NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 422-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__422_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Démontrer qu'une fonction elliptique* $f(u)$ *aux périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$ *peut être exprimée :*

1° *Par un quotient de fonctions* σ;
2° *Par la fonction* ζ *et ses dérivées;*
3° *Par les fonctions* $\wp u$ *et* $\wp' u$.

Les fonctions σ, ζ *et* $\wp$ *se rapportant au couple de périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$.

II. *On considère deux fonctions de* x, u *et* v, *définies par les équations*

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-z} \sin zx}{\sqrt{z}}\, dz,$$

$$v = \int_0^\infty \frac{e^{-z} \cos zx}{\sqrt{z}}\, dz.$$

1° *Faire voir qu'elles satisfont à deux équations différentielles du premier ordre, linéaires, sans second membre.*

2° *Intégrer ce système d'équations linéaires et en déduire les valeurs de deux intégrales définies u et v.*

(Lille, juillet 1901.)

SOLUTION.

On a

$$x\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{1}{2}u=0,$$

$$\frac{du}{dx}-x\frac{dv}{dx}-\frac{1}{2}v=0.$$

On peut en déduire une équation en v par l'élimination de u. Mais il est préférable de traiter le système par le procédé de d'Alembert. Enfin, si l'on pose $u=\lambda v$, on obtient

$$(\lambda x+1)\frac{dv}{dx}+v\left(\lambda' x+\frac{1}{2}\lambda\right)=0,$$

$$(\lambda-x)\frac{dv}{dx}+v\left(\lambda'-\frac{1}{2}\right)=0;$$

d'où

$$\frac{2\lambda'}{1+\lambda^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

équation qui s'intègre immédiatement. Comme pour $x=0$, on a

$$u=0,\qquad \lambda=0$$

et

$$v=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

on posera

$$x=\operatorname{tang} t,$$

et l'on aura :

$$u=\rho\sin\frac{t}{2},$$

$$v=\rho\cos\frac{t}{2},$$

ρ étant défini par l'une des équations du système. L'intégration s'achève sans difficulté. On a enfin :

$$u = \mathrm{A}\sin\frac{t}{2}\sqrt{\cos t}, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{A} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$v = \mathrm{A}\cos\frac{t}{2}\sqrt{\cos t}, \qquad \text{»} \qquad t = \operatorname{arc\,tang} x.$$

I. *Contact de deux courbes dans l'espace; cercle osculateur d'une courbe gauche.*

II. *On considère l'équation différentielle*

$$(1) \qquad 4y^2y''' - 18yy'y'' + 15y'^3 = 0,$$

dont le premier membre est, à un facteur près $\varphi(y)$, *la dérivée troisième d'une certaine fonction* $f(y)$.

1° *Déterminer la fonction* $f(y)$ *et en déduire l'intégrale générale de l'équation* (1);

2° *Intégrer directement l'équation* (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{(x^2+4)^2}\,dx,$$

où le signe log *désigne un logarithme népérien.*

Après avoir donné l'expression de l'intégrale demandée, on en calculera la valeur numérique avec trois décimales.

(Toulouse, juillet 1901.)

I. *Condition pour que les droites* $X = AZ + P$, $Y = BZ + Q$ *aient une enveloppe. Équation différentielle des lignes de courbure.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la courbe* (Γ) *définie par les formules*

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin t\cos t, \\ z = \cos^2 t, \end{cases}$$

où t *désigne un angle variable.*

1° *Montrer que la courbe* (Γ) *est tout entière située sur une sphère* (S) *ayant pour centre l'origine et qu'elle se projette suivant un cercle sur le plan* yOz.

2° *La droite polaire d'un point quelconque de* (Γ) *passe par le point* O : *soit* P *l'un des deux points où la droite polaire du point* M *rencontre la sphère* (S) *et* V *l'angle des rayons* OM *et* OP. *Vérifier que, si l'on pose*

$$u = \sin t,$$

on a

$$\cos V = \frac{u(u^2-3)}{\sqrt{8-3u^2}}, \qquad \sin V = \sqrt{\frac{(2-u^2)^3}{8-3u^2}}.$$

Calculer, pour un point quelconque de (Γ), *les coordonnées du centre de courbure, le rayon de courbure, le rayon de torsion.*

3° *La courbe, lieu du point* P, *est la* COURBE DE TORSION *relative à la courbe* (Γ). *Montrer que, si l'on désigne par* s *et* τ *les arcs décrits sur la sphère* (S) *par les points* M *et* P, *on a toujours*

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds},$$

et que, par suite, la différence $V-\tau$ *reste constante quand le point* M *décrit la courbe* (Γ).

Solution.

1° La courbe (Γ) est tout entière située sur la sphère et sur le cylindre définis par les équations

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad y^2+z^2=z;$$

c'est le contour d'une *fenêtre de Viviani.*

Il y a un point double au point $x=0$, $y=0$, $z=1$; le cône ayant pour sommet ce point et pour directrice la courbe (Γ) est de révolution autour d'un axe parallèle à Ox; l'égalité

$$\frac{z-1}{y} = -\tang t$$

donne l'interprétation géométrique du paramètre t.

2° La courbe (Γ) étant tracée sur une sphère de centre O, le plan normal, et par suite la droite polaire, passent constamment par le point O. On a aisément les cosinus directeurs de cette droite polaire OP; on en déduit les valeurs de $\cos V$ et de $\sin V$. Si C est la trace de la droite polaire sur le plan osculateur, C est le centre de courbure de la courbe au point M; ses coordonnées se calculent en remarquant que

$$OC = \cos V.$$

Le rayon de courbure $MC = \sin V$; on a une vérification en se servant de la formule connue

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{s'^3} \qquad (A = y'z'' - z'y'',\ B = \ldots).$$

On trouve pour le rayon de torsion T

$$\frac{1}{T} = \frac{6\cos t}{8 - 3\sin^2 t}.$$

3° Comme on connaît $\cos V$ et $\sin V$ en fonction de t, pour avoir $\frac{dV}{dt}$ il suffit de différentier les deux membres de la formule qui donne $\cos V$; on en déduit

$$\frac{dV}{ds} = \frac{6\cos t}{8 - 3\sin^2 t} = \frac{1}{T}.$$

Or la courbe lieu du point P est la *courbe de torsion* relative à la courbe (Γ); il en résulte

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds} \qquad (V - \tau = \text{const.}).$$

Ce résultat est évident géométriquement, si l'on remarque que le point P est le point où le grand cercle normal en M à la courbe (Γ) touche son enveloppe, de sorte que le lieu de P est la développée sphérique de (Γ).

Remarque. — La condition pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe (Γ) soient dans un même plan est

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 1,$$

en posant

$$\lambda = \operatorname{tang}\left(\frac{t}{2}\right)$$

et en désignant par λ_1. λ_2, λ_3, λ_4 les valeurs de λ qui correspondent aux quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

III. *L'hyperbole équilatère* $xy = 1$ *et les droites* $x = \alpha$, $y = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *déterminent un triangle mixtiligne; calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) dy$$

étendue à l'arc d'hyperbole formant l'un des côtés du triangle; calculer ensuite, en la transformant en intégrale double, la même intégrale étendue au contour entier du triangle parcouru dans le sens direct.

Épreuve pratique. — *Sur la parabole représentée, en axes rectangulaires* Ox, Oy, *par l'équation* $y^2 = 4x$, *on considère les points* A_1, A_2, ..., A_n, ..., *dont les abscisses sont* $1, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}, \ldots$; *calculer avec deux chiffres décimaux exacts la somme des cordes*

$$OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n + \ldots.$$

On fait tourner autour de la corde A_1B_1 *de la parabole, tracée perpendiculairement à* Ox *par le point d'abscisse* 1, *le segment de la parabole compris entre cette corde et le sommet; calculer le moment d'inertie par rapport à son axe* A_1B_1 *du volume de révolution ainsi engendré; la densité est supposée constante et égale à l'unité.*

(Nancy, juillet 1901.)