L. RAFFY

Une leçon sur l'équation de Riccati

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 529-545
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__529_0>

[H2cγ]

UNE LEÇON SUR L'ÉQUATION DE RICCATI;

PAR M. L. RAFFY.

I.

1. On appelle *équation de Riccati* toute équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

où X_0, X_1 et X_2 sont des fonctions de x. Cette équation, qu'on ne sait pas intégrer en général, jouit de propriétés remarquables. Pour démontrer les premières de ces propriétés, nous invoquerons trois lemmes bien connus, qu'il suffira d'énoncer.

LEMME I. — *L'intégrale générale de l'équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} + F(x)z + G(x) = 0 \tag{2}$$

s'obtient par deux quadratures; c'est une fonction linéaire

$$z = C f(x) + g(x)$$

de la constante arbitraire.

LEMME II. — *Connaissant une solution particulière z_1 de l'équation linéaire* (2), *on obtient son intégrale générale au moyen d'une seule quadrature, par la formule*

$$z = z_1 + Ce^{-\int F(x)\,dx}.$$

Lemme III. — *Connaissant deux solutions particulières z_1 et z_2 de l'équation linéaire* (2), *on obtient son intégrale générale, sans quadrature, par la formule*

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \text{C}.$$

Les théorèmes qui vont suivre sont des conséquences immédiates de ces propositions.

2. Théorème I. — *Connaissant une solution d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale par deux quadratures.*

Soit, en effet, y_1 une solution de l'équation (1); par l'hypothèse, on a identiquement

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx} + \text{X}_0 y_1^2 + \text{X}_1 y_1 + \text{X}_2 = 0.$$

Si l'on pose

$$(3) \qquad y = y_1 + \frac{1}{z},$$

z étant une nouvelle fonction inconnue, et qu'on substitue cette expression de y dans l'équation (1) en ayant égard à l'identité (1)', on reconnaît que z dépend d'une équation linéaire

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} - (2\text{X}_0 y_1 + \text{X}_1) z - \text{X}_0 = 0.$$

Il est visible que la transformation (3) fait correspondre à toute intégrale de l'équation (4) une intégrale de l'équation (1) et réciproquement; de sorte que l'intégrale générale de l'équation (1) sera connue quand on connaîtra celle de l'équation (4), ce qui exige deux quadratures (lemme I).

Remarque I. — Ce théorème, qui est dû à Euler (*Institutiones Calculi integralis*, Vol. I, p. 383), fait connaître la *forme* de l'intégrale générale de l'équation (1).

En effet, si, dans la relation (3), on substitue à z l'intégrale générale de l'équation (4)

$$z = C f(x) + g(x)$$

qui est linéaire (lemme I) par rapport à la constante arbitraire, on trouve

$$y = \frac{C\alpha(x) + \beta(x)}{C\gamma(x) + \delta(x)}. \tag{5}$$

Donc, *l'intégrale générale de toute équation de Riccati est une fraction rationnelle et du premier degré par rapport à la constante arbitraire.*

Réciproquement, *toute fonction de cette forme satisfait à une équation de Riccati.* Il suffit, pour s'en assurer, de résoudre l'équation (5) par rapport à la constante C et de différentier.

Remarque II. — Grâce à la formule (5), nous sommes d'ores et déjà en mesure de démontrer une propriété de l'équation de Riccati, qui est fondamentale, et que nous retrouverons tout à l'heure par un autre procédé : *le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques de l'équation de Riccati est constant.*

En effet, si l'on donne successivement à C, dans la formule (5), quatre valeurs quelconques C_0, C_1, C_2, C_3, le rapport anharmonique des quatre intégrales correspondantes y_0, y_1, y_2, y_3 est, comme on sait, indépendant de α, β, γ, δ et égal au rapport anharmonique de C_0, C_1, C_2, C_3, c'est-à-dire à une constante.

3. Théorème II. — *Connaissant deux solutions*

d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale par une seule quadrature. (Minding.)

Soient, en effet, y_1 et y_2 ces deux solutions. On a vu précédemment que la fonction

$$z = \frac{1}{y - y_1}$$

satisfait à l'équation linéaire (4); or on connaît *une* solution de cette équation, savoir

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

Donc, on obtient son intégrale (lemme II) et, par suite y, au moyen d'une seule quadrature.

Minding, qui fut conduit à ce théorème dès 1845, par une tout autre voie [1], en a donné deux démonstrations, dont voici l'une :

Retranchant membre à membre l'équation (1) et l'identité (1)', puis divisant par $y - y_1$, on trouve

$$\frac{1}{y - y_1}\,\frac{d(y - y_1)}{dx} + X_0(y + y_1) + X_1 = 0.$$

---

[1] La Note où se trouve ce résultat (*Journal de Crelle*, t. 40, p. 361) est consacrée à la démonstration d'un théorème qui paraît peu connu, bien qu'il soit fort remarquable. Je crois devoir en reproduire ici l'énoncé.

Étant donnée l'équation différentielle

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

où l'on suppose

$$M = a_0 y^{p-1} + a_1 y^{p-2} + \ldots + a_{p-1},$$
$$N = b_0 y^{p-1} + b_1 y^{p-2} + \ldots + b_{p-1},$$

chacune des fonctions a_r et b_r étant un polynome entier en x, de degré égal à son indice, si cette équation admet comme intégrales

Comme y_2 est aussi une solution de l'équation (1), on aura pareillement

$$\frac{1}{y-y_2}\frac{d(y-y_2)}{dx}+X_0(y+y_2)+X_1=0.$$

Retranchant membre à membre ces deux dernières équations, on trouve

$$\frac{d\log(y-y_1)}{dx}-\frac{d\log(y-y_2)}{dx}+X_0(y_1-y_2)=0,$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}e^{\int X_0(y_1-y_2)\,dx}=\text{const.}$$

4. Théorème III. — *Connaissant trois solutions d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale sans quadrature.*

En effet, l'équation linéaire (4) à laquelle satisfait la fonction

$$z=\frac{1}{y-y_1}$$

---

particulières p droites

$$y-m_rx-n_r=0 \qquad (r=1, 2, \ldots, p)$$

ayant toutes des directions différentes, l'expression

$$\frac{M\,dx+N\,dy}{(y-m_1x-n_1)(y-m_2x-n_2)\ldots(y-m_px-n_p)}$$

est une différentielle exacte, et l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\prod_{r=1}^{r=p}(y-m_rx-n_r)^{h_r}=\text{const.},$$

les nombres h_r ayant des valeurs déterminées (à un facteur commun près).

admet deux solutions connues

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \qquad z_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}.$$

Par suite (lemme III), on connaît son intégrale générale

$$\left(z - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) : \left(z - \frac{1}{y_3 - y_1}\right) = \text{const.} = C.$$

Celle de l'équation de Riccati est donc

$$\left(\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) : \left(\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1}\right) = C,$$

ce qui démontre le théorème. Cette formule, qu'on peut écrire

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = C.$$

prouve à nouveau que *le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques d'une équation de Riccati est une constante,* ainsi que nous l'avons déjà vu (n° 2, remarque II).

5. Nous avons jusqu'ici rattaché les propriétés de l'équation de Riccati à celles de l'équation linéaire du premier ordre. Il n'est pas moins important de rapprocher cette équation de l'équation linéaire du second ordre. Posons, à cet effet,

$$(6) \qquad y = \frac{1}{X_0} \frac{d \log t}{dx} = \frac{t'}{X_0 t}.$$

Cette substitution, opérée dans l'équation (1), donne

$$(7) \qquad t'' + \left(X_1 - \frac{X_0'}{X_0}\right) t' + X_0 X_2 t = 0;$$

d'où cette conclusion :

Toute intégrale de l'équation (1), *multipliée par* *la fonction* X_0, *est la dérivée logarithmique d'une des intégrales d'une équation linéaire du second ordre.*

Comme on sait, d'autre part, que toute intégrale d'une équation linéaire du second ordre rentre dans le type à deux constantes

$$C_1\,\varphi(x) + C_2\,\psi(x),$$

on voit que *toute intégrale d'une équation de Riccati est de la forme*

$$y = \frac{1}{X_0}\,\frac{\varphi'(x) + C\,\psi'(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)} \qquad \left(C = \frac{C_2}{C_1}\right),$$

ce qui confirme et précise un énoncé antérieur (n° **2**, remarque I).

Il résulte évidemment de la relation (6) que, si l'on connaît une intégrale de l'équation de Riccati, on obtiendra l'intégrale correspondante de l'équation (7) par une quadrature.

Ajoutons que l'équation de Riccati peut être rattachée à l'équation du second ordre *d'une infinité de manières* : le procédé très particulier que nous venons d'indiquer est le plus simple et le plus direct.

II.

6. La forme de l'équation de Riccati n'est point altérée par certaines substitutions (changements de variable et de fonction) auxquelles on est conduit tout naturellement.

1° On voit en effet que l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0$$

ne change pas de forme quand on effectue un changement de variable $x = x(\xi)$.

2° Il en est de même si l'on fait le changement de fonction

$$y = ru + s,$$

u étant la nouvelle fonction inconnue, r et s deux fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante.

3° Si, dans une équation de Riccati où la fonction inconnue est désignée par u, on fait le changement de fonction

$$u = \frac{1}{v},$$

on obtient encore pour v une équation de Riccati.

4° En conséquence, on peut, dans l'équation (1), poser

$$y = \frac{r}{v} + s;$$

la fonction v satisfera à une équation de même forme. On peut, dès lors, y faire le changement de fonction

$$v = pw + q,$$

où p et q sont deux fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante, et l'on aura encore, pour w, une équation de Riccati. Or, l'effet de ces deux substitutions successives est évidemment le même que celui de la substitution

$$y = \frac{r}{pw + q} + s = \frac{mw + n}{pw + q},$$

où m, n, p, q sont quatre fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante.

Rapprochant ce dernier résultat du premier, on conclut :

Une équation de Riccati, où la variable est x et la *fonction inconnue y, se change en une autre équation de Riccati quand on effectue la substitution*

$$x = x(\xi), \qquad y = \frac{m(x)w + n(x)}{p(x)w + q(x)},$$

où toutes les fonctions mises en évidence peuvent être choisies arbitrairement.

7. Ceci conduit à simplifier l'équation de Riccati, à lui donner une *forme canonique*. On choisit souvent comme telle la forme

$$\frac{du}{d\xi} + u^2 = \mathrm{U}(\xi), \tag{8}$$

à laquelle on peut arriver de la manière suivante :

L'équation proposée

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{X}_0 y^2 + \mathrm{X}_1 y + \mathrm{X}_2 = 0 \tag{1}$$

peut être écrite

$$\frac{dy}{\mathrm{X}_0\,dx} + \left(y + \frac{\mathrm{X}_1}{2\mathrm{X}_0}\right)^2 + \frac{4\mathrm{X}_0\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1^2}{4\mathrm{X}_0^2} = 0.$$

On voit qu'elle prendra la forme (8) si l'on fait à la fois *un changement de fonction et un changement de variable* en posant

$$y + \frac{\mathrm{X}_1}{2\mathrm{X}_0} = u, \qquad \int \mathrm{X}_0\,dx = \xi.$$

Mais, quand on procède ainsi, il faut, pour calculer le second membre de l'équation (8), qu'on puisse exprimer x en fonction de ξ; or, on ne sait pas, en général, effectuer l'inversion de l'intégrale ξ.

C'est pourquoi nous indiquerons un autre moyen d'arriver à la forme canonique *par un simple change-*

ment de fonction : posons

$$y = \frac{1}{Au + B},$$

A et B étant deux fonctions de x que nous allons déterminer. L'équation transformée est

$$-A\frac{du}{dx} + A^2X_2u^2 + (2ABX_2 + AX_1 - A')u + B^2X_2 + BX_1 + X_0 - B' = 0.$$

Écrivons que u^2 et u' ont même coefficient; nous trouvons

$$A = -\frac{1}{X_2}.$$

Exprimons que l'équation ne contient pas de terme en u; il viendra

$$2ABX_2 + AX_1 - A' = 0.$$

Comme on connaît A, on tire de là

$$B = -\frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{X_2'}{X_2^2}\right).$$

En conséquence, *si, dans l'équation*

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} + X_0y^2 + X_1y - X_2 = 0,$$

on fait le changement de fonction [1]

$$y = -\frac{X_2}{u + \frac{1}{2}\left(X_1 - \frac{X_2'}{X_2}\right)},$$

on obtient la forme canonique

$$\text{(9)} \qquad \frac{du}{dx} + u^2 = X(x).$$

---

[1] Ce procédé tombe en défaut si la fonction X_2 se réduit à zéro ; mais alors l'équation (11) est *linéaire* par rapport à $\frac{1}{y}$.

Enfin, si l'on pose

$$u = \frac{d \log t}{dx},$$

on arrive à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \mathrm{X} t = 0, \tag{7'}$$

qui n'est autre chose que l'équation (7) où l'on a fait

$$\mathrm{X}_0 = 1, \qquad \mathrm{X}_1 = 0, \qquad \mathrm{X}_2 = -\mathrm{X}.$$

III.

8. Nous allons maintenant nous occuper de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \mu x^m \qquad (\mu = \text{const.}),$$

qui est la seule que Riccati ait considérée. On peut réduire le coefficient μ à l'unité en multipliant x et y par des facteurs numériques convenables; l'hypothèse $\mu = 1$, que nous ferons désormais pour simplifier les calculs, n'est donc nullement restrictive.

Théorème. — *L'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x^m \tag{10}$$

s'exprime en termes finis, quand l'exposant m rentre dans l'un des deux types

$$-\frac{4k}{2k+1}, \quad -\frac{4k}{2k-1},$$

où k désigne un entier positif quelconque, y compris zéro.

La démonstration qui suit et que nous empruntons à

Cayley (*Philosophical Magazine*, 4e série, Vol. XXXVI) précisera ce qu'il faut entendre par les mots *en termes finis*.

Il sera commode d'écrire

$$m = 2n - 2.$$

Nous aurons alors à considérer l'équation

$$\text{(11)} \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^{2n-2},$$

et nous savons (nos 5 et 7) que l'intégrale générale de cette équation est la dérivée logarithmique de l'intégrale générale de l'équation

$$\text{(12)} \qquad \frac{d^2 t}{dx^2} - x^{2n-2} t = 0.$$

Tout revient donc à intégrer celle-ci. Or, on vérifie immédiatement que, *quand n est une fraction irréductible à dénominateur impair*, si $f(x)$ est une intégrale, $f(-x)$ en est une autre, de sorte que l'intégrale générale de l'équation (11) est

$$\text{(13)} \qquad y = \frac{f'(x) - C f'(-x)}{f(x) + C f(-x)}.$$

Voici, maintenant, un moyen d'obtenir une intégrale particulière $f(x)$ de l'équation (12), où n est supposé différent de zéro (le cas $n = 0$ sera traité plus loin à part). Faisons

$$t = z e^{\frac{x^n}{n}},$$

ce qui transforme l'équation (12) en la suivante :

$$\text{(14)} \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + 2x^{n-1} \frac{dz}{dx} + (n-1)x^{n-2} z = 0.$$

Cherchons à vérifier cette dernière équation par une série procédant suivant les puissances entières et positives de x^n, savoir

$$(15)\qquad z = 1 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \ldots + a_k x^{kn} + a_{k+1} x^{(k+1)n} + \ldots$$

Si l'on substitue cette expression dans le premier membre de l'équation (14), on reconnaît immédiatement que toutes les puissances de x ont des exposants de la forme $rn - 2$ ($r = 1, 2, \ldots$).

Égalant à zéro le coefficient de x^{n-2}, on trouve

$$a_1 = -\frac{1}{n}\cdot$$

en supposant n différent de 1; dans l'hypothèse $n = 1$, l'équation (11) s'intègre par une quadrature.

Si l'on égale à zéro le coefficient de $x^{(k+1)n}$, on obtient la formule de récurrence très simple

$$(k+1)n\,[(k+1)n - 1]\,a_{k+1} + [(2k+1)n - 1]\,a_k = 0.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{n},\\
a_2 &= -\frac{(3n-1)}{2n(2n-1)}\,a_1,\\
a_3 &= -\frac{(5n-1)}{3n(3n-1)}\,a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{k+1} &= -\frac{[(2k+1)n-1]}{(k+1)n\,[(k+1)n-1]}\,a_k,
\end{aligned}$$

et il suffit de multiplier ces égalités membre à membre pour trouver

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}\frac{(3n-1)(5n-1)\ldots[(2k+1)n-1]}{2n(2n-1)\,3n(3n-1)\ldots(k+1)n\,[(k+1)n-1]}\cdot$$

On connaît donc l'expression générale des coefficients de la série (15).

D'autre part, on peut s'assurer que cette série est convergente, ses coefficients ayant été ainsi déterminés. Formons, en effet, le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{a_{k+1}x^{(k+1)n}}{a_k x^{kn}} = -\frac{[(2k+1)n-1]}{(k+1)n\,[(k+1)n-1]}.x^n.$$

Quel que soit x, ce rapport tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment : la série (15) n'est donc pas seulement une solution *formelle,* mais bien une solution effective de l'équation (14). Si nous la représentons par $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation (14) sera

$$z = C_1\,\varphi(x)e^{\frac{x^n}{n}} + C_2\,\varphi(-x)e^{\frac{(-x)^n}{n}},$$

sous la condition que n soit une fraction irréductible de dénominateur impair.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs de n la série (15) est limitée. Pour qu'elle se termine, il faut et il suffit que l'un de ses coefficients soit nul ; car, alors, en vertu de la loi de récurrence, tous les suivants seront nuls aussi.

Si l'on veut que le terme d'exposant kn soit le dernier, on devra poser $a_{k+1} = 0$, ce qui donne

$$n = \frac{1}{2k+1}.$$

Donc *la série* (15) *se termine et l'intégrale générale de l'équation* (11) *s'exprime en termes finis, quand n est l'inverse d'un entier positif impair*. En vertu de la relation

$$m = 2n - 2,$$

la valeur correspondante de m est

$$m = -\frac{4k}{2k+1};$$

ce qui prouve la proposition énoncée pour l'une des séries de valeurs de l'exposant m.

Pour achever la démonstration, effectuons dans l'équation

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^m$$

la substitution

$$(16) \qquad x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = -\xi^2 u + \xi;$$

on obtient, par un calcul facile, l'équation

$$(17) \qquad \frac{du}{d\xi} + u^2 = \xi^{-m-4},$$

qui ne diffère de la proposée que par le changement de m en $-m-4$.

L'intégrale générale de cette dernière s'exprimera donc en termes finis quand on aura

$$-m-4 = -\frac{4h}{2h+1} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire

$$m = -\frac{4(h+1)}{2h+1}.$$

Si l'on remplace h par $k-1$, on trouve la forme annoncée

$$m = -\frac{4k}{2k-1},$$

où k prend les valeurs 1, 2, 3, ... On peut même supposer $k = 0$, puisqu'on retrouve alors $m = 0$, cas d'intégrabilité déjà signalé.

En vertu des relations (16), il est évident que l'intégrale générale de l'équation (10) s'exprimera aussi en termes finis, par les produits de divers termes algébriques et de deux exponentielles.

Ajoutons que, d'après la formule (13), l'équation (10) admettra *deux intégrales algébriques,* celles qui répondent aux valeurs $C = 0$ et $C = \infty$.

Comme exemple, nous donnons ci-dessous les expressions de la fonction $f(x)$ qui correspondent dans cette formule (13) aux valeurs les plus simples de k.

$$1^\circ \quad m = -\frac{4k}{2k+1}:$$

$$k = 0, \qquad m = 0, \qquad f(x) = e^x,$$

$$k = 1, \qquad m = -\frac{4}{3}, \qquad f(x) = \left(1 - 3x^{\frac{1}{3}}\right)e^{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$k = 2, \qquad m = -\frac{8}{5}, \qquad f(x) = \left(1 - 5x^{\frac{1}{5}} + \frac{25}{3}x^{\frac{2}{5}}\right)e^{5x^{\frac{1}{5}}};$$

$$2^\circ \quad m = -\frac{4k}{4k-1}:$$

$$k = 1, \qquad m = -4, \qquad f(x) = xe^{-\frac{1}{x}},$$

$$k = 2, \qquad m = -\frac{8}{3}, \qquad f(x) = x\left(1 + 3x^{-\frac{1}{3}}\right)e^{-3x^{-\frac{1}{3}}}.$$

Le cas limite $k = \infty$ conduit, pour l'une et l'autre série des valeurs de m, à l'unique équation

$$(18) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2},$$

qui reste en dehors de notre analyse. Mais on aperçoit immédiatement les *deux* solutions

$$y_1 = \frac{r_1}{x}, \qquad y_2 = \frac{r_2}{x},$$

r_1 et r_2 étant les racines de l'équation $r^2 - r - 1 = 0$, savoir

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Appliquant à ces deux solutions le théorème de Minding (n° 3), on trouve

$$\frac{2xy - (1 + \sqrt{5})}{2xy - (1 - \sqrt{5})} x^{\sqrt{5}} = \text{const.}$$

pour intégrale générale de l'équation (18). On pourrait aussi faire usage de l'équation (12), qui est ici

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{t}{x^2},$$

et admet visiblement pour intégrale générale

$$C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$