NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TSURUICHI HAYASHI

Expressions de $\tan g^n \alpha$ et $\cot^n \alpha$ sous forme de continuants

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 496-499

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__496_1>

[B1]

EXPRESSIONS DE $\tan^n \alpha$ ET $\cot^n \alpha$ SOUS FORME DE CONTINUANTS;

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

En posant

$$\alpha + \beta = p, \qquad \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = u_n,$$

$$\alpha\beta = q, \qquad \alpha^n + \beta^n = v_n,$$

on a les deux formules de récurrence

$$u_{n+2} = pu_{n+1} - qu_n,$$
$$v_{n+2} = pv_{n+1} - qv_n;$$

par suite

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n-1)$$

et

$$\alpha^n + \beta^n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n).$$

Supposons $p = 2\zeta$ et $q = 1$; les formules précédentes deviennent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ & = 2 \begin{vmatrix} \sqrt{\zeta^2 - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix} \end{aligned} \right. \quad \text{(d'ordre } n).$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ & = 2 \begin{vmatrix} \zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix} \end{aligned} \right. \quad \text{(d'ordre } n).$$

En ajoutant et retranchant, on en tire

$$(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})^n = \begin{vmatrix} \zeta+\sqrt{\zeta^2-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & .. & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\zeta \end{vmatrix} \quad (\text{d'ordre } n)$$

et

$$(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})^n = \begin{vmatrix} \zeta-\sqrt{\zeta^2-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & .. & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\zeta \end{vmatrix}.$$

En posant dans ces relations

$$\zeta = \sqrt{-1}\cot 2\alpha,$$

et en se servant du théorème mentionné par M. C.-A. Laisant dans les *Archiev d. Math. u. Physik*, t. III, 1re série, p. 370, on trouve aisément

$$\cot^n\alpha = \begin{vmatrix} \cot\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2\cot 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2\cot 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cot 2\alpha \end{vmatrix}$$

et

$$\tang^n\alpha = \begin{vmatrix} \tang\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -2\cot 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & -2\cot 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2\cot 2\alpha \end{vmatrix}.$$

De même, en posant

$$\zeta = \text{coséc}\,\alpha$$

on pourrait obtenir

$$\cot^n \alpha = \begin{vmatrix} \cot\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha \end{vmatrix}$$

et

$$\operatorname{tang}^n \alpha = \begin{vmatrix} \operatorname{tang}\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\,\operatorname{cos\acute{e}c} 2\alpha \end{vmatrix}.$$

Ces formes de $\cot^n \alpha$ et $\operatorname{tang}^n \alpha$ sont aussi remarquables que celles qui ont été trouvées par M. Studnicka pour $\cos n\alpha$ et $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ (Pascal, *Die Determinanten*, p. 155-156, traduction allemande du Dr Leitzmann), et qui peuvent être déduites de (2) et (1) en posant

$$\zeta = \cos\alpha.$$