Nouvelles annales de mathématiques

Mannheim

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 337-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__337_0>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

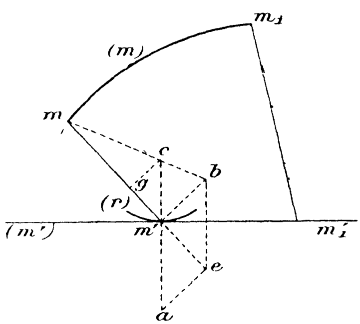
PAR M. MANNHEIM.

A la suite d'un Travail de M. Piccioli, inséré à la page 177 du présent Volume, M. Duporcq a publié une Note dans laquelle il s'occupe d'un problème qu'il énonce ainsi :

Trouver les courbes planes telles que leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

A propos de ces courbes (*fig.* 1), que je désignerai

Fig. 1.



par (m), je viens présenter quelques remarques géométriques.

1. *Construction du centre de courbure d'une courbe* (m). — D'après la définition de (m), on a

$$\text{arc}\, mm_1 = \lambda . m'm'_1,$$

d'où, en employant ma notation habituelle,

$$d(m) = \lambda . d(m').$$

Appelons e le centre de courbure de (m) pour le point m.

Une formule connue (¹) donne, pour un déplacement infiniment petit de m sur (m),

$$\frac{d(m)}{d(m')} = \frac{me}{m'a}.$$

Ce dernier rapport est alors égal à λ et va nous permettre de construire e.

Sur la perpendiculaire $m'c$ à la droite fixe, prenons le point c de façon que $\frac{mm'}{m'c} = \lambda$; il suffit alors de mener la droite mc jusqu'à sa rencontre b avec la perpendiculaire $m'b$ à mm', et d'abaisser de ce point b la perpendiculaire be sur la droite fixe; cette droite coupe mm' au point demandé e.

En effet, si l'on élève la perpendiculaire ea, qui coupe $m'c$ au point a, on a

$$\frac{me}{m'a \text{ ou } bc} = \frac{mm'}{m'c} = \lambda.$$

2. *Génération cycloïdale d'une courbe* (m). — Il résulte de cette construction du centre de courbure e que, *si une courbe* (r) *est telle que, pour un quelconque de ses points* m', *le rapport de son rayon vecteur* mm' *à son rayon de courbure* $m'c$ *est égal à* λ, *cette courbe, en roulant sur la droite fixe, fait décrire la courbe* (m) *au point* m *entraîné.*

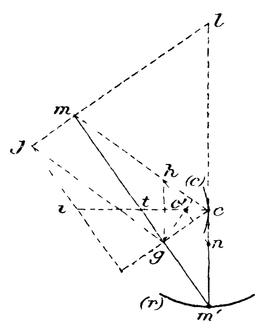
(¹) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. [illegible]

En faisant usage d'un théorème connu ([1]), on a cette propriété :

Les arcs de la courbe (r) sont proportionnels aux arcs correspondants de sa podaire relative au point m.

3. *Construction du centre de courbure c' de la développée d'une courbe (r).* — Soit (r) (*fig.* 2) une

Fig. 2.



courbe telle que $\dfrac{mm'}{m'c} = \lambda$, quelle que soit la position de m' sur cette courbe.

Pour un déplacement angulaire $d\varphi$ de mm' autour de m, on a

$$d(r) = lm'.d\varphi.$$

En appelant $d\omega$ l'angle de contingence de (r) en m', on a aussi

$$d(r) = m'c.d\omega,$$

donc

$$lm'.d\varphi = m'c.d\omega,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{m'c}{lm'}\,d\omega.$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 511.

D'autre part, puisque

$$mm' = \lambda . m'c,$$

on a

$$d.mm' = \lambda d.m'c,$$

c'est-à-dire [1]

$$ml.d\varphi = \lambda.cc'.d\omega,$$

en appelant c' le centre de courbure de la développée de (r).

Remplaçant $d\varphi$ par la valeur que nous venons de trouver et supprimant $d\omega$, il vient

$$\frac{ml}{lm'} m'c = \lambda.cc'$$

ou

$$\frac{gc}{cm} m'c = \lambda.cc',$$

et enfin

$$\frac{gc}{cc'} = \frac{mm'}{m'c}.$$

Il résulte de là que les triangles $mm'c$, gcc' sont semblables et que, par suite, *on obtient le point c' à la rencontre de la normale cc' à la développée de (r) et de la perpendiculaire abaissée de g sur mc.*

4. *Autre construction du centre de courbure c' de la développée de (r).* — Du point g menons gh parallèlement à $m'c$. Le point c' est alors l'orthocentre du triangle gch, et l'on obtient ce point c' par cette construction :

On mène gh parallèlement à $m'c$ et hc' parallè-

---

[1] *Loc. cit.*, p. 44 et suiv.

lement à mm' : cette dernière droite coupe ce au point c' [1].

5. *Construction de la normale à la courbe* (g) *lieu des points tels que* g. — Pour résoudre ce problème, déplaçons m' sur (r) et déformons le triangle $gm'c$. Nous ne connaissons pas l'enveloppe de cg; supposons que la normale à cette enveloppe, issue de son point de contact avec gc, coupe cc' au point i et ml au point j.

On a [2]

$$\frac{d(r)}{d(c)} = \frac{m'c}{cc'},$$

$$\frac{d(c)}{d(g)} = \frac{ci}{gj},$$

$$\frac{d(g)}{d(r)} = \frac{gj}{m'l}.$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$1 = \frac{m'c \cdot ci}{cc' \cdot m'l}.$$

Mais

$$\frac{m'c}{m'l} = \frac{m'g}{m'm} = \frac{ch}{cm} = \frac{cc'}{ct},$$

donc

$$ci = ct.$$

Il résulte de là que *la normale demandée est* gm et que *la courbe* (g), *lieu des points tels que* g, *est un cercle de centre* m.

6. *Génération directe de la développée* (c) *d'une courbe* (r). — Nous venons de trouver que cg est tan-

---

(1) Il est facile de construire le centre de courbure de la développée de (r).

(2) *Loc. cit.*, p. 49.

gente à un cercle, mais nous avons vu précédemment que le rapport de cette tangente à cc' est constant, on peut donc dire que *la développée d'une courbe* (r) *est telle que, pour ses points, les rayons de courbure sont proportionnels aux distances tangentielles de ces points à un cercle fixe.*

On peut remarquer qu'une courbe (r) et sa développée peuvent être définies de la même manière, avec cette différence que, pour la courbe (r), on a un cercle de rayon nul.

7. *Théorème relatif à une courbe* (r). — On a

$$\frac{mg}{mm'} = \frac{mh}{mc} = \frac{nm'}{cm'},$$

d'où

$$nm' = mg\frac{cm'}{mm'}.$$

Le segment mg étant constant, ainsi que le rapport $\frac{cm'}{mm'}$, on conclut que nm' est un segment de grandeur constante; donc,

Pour une courbe (r), *la parallèle au rayon vecteur* mm', *issue du centre de courbure* c' *de la développée de* (r), *rencontre le rayon de courbure* $m'c$ *en un point* n : *la distance* nm' *est de grandeur constante pour un point arbitraire de* (r), *et alors le lieu des points tels que* n *est une courbe parallèle à* (r).

8. *Théorème relatif à une courbe* (m). — Reprenons la figure 1; on a

$$\frac{mg}{mm'} = \frac{mc}{mb} = \frac{mm'}{mc},$$

d'où

$$\overline{mm'}^2 = mg \times mc$$

Mais nous avons démontré (5) que mg est un segment de longueur constante; donc,

Pour une courbe (m), les carrés des segments tels que mm', compris entre la courbe et la droite fixe, sont proportionnels aux rayons de courbure tels que mc.

C'est le théorème auquel est arrivé M. Duporcq et dont il disait ([1]) avec raison qu'il serait intéressant d'avoir une démonstration géométrique.

On peut remarquer que la démonstration que je viens d'indiquer est simplement une application de quelques-unes de mes formules.