Nouvelles annales de mathématiques

A. Garbasso

Formules pour l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 549-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__549_1>

[H4j]

FORMULES POUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES;

PAR M. A. GARBASSO,

Privat docent de Physique à l'Université de Turin.

On donne un système de $n+1$ équations qui renferment, sous un forme linéaire et homogène, $n+1$ fonctions et leurs dérivées par rapport à une variable x, jusqu'à l'ordre s.

Nous appellerons

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_\nu, \quad \ldots, \quad y_n \quad \text{et} \quad z$$

les fonction inconnues, et désignerons par

$$a_{\mu,\nu}, \quad b_{\mu,\nu,\sigma}, \quad c_\mu \quad \text{et} \quad d_{\mu,\sigma}$$

des quantités constantes. Les équations proposées pourront s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \sum_1^n{}^\nu a_{\mu,\nu} y_\nu + \sum_1^n{}^\nu \sum_1^s{}^\sigma b_{\mu,\nu,\sigma} \frac{d^\sigma y_\nu}{dx^\sigma} + c_\mu z + \sum_1^s{}^\sigma d_{\mu,\sigma} \frac{d^\sigma z}{dx^\sigma} = 0$$

$$[\mu = 1, 2, \ldots, (n+1)].$$

Nous posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{d}{dx} = \mathrm{D}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^\sigma}{dx^\sigma} = \mathrm{D}^\sigma.$$

Si l'on introduit encore les définitions

$$a_{\mu,\nu} + \sum_1^s{}_\sigma\, b_{\mu,\nu\sigma}\,\mathrm{D}^\sigma = \mathrm{A}_{\mu,\nu},$$

$$c_\mu \quad + \sum_1^s{}_\sigma\, b_{\mu,\sigma}\,\mathrm{D}^\sigma = \mathrm{B}_\mu,$$

les équations (1) prendront la forme simple

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_\nu\, \mathrm{A}_{\mu,\nu}\, y_\nu + \mathrm{B}_\mu z = 0.$$

Ce sont là $n+1$ équations algébriques et linéaires pour les y_ν. On en tire :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \ldots & \mathrm{A}_{1,\nu-1} & \mathrm{A}_{1,\nu} & \mathrm{A}_{1,\nu+1} & \ldots & \mathrm{A}_{1,n} & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \ldots & \mathrm{A}_{2,\nu-1} & \mathrm{A}_{2,\nu} & \mathrm{A}_{2,\nu+1} & \ldots & \mathrm{A}_{2,n} & \mathrm{B}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{\mu,1} & \mathrm{A}_{\mu,2} & \ldots & \mathrm{A}_{\mu,\nu-1} & \mathrm{A}_{\mu,\nu} & \mathrm{A}_{\mu,\nu+1} & \ldots & \mathrm{A}_{\mu,n} & \mathrm{B}_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{n+1,1} & \mathrm{A}_{n+1,2} & \ldots & \mathrm{A}_{n+1,\nu-1} & \mathrm{A}_{n+1,\nu} & \mathrm{A}_{n+1,\nu+1} & \ldots & \mathrm{A}_{n+1,n} & \mathrm{B}_{n+1} \end{vmatrix} z = 0.$$

et il en suit :

$$(3) \qquad z = \sum_1^p{}_\pi\, \mathrm{C}_\pi e^{c_\pi x}. \qquad [p = s(n+1)].$$

Dans la formule (3) les C_π sont des constantes arbitraires, et les c_π doivent se déterminer comme racines de l'équation (2), alors qu'on regarde dans cette dernière la lettre D non pas comme le symbole d'une opération, mais bien comme une inconnue.

Cela posé, nous allons considérer les n premières des équations (1') et les résoudre comme des équations algébriques entre les y_ν.

Il s'en tire :

$$y_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\Delta} \begin{vmatrix} B_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu+1} & \ldots & A_{1,n} \\ B_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_\mu & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots & A_{\mu,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,\nu-1} & A_{n,\nu+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix} z,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\mu,1} & \ldots & A_{\mu,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

ou, en substituant à z sa valeur (3),

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} y_\nu = & (-1)^\nu \sum_1^p {}_\pi \frac{C_\pi e^{c_\pi x}}{\Delta(c_\pi)} \\ & \times \begin{vmatrix} B_1(c_\pi) & A_{1,1}(c_\pi) & \ldots & A_{1,\nu-1}(c_\pi) & A_{1,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{1,n}(c_\pi) \\ B_2(c_\pi) & A_{2,1}(c_\pi) & \ldots & A_{2,\nu-1}(c_\pi) & A_{2,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{2,n}(c_\pi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_\mu(c_\pi) & A_{\mu,1}(c_\pi) & \ldots & A_{\mu,\nu-1}(c_\pi) & A_{\mu,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{\mu,n}(c_\pi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n(c_\pi) & A_{n,1}(c_\pi) & \ldots & A_{n,\nu-1}(c_\pi) & A_{n,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{n,n}(c_\pi) \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Par les notations $\Delta(c_\pi)$, $B_\mu(c_\pi)$ et $A_{\mu,\nu}(c_\pi)$ on veut indiquer que dans les $A_{\mu,\nu}$ et B_μ il faut substituer, à tour de rôle, à la place de D les racines c_π.

Les formules (3) et (4) donnent les intégrales cherchées.

Pour la détermination des constantes C_π, il faudra donner les valeurs initiales des y_ν, de z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(s - 1)$.