Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 474-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__474_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1901.

(1901, p. 47.)

Sur une biquadratique, il existe seize points où le plan osculateur à cette courbe la suroscule, et ces seize points sont à l'intersection de la biquadratique avec les faces du tétraèdre ayant pour sommets les sommets des quatre cônes du second degré passant par la biquadratique.

(H. LÉAUTÉ.)

1902.

(1901, p. 47.)

Si, par une génératrice quelconque de l'un des quatre cônes du second degré qui passent par une biquadratique, on mène les plans tangents à cette courbe, les quatre points de contact sont dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1904.

(1901, p. 47.)

Si l'on considère quatre plans osculateurs à une biquadratique en quatre points situés dans un même plan, leurs quatre autres points d'intersection avec la courbe sont aussi dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1906.

(1901, p. 48.)

Par un point d'une biquadratique, on peut mener neuf plans osculateurs à cette courbe (sans y comprendre le plan osculateur au point choisi); les neuf points d'osculation ainsi déterminés sont trois à trois situés dans trois plans passant par le point donné. (H. LÉAUTÉ.)

1907.

(1901, p. 48.)

Si, par l'une des génératrices d'une quadrique passant par une biquadratique, on mène les quatre plans tangents *à cette courbe, les quatre points de contact sont fixes, quelle que soit la génératrice choisie sur la quadrique considérée.* (H. LÉAUTÉ.)

SOLUTIONS

Par M. MAX GENTY, Lieutenant de vaisseau.

Ces questions concernent toutes des propriétés projectives d'une biquadratique gauche.

Or, on peut toujours, par une transformation homographique convenable, ramener les équations d'une telle courbe à la forme

$$f = \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi = k^2 x^2 + z^2 - 1 = 0$$

ou bien à la forme paramétrique

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad y = \operatorname{cn} u, \qquad z = \operatorname{dn} u,$$

u désignant un paramètre variable et les fonctions elliptiques sn, cn et dn étant construites avec le module k. Dans ce qui suit nous désignerons par 2ω et $2\omega'$ un couple de périodes primitives communes à ces trois fonctions.

Rappelons alors que la relation

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

dans laquelle m et m' sont deux entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs, exprime que les quatre points de la courbe définis par les valeurs u_1, u_2, u_3 et u_4 du paramètre sont dans un même plan.

Remarquons aussi que les sommets des quatre cônes du second degré passant par la biquadratique sont ici l'origine et les trois points à l'infini sur chacun des axes de coordonnées.

Cela posé, nous allons donner les solutions de certaines des questions proposées en nous servant de la représentation paramétrique précédente.

1901. Si les quatre points d'intersection de la courbe avec un plan viennent se confondre en un seul de paramètre u, le plan est surosculateur en ce point, et la relation (1) devient alors

$$4u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou

$$u = \frac{m}{2}\,\omega + \frac{m'}{2}\,\omega'.$$

Il suffit, pour avoir des points distincts, de donner à m et à m' les valeurs 0, 1, 2, 3 associées de toutes les manières possibles.

On trouve donc bien 16 points de surosculation, appelés *sommets de la courbe*. On voit immédiatement qu'ils sont situés à l'infini ou dans les plans de coordonnées, c'est-à-dire qu'ils sont les points d'intersection de la biquadratique avec les faces du tétraèdre déterminé par les sommets des quatre cônes du second degré qui passent par cette courbe.

1902. Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique, et menons par cette droite un plan qui soit tangent à la courbe en un point M de paramètre u. On a

$$2u + u_1 + u_2 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1 + u_2}{2} + m\omega + m'\omega'.$$

Il suffit, pour avoir des points distincts, de donner à chacun des entiers m et m' les valeurs 0 et 1 et, par suite, de considérer quatre valeurs de u, savoir :

$$-\frac{u_1 + u_2}{2}, \qquad -\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega,$$

$$-\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega', \qquad -\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega + \omega'.$$

Il y a donc bien quatre plans tangents à la biquadratique qui passent par la corde M_1M_2. La condition pour que les points de contact de ces quatre plans tangents soient dans un même plan s'écrit immédiatement sous la forme

$$(u_1 + u_2) = \frac{m}{2}\,\omega + \frac{m'}{2}\,\omega'.$$

Cette relation exprime, on le voit immédiatement en se reportant aux propriétés élémentaires des fonctions elliptiques, que la corde M_1M_2 passe par l'origine, ou bien qu'elle est parallèle à l'un des axes de coordonnées. La corde $M_1 M_2$ est dès lors une génératrice de l'un des quatre cônes du second degré qui passent par la biquadratique.

1904. Soient quatre points de la courbe M_1, M_2, M_3 et M_4 situés dans un même plan. La relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

est dès lors satisfaite par hypothèse. Menons les plans osculateurs à la biquadratique en ces quatre points et déterminons leurs quatre autres points d'intersection avec la courbe. Si v_1, v_2, v_3, v_4 sont les paramètres de ces points, on doit avoir

$$\begin{aligned}
3u_1 + v_1 &= 2m_1\omega + 2m'_1\omega',\\
3u_2 + v_2 &= 2m_2\omega + 2m'_2\omega',\\
3u_3 + v_3 &= 2m_3\omega + 2m'_3\omega',\\
3u_4 + v_4 &= 2m_4\omega + 2m'_4\omega'.
\end{aligned}$$

Si nous ajoutons ces relations, nous obtenons

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 2M\omega + 2M'\omega',$$

M et M' étant des nombres entiers.

Les quatre points N sont donc dans un même plan.

1906. Par un point M_1 de la biquadratique menons un plan tel que les trois autres points d'intersection avec la courbe soient confondus en un seul, M.

La relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$u_1 + 3u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1}{3} + 2\frac{m}{3}\omega + 2\frac{m'}{3}\omega'.$$

Il suffit de donner à m et à m' les valeurs 0, 1, 2 associées de toutes les manières possibles.

On trouve ainsi neuf points d'osculation dont les paramètres sont

$$\begin{matrix}
u_{0,0}, & u_{0,1}, & u_{0,2},\\
u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2},\\
u_{2,0}, & u_{2,2}, & u_{2,2}.
\end{matrix}$$

$u_{m,m'}$ désignant la valeur de u correspondant à un choix déterminé des entiers m et m'.

Ces points sont trois à trois dans des plans passant par le point donné M_1. Le plan passant par M_1 et par deux quelconques de ces points passe encore par un troisième; on a, par exemple,

$$u_1 - u_{0,0} + u_{1,2} + u_{2,1} = 2\omega + 2\omega'.$$

Ainsi, par un point d'une biquadratique on peut mener neuf plans osculateurs à cette courbe (sans y comprendre le plan osculateur au point choisi); les neuf points d'osculation ainsi déterminés sont trois à trois situés dans trois plans passant par le point donné.

Quand on projette la courbe, le point de vue étant en M_1, les traces de ces plans osculateurs deviennent les tangentes d'inflexion de la cubique plane, projection de la biquadratique. Sur les neuf plans osculateurs, il y en a donc seulement trois qui soient réels.

1907. Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique; il existe une quadrique S passant par la courbe gauche et admettant M_1M_2 comme génératrice rectiligne. Si l'on mène un plan par la corde M_1M_2 et si M'_1, M'_2 sont les deux nouveaux points d'intersection de la courbe par ce plan, la droite $M'_1M'_2$ est une génératrice de la surface S du second système, en appelant *premier système* celui auquel appartient la droite M_1M_2. En tenant compte de la relation qui exprime que les quatre points M_1, M_2, M'_1, M'_2 sont dans un même plan

$$u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

on voit qu'une génératrice d'un système déterminé de S rencontre la biquadratique en deux points dont les arguments ont une somme constante.

Ceci posé, les paramètres des points de contact des quatre plans tangents menés à la biquadratique par la corde M_1M_2 sont déterminés par la relation

$$2u - u_1 + u_2 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1 - u_2}{2} + m\omega + m'\omega'.$$

La somme $u_1 + u_2$ étant constante pour les génératrices du premier système de la quadrique S, on voit que les points de contact sont fixes et indépendants de la génératrice du premier choisie sur la quadrique considérée.

Cette propriété est d'ailleurs évidente géométriquement; car les points de contact cherchés ne sont autres que les points de contact de la biquadratique avec les génératrices du second système de la quadrique S qui lui sont tangentes.

Autres solutions de MM. G. Fontene et Frizac.