STÄCKEL

Sur l'intégrale de Dirichlet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 57-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__57_1>

[D1bα]

SUR L'INTÉGRALE DE DIRICHLET (2);

PAR M. STÄCKEL (trad. LAUGEL).

I.

La démonstration donnée par Dirichlet, en 1829, qu'une fonction arbitraire est représentable par une

(1) Pour la construction point par point de cette cubique avec ses tangentes, *voir* le *Traité de Nomographie*, p. 190.

(2) Extrait des *Comptes rendus de l'Académie royale des Sciences de Leipzig*, mai 1901.

série trigonométrique repose sur le théorème suivant :

Si l'on désigne par $f(\xi)$ une fonction continue de ξ, qui, tandis que ξ croît de o à h $\left(\text{la constante } h \text{ vérifiant les conditions } h > 0 \text{ et } h \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, est toujours ou bien croissante ou bien décroissante, l'intégrale

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

quand on y donnera au nombre n des valeurs positives croissant indéfiniment, tendra de plus en plus vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$ (*Œuvres*, t. I, 1889, p. 154. Berlin).

Comme corollaire de ce théorème résulte (*loc. cit.*, p. 155) la proposition suivante :

Si l'on désigne par g et h des constantes vérifiant les conditions $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \geqq h > g$, et si la fonction $f(\xi)$, pour ξ croissant de g à h, est une fonction ou bien toujours croissante ou bien toujours décroissante, l'intégrale

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

pour n infiniment grand, sera égale à o.

Dans ce qui suit, je me propose d'abord de montrer comment, sans faire usage du théorème de Dirichlet, on peut immédiatement obtenir le corollaire, et ensuite, en faisant certaines hypothèses sur la nature de la fonction $f(\xi)$, comment on peut inversement déduire le théorème du corollaire.

Dès l'année 1860 on trouve une démonstration directe très élégante du corollaire dans un Mémoire de M. Scheibner [1], qui d'abord suppose que la fonction $f(\xi)$ est continue entre les limites d'intégration et reste toujours ou bien croissante, ou bien décroissante, et ensuite, en décomposant l'intervalle compris entre ces limites, étend la proposition à des fonctions qui ne présentent qu'un nombre fini d'oscillations finies et un nombre fini de valeurs maxima et minima. La démonstration que je donne ici est encore plus générale, car l'unique hypothèse que je fais est que $f(\xi)$ reste continue dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, en sorte que les fonctions continues admettant une infinité d'oscillations ne sont pas exclues.

II.

Comme point de départ prenons la formule

$$\int_\alpha^\beta \sin(2n+1)\xi \, d\xi = \frac{\cos(2n+1)\alpha - \cos(2n+1)\beta}{2n+1},$$

d'où l'on conclut que la valeur absolue de l'intégrale est $\leqq \frac{2}{2n+1}$. On arrive au même résultat au moyen d'une considération géométrique. L'aire de la courbe

$$\eta = \sin(2n+1)\xi$$

est formée d'ondes de longueur $\frac{2\pi}{2n+1}$, où celles que l'on peut nommer les *collines* et les *vallées* ont même aire, à savoir $\frac{2}{2n+1}$. Comme collines et vallées sont situées alternativement de part et d'autre de l'axe des ξ, prises deux à deux ensemble, elles fournissent à l'intégrale

---

[1] *Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz*. Leipzig, Hirzel.

une contribution nulle et dans une sommation quelconque il reste au plus *une* aire (que l'on doit compter soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif) égale à $\frac{2}{2n+1}$.

Si la fonction $\varphi(\xi)$ est continue dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, on sait qu'elle est aussi uniformément continue [1] dans cet intervalle, c'est-à-dire qu'en prenant une quantité positive ε suffisamment petite, on peut assigner un nombre r tel que, dans les r intervalles

$$\xi = \left(g \ldots g + \frac{h-g}{r}\right), \quad \left(g + \frac{h-g}{r} \ldots g + 2\frac{h-g}{r}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(g + \lambda\frac{h-g}{r} \ldots g + [\lambda+1]\frac{h-g}{r}\right), \quad \left(g + [r-1]\frac{h-g}{r} \ldots h\right),$$

on ait

$$\varphi(\xi) = \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right) + \varepsilon\,\mathfrak{I}_\lambda(\xi):$$
$$(\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1),$$

les fonctions $\mathfrak{I}_\lambda(\xi)$ vérifiant les inégalités

$$\mathfrak{I}_\lambda(\xi) < 1.$$

On a par conséquent l'équation

$$\int_g^h \sin(2n+1)\xi\,\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{r-1} \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right)\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)\xi\,d\xi$$
$$+ \varepsilon\sum_{\lambda=0}^{r-1}\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)\xi\,\mathfrak{I}_\lambda(\xi)\,d\xi.$$

---

(1) *Voir* U. Dini, *Teorica delle funzioni di variabili reali*, § 41 (Pisa, 1878), contenant une démonstration due à M. G. Cantor.

Dans la première somme, chacune des r intégrales est en valeur absolue $\leqq \frac{2}{2n+1}$; dans la seconde, comme la quantité sous le signe d'intégration est, abstraction faite du signe, < 1, chacune des r intégrales prise en valeur absolue est plus petite que l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire $< \frac{h-g}{r}$. Soit alors M le maximum de la valeur absolue de $\varphi(\xi)$ dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, on aura toujours

$$\left| \int_g^h \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi \right| < \mathrm{M}\frac{2r}{2n+1} + \varepsilon(h-g).$$

Si pour une valeur donnée de la quantité ε à laquelle il faut adjoindre un nombre r, on choisit $2n+1$ suffisamment grand, par exemple

$$2n+1 \leqq r^2,$$

on peut, en faisant décroître ε, rendre la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_a^b \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

plus petite que toute quantité positive donnée δ, c'est-à-dire que l'on aura

$$\text{(L)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_g^h \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0.$$

On peut rendre intuitive, par une interprétation géométrique, la condition de choisir $2n+1$ grand par rapport au nombre r.

En partageant l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$ en un grand nombre de petits intervalles, la fonction $\varphi(\xi)$ dans chaque intervalle partiel éprouve une oscillation au plus égale à 2ε, et par conséquent est près d'être constante. En prenant alors $2n+1$ suffisamment grand par rapport à r, on fait devenir le nombre des ondulations qui remplissent chaque intervalle très grand, quoique l'intervalle soit très petit.

Mais comme collines et vallées apportent à l'intervalle des quantités qui se détruisent, la contribution qu'apporte un intervalle partiel à la valeur totale de l'intégrale est une quantité tellement petite que la somme de r pareilles quantités est elle-même une très petite quantité. De cette manière on se figure très bien comment il se fait que la valeur de l'intégrale devient de plus en plus petite pour les valeurs de plus en plus grandes du nombre n.

III.

Lorsque la fonction $f(\xi)$ est continue dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, il en est de même de la fonction

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin \xi},$$

tant que l'on a $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \leq h > g$, g pouvant tendre d'ailleurs vers zéro, mais étant différent de zéro, et par suite alors de l'équation (L) résulte immédiatement le corollaire de Dirichlet :

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} f(\xi)\, d\xi = 0,$$

qui est ainsi démontré pour toutes les fonctions *continues* $f(\xi)$.

La question éprouve une modification essentielle lorsque l'on fait $g = 0$ dans l'équation (L); en effet, il n'est plus permis alors de poser

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin(\xi)},$$

car pour $\xi = 0$ la continuité peut cesser d'avoir lieu, $\sin\xi$ étant nul. Pour que l'équation (L) soit encore exacte, il faut que le numérateur de $\varphi(\xi)$ soit aussi égal à zéro pour $\xi = 0$.

Or nous pouvons remplir cette condition; écrivons l'intégrale

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\,d\xi$$

sous la forme

$$f(0)\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi + \int_0^h \sin(2n+1)\xi\,\frac{f(\xi)-f(0)}{\sin\xi}\,d\xi.$$

Le simple examen de cette expression fournit ce théorème :

Si la fonction $f(\xi)$ est telle que non seulement $f(\xi)$, mais encore le quotient

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi},$$

soit continu dans l'intervalle $\xi = (0 \ldots h)$, $h \leqq \frac{\pi}{2}$, on a l'équation

$$\lim_{n=\infty}\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi$$
$$= f(0)\lim_{n=\infty}\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}f(0).$$

D'où résulte ce théorème :

Une fonction continue $f(x)$ peut toujours être développée en série de Fourier dans tout intervalle où elle a une dérivée première finie.
