Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2 (1902), p. 524-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__524_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1927.

(1902, p. 287.)

On considère six points A, B, C, D, E, F *tels que chacun des quatre couples de plans*

(EFA, BCD), (EFB, CDA), (EFC, DAB), (EAB, FCD)

est formé de deux plans rectangulaires.

1° *Démontrer que toutes les quadriques passant par ces six points sont des hyperboloïdes équilatères, de sorte que, en particulier, le plan de trois quelconques des six points est perpendiculaire au plan des trois autres; un tel système de six points peut être dit* ORTHOGONAL.

2° *Démontrer que le système de cinq quelconques des six points a une sphère conjuguée dont le centre est le sixième point du système.* (*On dit qu'une sphère est conjuguée à un système de cinq points lorsque le pôle du plan de trois quelconques des cinq points est sur la droite qui joint les deux autres.*)

3° *Réciproquement, si un système de cinq points admet une sphère conjuguée, les cinq points et le centre de la sphère forment un système orthogonal de six points.*

(G. Fontené.)

1935.

(1902, p. 384.)

On dit qu'un pentagone gauche est conjugué à une quadrique quand la droite qui joint deux quelconques de ses sommets passe par le pôle du plan des trois autres :

1° *Les sommets de deux pentagones conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.*

2° *Les sommets d'un pentagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même biquadratique.* (E. Duporcq.)

1936.

(1902, p. 384.)

On dit qu'un hexagone gauche est conjugué à une quadrique quand le plan défini par trois quelconques de ses sommets est conjugué du plan des trois autres :

1° *Les sommets d'un hexagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.*

2° *Il existe deux sphères conjuguées à un même hexagone. Leurs centres appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères circonscrits à l'hexagone.* (E. Duporcq.)

SOLUTIONS

Par M. R. Gilbert.

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les sommets d'un pentagone gauche conjugué à la quadrique Q. Le pôle du plan 123 est sur 45 dans le plan P polaire du point 1. De même pour les plans 124, 125, 134, 135, 145. Donc la conique C, section de Q par le plan P, est une conique conjuguée au pentagone des cinq points.

Toute quadrique S qui passe par les points 1, 2, 3, 4, 5 coupe P suivant une conique harmoniquement circonscrite à C; on peut tracer dans P un triangle *abc* inscrit à S et conjugué à Q. Donc S est harmoniquement circonscrite à Q.

Réciproquement, si une quadrique Q est harmoniquement inscrite à cinq quadriques S passant par les points 1, 2, 3, 4, 5 et linéairement indépendantes, elle l'est à toute quadrique passant par ces cinq points, en particulier aux quadriques composées de couples de plans, et, par suite, est conjuguée au penpentagone 12345.

Réciproquement encore : si une quadrique, S, passant par quatre des sommets, par exemple 1, 2, 3, 4, est harmoniquement circonscrite à la quadrique Q conjuguée au pentagone 12345, elle passe par le point 5. En effet, elle coupe le plan P polaire du point 1 suivant une conique Σ, harmoniquement circonscrite à C. Or une quadrique qui passe par 1, 2, 3, 4, 5 et quatre des points de Σ coupe P suivant une conique harmoniquement circonscrite à C et passant par quatre points de Σ; elle se confond donc avec Σ et la quadrique auxiliaire avec S.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets d'un hexagone gauche conjugué à la quadrique Q. Le pôle du plan 123 est sur la droite d'intersection D du plan 456 par le plan P, polaire du point 1. Le plan P coupe la quadrique Q suivant une conique C, et le plan 123 suivant une droite, Δ, conjuguée de D par rapport à C. On trouve ainsi, dans P, dix couples de droites (D, Δ) conjuguées à C. Or les quadriques S, qui passent par les sommets de l'hexagone, coupent le plan P suivant des coniques appartenant à un réseau ponctuel défini par quatre de ces coniques linéairement indépendantes. La conique C est harmoniquement inscrite à dix de ces coniques constituées par les dix couples (D, Δ) et, par suite, à toutes ces coniques. Donc toutes les quadriques S sont harmoniquement circonscrites à Q.

Réciproquement, on voit que, si Q est harmoniquement inscrite à quatre quadriques S, linéairement indépendantes et passant par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, elle est conjuguée à l'hexagone qui a ces points pour sommets.

Réciproquement aussi, toute quadrique S qui passe par les cinq sommets 1, 2, 3, 4, 5 d'un hexagone conjugué à une quadrique Q passe par le sixième. En effet, elle coupe le plan P suivant une conique Σ, harmoniquement circonscrite à C et à C_1 de ce plan à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques sections par P des quadriques qui passent par 1, 2, 3, 4, 5. Une quadrique passant par 1, 2, 3, 4, 5, 6 et par trois des points de Σ coupe P suivant une conique qui est aussi harmoniquement circonscrite à C et C_1; donc elle se confond avec Σ et la quadrique auxiliaire avec S.

On peut dire, d'une façon générale, qu'une quadrique, Q, est conjuguée à un polygone gauche de n sommets ($9 \geqq n \geqq 4$) lorsqu'elle est harmoniquement inscrite à $10 - n$ quadriques linéairement indépendantes qui passent par ces n points.

On peut établir les propositions suivantes :

Si une quadrique, Q, est conjuguée à un polygone gauche de n sommets 1, 2, 3, ..., n, parmi les quadriques Q' circonscrites à Q suivant la section de Q par le plan polaire P d'un sommet, 1, on peut trouver une quadrique conjuguée au polygone des $n - 1$ autres sommets 2, 3, 4, ..., n.

En effet, soit S une quadrique qui passe par les points 1, 2, 3, ..., n; il y a un tétraèdre de sommet 1 inscrit à S et conjugué à Q et, par suite, à Q'. Autrement dit, toutes les quadriques Q' sont conjuguées au polygone $123\ldots n$. On peut en déterminer une de façon qu'elle soit harmoniquement inscrite à une quadrique qui passe par les points 2, 3, 4, ..., n sans passer par le point 1. Elle sera conjuguée au polygone $234\ldots n$.

Réciproquement, si un polygone de $n - 1$ sommets est conjugué à une quadrique Q, à toute quadrique Q' circonscrite à Q correspond le pôle du plan de contact qui forme avec les $n - 1$ points un polygone gauche de n sommets conjugué à Q'.

Car toutes les quadriques S qui passent par ce pôle sont harmoniquement circonscrites à Q et, par suite, à Q'.

D'après ces résultats, on a immédiatement les solutions des questions **1927**, **1935**, **1936**.

1927. 1° Supposons que parmi les quadriques conjuguées à un hexagone gauche se trouve l'ombilicale : toutes les coniques Σ sections par le plan de l'infini des quadriques S circonscrites à l'hexagone seront harmoniquement circonscrites à l'ombilicale, c'est-à-dire que les quadriques S sont des hyperboloïdes équilatères.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que quatre des quadriques S, linéairement indépendantes, soient des hyperboloïdes équilatères.

2° Dans l'hypothèse précédente, on peut trouver une sphère conjuguée au pentagone 23456; son centre est le point 1.

3° Réciproquement, si le pentagone 23456 est conjugué à la sphère de centre 1, l'hexagone 123456 est conjugué à l'ombilicale.

1935. 1° Soient 12345 et 1'2'3'4'5' deux pentagones gauches conjugués à une quadrique Q; une quadrique S qui passe par les neuf points 1, 2, 3, 4, 5, 1', 2', 3', 4' est harmoniquement circonscrite à Q; donc elle passe par S'.

2° Soient 12345 et 1'2'3'4' un pentagone et un tétraèdre conjugués à Q. Toutes les quadriques qui passent par 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' passent par 5.

1936. 1° Même démonstration.

2° Nous allons faire voir d'abord que toutes les quadriques S qui passent par six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et coupent un plan fixe P suivant des coniques Σ harmoniquement circonscrites à une conique fixe, C, passent par deux autres points fixes.

En effet, soit 7 un autre point commun à trois de ces quadriques S_1, S_2, S_3. Une quadrique S coupe P suivant une conique Σ harmoniquement circonscrite à trois coniques C, C', C''. Toute quadrique qui passe par les sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 coupe P suivant une conique qui fait partie du réseau ponctuel déterminé par les sections par P de S_1, S_2, S_3 et, par suite, est aussi harmoniquement circonscrite à c, c', c''. Si donc on assujettit cette quadrique à passer par deux points de Σ, sa section par P se confond avec Σ et la quadrique elle-même avec S; cette dernière passe par le point 7 et par le huitième point commun aux quadriques S_1, S_2, S_3.

Les hyperboloïdes équilatères qui passent par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 se coupent en deux points fixes 7, 8.

Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont les sommets d'un heptagone conjugué à l'ombilicale; donc il y a une sphère de centre 7 conjuguée à l'hexagone 123456.