NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Application aux fonctions circulaires et aux fonctions elliptiques d'une méthode générale de détermination des fonctions dont on donne le groupe des substitutions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 448-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__448_1>

[D]

APPLICATION AUX FONCTIONS CIRCULAIRES ET AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE DÉTERMINATION DES FONCTIONS DONT ON DONNE LE GROUPE DES SUBSTITUTIONS;

PAR M. E. IAGGI.

Nous avons démontré (1) que les fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement celles-là, sont les intégrales de l'équation différentielle

$$(1)\quad 2\frac{F'''(x)}{F'(x)} - 3\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = 6\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - 3\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x),$$

(1) *Détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là* (*Nouvelles Annales*, août 1902, p. 368).

Φ et Ψ étant les fonctions déterminées par les formules

$$(2)\qquad \Phi(x) = e^{2\sum_i \int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} = \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx}.$$

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Psi(x) &= 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\left[\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2 \\ &= 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)}, \end{aligned} \right.$$

où les p_i sont les *périodes* du groupe

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et les quantités h_i, k_i, ..., des fonctions de x qui rendent convergentes les séries indiquées dans ces formules.

Ces fonctions $F(x)$ peuvent aussi être déterminées comme quotients de fonctions entières $\Theta(x)$, qui sont les fonctions à *multiplicateur* du groupe, et sont les intégrales de l'équation

$$(4)\qquad \Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0.$$

Le *multiplicateur* θ de ces fonctions Θ est donné, au signe près, par la formule

$$(5)\qquad \theta = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

où $s(x)$ est la substitution considérée du groupe.

La Note présente a pour but de faire l'application de notre théorie aux fonctions circulaires et aux fonctions elliptiques.

1. Considérons d'abord le groupe des substitutions de $\tan x$

$$s_n(x) = n\pi + x \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les périodes sont

$$p_n = n\pi.$$

La somme $\sum_n \frac{1}{p_n}$ est convergente si on l'écrit

$$\sum_n \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{-n}}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et se réduit à zéro. Il s'ensuit

$$\Phi(x) = e^{-2\sum \int \frac{dr}{p}} = \text{const.}$$

La somme $\sum \frac{1}{p_n^2}$ est convergente :

$$\sum_n \frac{1}{p_n^2} = \sum_n \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n'} \frac{1}{n'^2} = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n' = 1, 2, 3, \ldots).$$

On a donc

$$\Psi = \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 3\sum_n \frac{1}{p_n^2} = -1.$$

L'équation aux fonctions Θ est, par suite,

$$\Theta'' + \Theta = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\Theta = \lambda \sin x + \mu \cos x.$$

Les fonctions périodiques du groupe donné sont donc

$$F(x) = \frac{\lambda \sin x + \mu \cos x}{\gamma \sin x + \rho \cos x} = \frac{\lambda \operatorname{tang} x + \mu}{\gamma \operatorname{tang} x + \rho},$$

où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires.

Le multiplicateur θ des fonctions Θ est donné par la formule (5)

$$\theta(s, x) = \pm\sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}} = \pm 1,$$

et l'on voit d'autre part que, lorsque n est pair dans s_n, $\theta = +1$, et lorsque n est impair, $\theta = -1$.

2. Considérons maintenant le groupe des substitutions de la fonction $\sin x$

$$s_n(x) = 2n\pi + x \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$s_m(x) = (2m+1)\pi - x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les *périodes* sont

$$p_n = 2n\pi,$$
$$p_m = (2m+1)\pi - 2x.$$

La somme $\sum \frac{1}{p}$ se décompose en deux séries : l'une, $\sum \frac{1}{p_n}$, est nulle, ainsi qu'on le voit en associant deux à deux les termes égaux et de signes contraires $\frac{1}{p_n}$, $\frac{1}{p_{-n}}$; l'autre, $\sum \frac{1}{p_m}$, est convergente, pourvu que l'on associe deux à deux les termes dans lesquels $2m+1$ a des valeurs égales et de signes contraires.

Nous pouvons donc écrire, sous cette condition,

$$\Phi(x) = e^{-2\sum \int \frac{dx}{(2m+1)\pi - 2x}}$$
$$(2m+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x) = \lambda \prod \left[1 - \frac{x^2}{\left((2m'+1)\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] = \lambda \cos x$$
$$(2m'+1 = 1, 3, 5, \ldots),$$

où λ est une constante arbitraire.

D'autre part, $\sum \frac{1}{p^2}$ est convergente

$$\sum \frac{1}{p^2} = \sum_n \frac{1}{p_n^2} + \sum_m \frac{1}{p_m^2},$$

$$\sum_n \frac{1}{p_n^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n'} \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12}$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\; n' = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_m \frac{1}{p_m^2} = \sum_m \frac{1}{[(2m+1)\pi - 2x]^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\mathfrak{L}\cos x = \frac{1}{4\cos^2 x}.$$

On a donc

$$\Psi = \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 3\sum \frac{1}{p^2} = \frac{3}{4}\tan\!g^2 x - 3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4\cos^2 x}\right) = -1,$$

et, par suite,

$$\Phi'' - \Phi\Psi = 0.$$

On est averti, par cette identité (¹), que parmi les fonctions périodiques du groupe il y en a qui sont entières; mais poursuivons la recherche des fonctions Θ: l'équation en Θ est alors

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' = 0,$$

ou

$$\cos x\,\Theta'' + \sin x\,\Theta' = 0.$$

Son intégrale générale est

$$\Theta = \lambda \sin x + \mu,$$

et les fonctions périodiques du groupe sont données par la formule

$$F(x) = \frac{\lambda \sin x + \mu}{\nu \sin x + \rho},$$

où λ, μ, ν, ρ sont arbitraires; on voit que les fonctions Θ

(¹) *Loc. cit.*

sont elles-mêmes, ainsi que cela devait être (*loc. cit.*), les *fonctions périodiques entières du groupe*. Leur multiplicateur, qui est *un*, est d'ailleurs donné, au signe près, par la formule (5).

Sachant qu'il existe des fonctions entières du groupe, on peut, comme nous l'avons vu (*loc. cit.*), former directement ces fonctions par la formule suivante, sans passer par l'équation en Θ :

$$\mathrm{F}(x) = \int e^{-2\sum\int\frac{dx}{p}}\,dx = \int \Phi\,dx = \lambda \sin x + \mu.$$

Pour obtenir $\sum \frac{1}{p_m}$ sous forme de série convergente, nous avons rangé les termes $\frac{1}{p_m}$ dans un certain ordre; on peut remplacer cette somme par une série *absolument convergente* en introduisant certaines quantités h_m, comme l'indiquent les formules générales (2) et (3). Nous prendrons

$$h_m = \frac{1}{(2m+1)\pi},$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}
\Phi &= e^{2\sum_m \int\left(\frac{1}{(2m+1)\pi} - \frac{1}{(2m+1)\pi - 2x}\right)dx} \\
&= \lambda \prod_m \left(1 - \frac{x}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{x}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}}
\end{aligned}$$

$$(2m+1 = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots),$$

et, par suite, comme précédemment,

$$\Phi = \lambda \cos x.$$

Quant à la série $\sum \frac{1}{p^2}$, elle est absolument convergente. Nous sommes donc conduits ainsi aux mêmes fonctions Φ, Ψ et Θ que précédemment.

Le cas du groupe de la fonction $\cos x$ se traiterait de la même manière que le précédent; on peut d'ailleurs passer du cas de $\sin x$ au cas de $\cos x$ en changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$.

3. Considérons maintenant le cas des fonctions elliptiques. Soit d'abord le groupe des substitutions de la fonction $\wp u$

$$s = 2m\omega + 2n\omega' \pm u \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où ω et ω' sont des nombres quelconques dont le rapport est imaginaire.

Les périodes sont de deux sortes :

$$p_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega',$$
$$\pi_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega' - 2u.$$

La somme des inverses des périodes n'est pas une série absolument convergente. Notre formule générale de Φ nous donne

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \sum_i \left(2h_i - \frac{2}{p_i}\right) = \sum_{m,n} \left(2h_{m,n} - \frac{2}{p_{m,n}} - \frac{2}{\pi_{m,n}}\right).$$

Dans $\pi_{m,n}$ on peut annuler à la fois m et n, ce qu'on ne peut faire dans $p_{m,n}$; faisant donc sortir du signe $\sum$ le terme en $\pi_{m,n}$ dans lequel $m = n = 0$, nous écrirons

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left(2h_{m,n} - \frac{1}{m\omega + n\omega'} - \frac{1}{m\omega + n\omega' - u}\right),$$

où les quantités $2h_{m,n}$ doivent rendre convergente la série indiquée.

Nous prendrons

$$2h_{m,n} = \frac{2}{m\omega + n\omega'} - \frac{u}{m\omega + n\omega'},$$

et nous aurons, en intégrant,

$$\Phi = 2\lambda u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right) e^{\frac{u}{m\omega+n\omega'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(m\omega+n\omega')^2}},$$

où λ est une constante arbitraire.

Formons maintenant Ψ par notre formule générale

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right);$$

nous avons l'expression

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum_{m,n}{}' \left(k_{m,n} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega'-2u)^2}\right) - \frac{3}{4u^2},$$

où nous avons fait sortir du signe $\sum$ le terme $\frac{1}{4u^2}$ afin de ne conserver sous ce signe que des termes où m et n ne s'annulent pas à la fois. $k_{m,n}$ doit être tel que la série indiquée soit absolument convergente. Nous prendrons

$$k_{m,n} = \frac{2}{(2m\omega+2n\omega')^2},$$

et nous aurons

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(m\omega+n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega+n\omega'-u)^2}\right)\right] = \frac{3}{4}\frac{\Phi''}{\Phi},$$

et, par conséquent,

$$\Phi'' - \Phi\Psi = \frac{\Phi''}{4}.$$

Cette expression n'étant pas identiquement nulle, *il n'y a pas de fonctions entières du groupe* (¹). L'équa-

---

(¹) En examinant tous les cas possibles de substitutions de la forme $ma + nb + x$, $m\alpha + n\beta - x$, on reconnait que $\Phi'' - \Phi\Psi$ n'est jamais nulle, ce qui montre qu'il n'existe pas de fonction doublement périodique qui soit entière et constitue ainsi une nouvelle démonstration d'un théorème bien connu. Notre méthode permet aussi de voir qu'il n'existe pas de fonction qui n'ait *que* des substitutions de la forme $ma + nb + x$ et que toute fonction doublement périodique a des substitutions de la forme $ma + nb - x$.

tion aux fonctions à multiplicateur est

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + \frac{1}{4}\Phi''\Theta = 0.$$

La formule que nous avons trouvée pour Φ peut être transformée par des procédés trop connus pour qu'il soit utile d'y insister, et l'on arrive directement aux formules

$$\Phi = \lambda e^{\frac{2\eta}{\omega}u^2} \sin\frac{\pi}{\omega}u \prod_n \frac{1 - q^{2n}\cos\frac{2\pi}{\omega}u + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Phi = \lambda e^{\frac{2\eta}{\omega}u^2} \sin\frac{\pi}{\omega}u \prod_n \frac{\sin(n\tau - 2\nu)}{\sin n\tau\pi} e^{-2\nu\pi i} \prod_n \frac{\sin(n\tau + 2\nu)}{\sin n\tau\pi} e^{2\nu\pi i},$$

où

$$2\nu = \frac{u}{\omega}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad q = e^{\tau\pi i},$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6} - \sum_n \frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right),$$

et l'une quelconque des trois formules de Φ permet de démontrer que

$$\Phi(u + 2\omega) = e^{8\eta(u+\omega)}\,\Phi(u),$$
$$\Phi(u + 2\omega') = e^{8\eta'(u+\omega')}\,\Phi(u),$$

où

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi i}{2},$$

les signes $+$ et $-$ correspondant respectivement aux cas où $\operatorname{mod} q$ est inférieur ou supérieur à l'unité.

On en déduit

$$\Phi(2m\omega + 2n\omega' \pm u) = \pm e^{8(m\eta+n\eta')(m\omega+n\omega'\pm u)}\,\Phi(u).$$

Le multiplicateur des fonctions Θ du groupe est donc, au signe près,

$$\theta(s, u) = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(u)\,du}}$$

ou

$$\theta(2m\omega + 2n\omega' \pm u, u) = e^{(2m\eta+2n\eta')(2m\omega+2n\omega'\pm 2u)}.$$

Rappelons que, pour former l'équation en Θ, nous nous sommes servi dans une Note précédente (*loc. cit.*) de la relation

$$\Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2 = \mu\Phi,$$

où Θ_1 et Θ_2 sont deux fonctions Θ *quelconques* du groupe et μ une constante arbitraire.

Si nous remarquons maintenant que

$$\Phi = \lambda\sigma(2u),$$

et que, puisque

$$pu = e_\alpha + \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

les quatre fonctions $\sigma^2 u$, $\sigma^2_{\alpha,\beta,\gamma} u$ sont des fonctions à multiplicateur du groupe, la relation précédente, où l'on fait $\Theta_1 = \sigma^2 u$, $\Theta_2 = \sigma^2_\alpha u$, deviendra

$$\begin{aligned}\sigma^2 u \times 2\sigma u\,\sigma' u - \sigma^2 u \times 2\sigma_\alpha u\,\sigma'_\alpha u &= \lambda\mu\sigma(2u)\\ &= 2\lambda\mu\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,\end{aligned}$$

ou

$$\sigma_\alpha u\,\sigma' u - \sigma u\,\sigma'_\alpha u = \lambda\mu\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,$$

relation connue, où $\lambda\mu$ est un facteur constant. En particulier, si $\alpha = 3$, on a $\lambda\mu = 1$.

On peut vérifier de la manière suivante que les quatre fonctions $\sigma^2 u$, $\sigma^2_{\alpha,\beta,\gamma} u$ sont des solutions de l'équation en Θ.

On a

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = 2\frac{\sigma'(2u)}{\sigma(2u)} = 2\zeta(2u),$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 4\zeta'(2u) = 4\zeta^2(2u) - p(2u),$$

et l'équation prend la forme

$$(6) \qquad \frac{\Theta''}{\Theta} - 2\zeta(2u)\frac{\Theta'}{\Theta} + \zeta^2(2u) - p(2u) = 0.$$

Faisons d'abord $\Theta = \sigma^2 u$;

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = 2\frac{\sigma' u}{\sigma u} = 2\zeta u, \qquad \frac{\Theta''}{\Theta} = 4\zeta^2 u - 2p u.$$

Le premier membre prend la forme suivante :

$$[2\zeta u - \zeta(2u)]^2 - [2pu + p(2u)]$$

et l'on peut vérifier directement que cette expression est nulle : il s'ensuit que $\sigma^2 u$ est une solution. Pour vérifier que $\sigma_\alpha^2 u$ est aussi une solution, mettons l'identité précédente sous la forme

$$[2\zeta u - \zeta(2u)]^2 - [p(2u) - 2\zeta' u] = 0$$

et remarquons, en nous reportant à l'équation en Θ (6), que si l'on fait $\Theta = \sigma_\alpha^2 u$, le premier membre de cette équation en Θ n'est autre que celui de l'identité précédente, où l'on remplace ζu, $\zeta' u$ par $\zeta_\alpha u$, $\zeta'_\alpha u$ sans changer $\zeta(2u)$ ni $p(2u)$. Or, si dans l'identité précédente on change u en $u + \omega_\alpha$, on trouve facilement

$$[2\zeta_\alpha u - \zeta(2u)]^2 - [p(2u) - 2\zeta'_\alpha u] = 0.$$

Il s'ensuit que $\sigma_\alpha^2 u$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ est aussi une solution de l'équation en Θ (6).

L'équation en Θ est suffisante pour déterminer les fonctions périodiques du groupe

$$F(u) = \frac{\lambda p u + \mu}{\gamma p u + \rho},$$

en sorte que l'équation (1) aux fonctions $F(u)$ n'est pas utile dans ce cas particulier. Elle donne lieu cependant à une autre vérification intéressante : si l'on y remplace Ψ par sa valeur $\frac{3}{4}\frac{\Phi''}{\Phi}$, cette équation devient

$$(7) \qquad 2\frac{F'''}{F'} - 3\frac{F''^2}{F'^2} = 6\frac{\Phi''}{\Phi} - 3\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 4\Psi = 3\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\Phi'^2}{\Phi^2}\right).$$

Or $\Phi(u) = \lambda\sigma(2u)$ et pu est l'une des fonctions $F(u)$; donc

$$2\frac{p'''u}{p'u} - 3\frac{p''^2 u}{p'^2 u} = 3\frac{d^2}{du^2}\mathcal{L}\Phi(u) = 12\frac{d^2}{(d.2u)^2}\sigma(2u) = -12\,p(2u).$$

On obtient ainsi l'expression de $p(2u)$ en fonction de $p'u$, $p''u$, $p'''u$; si l'on remplace ces dérivées par leurs valeurs en pu, on obtient la formule connue :

$$(8) \qquad p(2u) = \frac{\left(p^2 u + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3\,pu}{4p^3 u - g_2\,pu - g_3}.$$

Au sujet de l'équation (1) aux fonctions périodiques $F(x)$ d'un groupe quelconque donné, on peut faire une remarque qui peut être d'une grande utilité pour les fonctions elliptiques :

Si l'on pose

$$\chi(x) = 6\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} - 3\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x),$$

on voit que les solutions $s(x)$ de l'équation

$$\chi(x) = \chi(s)\,s'^2 + 2\frac{s'''}{s'} - 3\frac{s''^2}{s'^2}$$

sont toutes les substitutions (et seulement celles-là) qui laissent invariable l'ensemble des solutions $F(x)$ de l'équation (1), c'est-à-dire qui transforment l'une des fonctions $F(x)$ en une fonction linéaire de $F(x)$

$$\frac{\lambda F(x) + \mu}{\nu F(x) + \rho}$$

ou laissent $F(x)$ invariable [1].

---

[1] Il résulte également de là que la fonction de t obtenue en posant $pu = t$ dans l'expression (8) de $\chi(u)$, et qui est rationnelle et du quatrième degré en t, admet *trois* substitutions *linéaires* en t et n'en admet pas d'autres.

Dans le cas du groupe considéré, $x = u$, l'une des fonctions F est pu et χ n'est autre que $-12p(2u)$; il s'ensuit que *toute substitution $s(u)$ qui transforme pu en une fonction linéaire de pu est une solution de l'équation en s*

$$12p(2u) = 12p(2s)s'^2 - 2\frac{s'''}{s'} + 3\frac{s''^2}{s'^2}.$$

Parmi ces solutions sont les substitutions du groupe donné; l'intégrale générale contient trois constantes arbitraires qui ne sont autres que les trois constantes arbitraires de la fonction linéaire de pu, solution générale de l'équation (7).

4. Considérons maintenant le groupe de substitutions

$$\begin{matrix} 4m\omega + 2n\omega' + x \\ 2(2m+1)\omega + 2n\omega' - x \end{matrix} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

qui est celui de la fonction

$$F(x) = \mathrm{sn}(gx \mid g\omega, g\omega')$$

dans l'hypothèse où la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive, et où $g\omega$, $g\omega'$ sont les intégrales *complètes*

$$g\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$g\omega' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Les périodes du groupe sont

$$p_{m,n} = 4m\omega + 2n\omega',$$
$$\pi_{m,n} = 2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x.$$

La somme des inverses des périodes n'est pas une série absolument convergente. On peut former une série absolument convergente

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)$$

par l'introduction de quantités h_i convenablement choisies ; mais on peut aussi rendre convergente cette somme en rangeant ses termes dans un ordre convenable. Écrivons

$$\sum_i \frac{1}{p_i} = \sum_{m,n} \frac{1}{p_{m,n}} + \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}}$$

et associons deux à deux les périodes $p_{m,n}$ qui sont égales et de signes contraires, et quatre à quatre les périodes $\pi_{m,n}$ dans lesquelles $2m+1$ et n ont des valeurs respectivement égales et de signes contraires ; la première série du second membre est alors nulle identiquement, et l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{1}{p_i} &= \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}} \\
&= \sum_{m,n} \left(\frac{1}{2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x} - \frac{1}{2(2m+1)\omega + 2n\omega' + 2x} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2(2m+1)\omega - 2n\omega' - 2x} - \frac{1}{2(2m+1)\omega - 2n\omega' + 2x} \right) \\
&\qquad (m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}$$

Si l'on fait croître à l'infini m d'abord, et ensuite n, la série du second membre est convergente, et il en est de même du produit doublement infini qu'on en tire pour Φ :

$$\begin{aligned}
\Phi &= e^{-2\sum_i \int \frac{dx}{p_i}} \\
&= \lambda \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(2m+1)\omega + n\omega'}\right)\left(1 + \frac{x}{(2m-1)\omega + n\omega'}\right) \\
&\qquad \times \left(1 - \frac{x}{(2m-1)\omega - n\omega'}\right)\left(1 + \frac{x}{(2m+1)\omega - n\omega'}\right).
\end{aligned}$$

Par une méthode de calcul bien connue, Φ se met sous la forme

$$\Phi = \lambda \cos\frac{\pi}{2\omega}x \prod_n \frac{1 + 2q^n \cos\frac{\pi}{\omega}x + q^{2n}}{(1+q^n)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Formons la fonction Ψ. On a

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

La somme

$$\sum_i \frac{1}{p_i^2} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{p_{m,n}^2} + \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}^2}$$

n'est pas absolument convergente, mais on peut la rendre convergente en rangeant ses termes dans l'ordre qui a été adopté précédemment pour former Φ.

On a ainsi

$$\sum{}' \frac{1}{p_{m,n}^2} = \sum{}' \frac{1}{(4m\omega + 2n\omega')^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum{}' \frac{1}{(2m\omega + n\omega')^2} = \frac{\pi^2}{8\omega^2}\left(\frac{1}{6} - \sum_n \frac{4q^n}{(1-q^n)^2}\right).$$

Nous désignerons par $\frac{c}{4}$ cette constante qui, par les notations de Weierstrass, s'écrirait

$$\frac{c}{4} = \frac{\zeta(2\omega \mid 2\omega, \omega')}{2\omega} = \frac{\zeta\left(\omega \mid \omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{4\omega} = \frac{2\eta_1 + e_3\omega}{4\omega}.$$

On a, d'autre part, en associant, comme nous l'avons dit, les périodes $\pi_{m,n}$,

$$\sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}^2} = \sum_{m,n} \frac{1}{[2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x]^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\Phi = \frac{1}{4}\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\Phi'^2}{\Phi^2}\right),$$

et, par conséquent, en annulant les quantités k_i,

$$\Psi = \frac{3}{4}\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - c\right)$$

et

$$\Phi'' - \Phi\Psi = \frac{1}{4}(\Phi'' + 3c\Phi).$$

L'équation en Θ est donc

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + \frac{1}{4}(\Phi'' + 3c\Phi)\Theta = 0,$$

où Φ est donnée par la formule trouvée précédemment. On reconnaît facilement que Φ est, à un facteur constant près, le produit des deux fonctions $H(gx)$ et $\Theta(gx)$ de Jacobi.

On peut vérifier que les fonctions $H(gx)$ et $\Theta(gx)$ sont des solutions de l'équation précédente.

D'autre part, nous servant d'une relation générale entre Φ et deux quelconques des fonctions à multiplicateur du groupe, que nous avons rappelée à propos de pu, nous pouvons écrire

$$\Theta(gx)\,H'(gx) - H(gx)\,\Theta'(gx) = A\,H_1(gx)\,\Theta_1(gx),$$

où A est un facteur constant; on sait d'ailleurs que $A = gk'$.

La formule (5) donne au signe près le multiplicateur connu des fonctions de Jacobi.

Si l'on veut passer du cas de la fonction périodique

$$u = \mathrm{sn}(gx \mid g\omega, g\omega')$$

au cas de la fonction v, dont nous avons démontré la corrélation avec u dans une Note précédente,

$$v = \mathrm{sn}[g(x+\omega) \mid g\omega, g\omega'],$$

dont les substitutions sont

$$4m\omega + 2n\omega' \pm x,$$

on n'aura qu'à changer x en $x+\omega$ dans l'équation précédente en Θ : la fonction Φ sera alors le produit des deux fonctions $\mathrm{H}(gx)$, $\Theta(gx)$. et l'intégrale générale sera

$$\lambda\,\mathrm{H}_1(gx)+\mu\,\Theta_1(gx).$$

Quant à la constante c, elle reste la même.

5. On pourrait obtenir les mêmes fonctions Φ et les équations des deux cas précédents par des produits absolument convergents, en introduisant certaines quantités h_i et k_i convenablement choisies; on aurait ainsi, dans le cas de la fonction ν,

$$\Phi=\lambda e^{-\frac{\eta}{\omega}x^2}x\prod{}'\left(1-\frac{x}{w'}\right)e^{\frac{x}{w'}+\frac{x^2}{2w'^2}}=\mu\,\mathrm{H}(gx)\,\Theta(gx)$$
$$(w'=2m\omega+n\omega';\ m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

où λ et μ sont des constantes dont l'une est arbitraire.

On peut obtenir aussi les fonctions de Weierstrass σu, $\sigma_\alpha u$, en choisissant convenablement les quantités h_i, k_i. Les équations aux fonctions Θ relatives aux deux cas indiqués sont alors de la forme

$$\Phi\Theta''-\Phi'\Theta'+\frac{1}{4}(\Phi''+3e_3\Phi)\Theta=0.$$

Dans le premier cas, on a

$$\Phi=\lambda\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u$$

et l'intégrale générale de l'équation précédente est

$$\Theta=\lambda\,\sigma u+\mu\,\sigma_3 u.$$

Dans le second cas, on a

$$\Phi=\lambda\,\sigma u\,\sigma_3 u$$

et l'intégrale générale est

$$\Theta=\lambda\,\sigma_1 u+\mu\,\sigma_2 u$$

On peut d'ailleurs passer des équations relatives aux fonctions de Jacobi aux équations relatives aux fonctions de Weierstrass en changeant Φ en

$$\Phi e^{\frac{\eta}{\omega} u^2}$$

et Θ en

$$\Theta e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2}.$$

On peut aussi passer du cas du groupe de la fonction pu au cas du groupe de substitutions

$$4m\omega + 2n\omega' \pm x$$

par le changement de ω en 2ω.

Nous n'insistons pas davantage, dans cette Note, sur les applications de notre théorie générale aux fonctions elliptiques, applications qui ne sont pas destinées à donner de résultats nouveaux, mais sont propres à montrer comment cette théorie générale peut être appliquée; comment, en particulier, elle aurait pu *conduire* aux fonctions de Jacobi et aux fonctions de Weierstrass si ces fonctions n'étaient déjà connues, et, par conséquent, comment, dans d'autres cas, elle conduira à la détermination de fonctions dont on donne le groupe des substitutions.