de courbe plane dont les tangentes fassent partie de la congruence; il faudrait pour cela, en effet, que les trois coniques des complexes coïncidassent pour une certaine position du plan; en particulier leurs foyers réels devraient être confondus, ce qui est impossible, car il n'existe pas de plan sur lequel les six sommets d'un quadrilatère se projettent en deux points.

9. On sait qu'avec les droites d'une congruence on peut former deux séries de développables, dont les arêtes de rebroussement sont les courbes de la congruence; elles sont situées sur les deux nappes de la surface focale. Cherchons les points focaux sur une droite de la congruence; nous avons vu que, en appelant p cette droite, s et s_1 les perpendiculaires en S et S_1 aux plans Sp et S_1p, le plan tangent au cône du complexe (S, S_1) en un point M de p contient la droite, issue de M, qui rencontre s et s_1. Les points focaux sur p seront donc les points par lesquels on pourra mener une droite rencontrant s, s_1 et s_2; ce sont les points de rencontre de p avec le paraboloïde défini par s, s_1, s_2. Il y a deux courbes de la congruence touchant p; les points de contact sont les points focaux, et l'accélération dans le mouvement d'un mobile, qui parcourt l'une d'elles suivant la loi des aires

est dirigée, au point de contact avec p, suivant la droite issue de ce point et qui rencontre s, s_1 et s_2. Cette droite détermine donc le plan osculateur de la trajectoire.

10. On peut remarquer, comme dans le cas de deux centres, que les droites réelles de la congruence rencontrent les sphères de diamètres AB, A_1B_1, A_2B_2. La distance p de S à une droite de la congruence reste donc finie; mais elle ne peut devenir nulle, car p_1 et p_2 devraient s'annuler aussi, ce qui est impossible si S, S_1 et S_2 ne sont pas en ligne droite. La vitesse v sur toute courbe de la congruence reste finie et différente de zéro.

Enfin, si l'on fait varier les constantes des aires, on obtient une série de congruences dont les courbes fournissent la solution complète du problème.

11. Lorsque les points S, S_1, S_2 sont en ligne droite, les couples de points AB, A_1B_1, A_2B_2 existent encore, mais sont sur la droite SS_1S_2, qui est un axe de révolution pour la congruence. Il peut y avoir des courbes planes de la congruence; d'après le raisonnement déjà fait (n° 9), le plan d'une telle courbe doit être perpendiculaire à l'axe SS_1S_2; or les courbes planes du complexe (S, S_1) qui répondent à cette condition sont les cercles situés sur la sphère de diamètre A_2B_2; ainsi la seule courbe plane de la congruence est le cercle commun aux sphères (AB), (A_1B_1) et (A_2B_2).

Remarque. — On a vu que la détermination des courbes telles que les distances de leurs tangentes à deux points fixes soient dans un rapport constant dépend de l'intégration de l'équation différentielle

$$m'n' + \varphi'^2(1 + mn) = 0. \tag{1}$$

Il est intéressant de remarquer que l'on peut définir les courbes intégrales cherchées par des équations ne contenant pas de signe de quadrature.

Considérons m, n et φ comme les coordonnées d'un point de l'espace. Les courbes intégrales passant par un point donné sont tangentes aux génératrices d'un cône T :

$$(M - m)(N - n) + (\Phi - \varphi)^2(1 + mn) = 0.$$

Les surfaces qui touchent, en chacun de leurs points, le cône T correspondant sont les surfaces intégrales d'une certaine équation aux dérivées partielles; et l'on sait, d'après Monge, que si l'on connaît une intégrale complète

$$V(m, n, \varphi, \alpha, \beta) = 0,$$

les courbes intégrales sont définies par les équations

$$V[m, n, \varphi, \alpha, f(\alpha)] = 0,$$
$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = 0;$$

$f(\alpha)$ est une fonction arbitraire du paramètre α.

L'équation aux dérivées partielles en question s'obtient en exprimant que le plan $(p, q, -1)$ touche le cône T, ce qui donne la condition

$$(2) \qquad 4pq(1 + mn) + 1 = 0.$$

En écrivant les équations différentielles des caractéristiques, on trouve l'intégrale

$$(3) \qquad pm - qn = \alpha.$$

Ainsi, p et q étant déterminés par les équations (2) et (3), $p\,dm + q\,dn$ est une différentielle exacte. On a

$$\varphi - \beta = \int \frac{\alpha}{2}\left(\frac{dm}{m} - \frac{dn}{n}\right) + \int \sqrt{\alpha^2 - \frac{mn}{1+mn}}\left(\frac{dm}{2m} + \frac{dn}{2n}\right).$$

La dernière quadrature s'effectue facilement par le changement de variable

$$t^2 = \alpha^2 - \frac{mn}{1+mn},$$

d'où

$$mn = \frac{\alpha^2 - t^2}{t^2 - \alpha^2 + 1}.$$

On trouve

$$\varphi - \beta = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{L}\frac{m}{n} - \alpha\,\mathrm{L}\frac{\alpha+t}{\alpha-t} + \sqrt{\alpha^2-1}\,\mathrm{L}\frac{\sqrt{\alpha^2-1}+t}{\sqrt{\alpha^2-1}-t}.$$

Il suffit maintenant de remplacer t par sa valeur, β par $f(\alpha)$, f désignant une fonction arbitraire; l'équation précédente et celles qu'on obtient en dérivant deux fois par rapport à α donnent φ, m, n en fonction du paramètre α.

La même méthode s'applique à l'équation de Monge, à laquelle on arrive lorsque les constantes des aires sont égales.

S. Lie a d'ailleurs donné les équations des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral, comme celles dont il est ici question.

Le calcul montre que φ, $\log r$ et $\log z$ sont des fonctions algébriques de α, lorsque la fonction arbitraire $f(\alpha)$ est elle-même algébrique. Il n'en est pas de même lorsque les constantes des aires sont différentes.