NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1902)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 330-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__330_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1902).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés, dans un plan, un cercle fixe (ω) de centre O et un cercle fixe (γ) de centre C, d'un point P du cercle (γ) on mène les tangentes au cercle (ω) qui coupent le cercle (γ) en Q et R.

1° Trouver l'enveloppe des cercles circonscrits aux triangles PQC et PRC, ainsi que le lieu géométrique de leurs centres. lorsque le point P décrit le cercle (γ).

Distinguer sur l'enveloppe et le lieu les portions qui correspondent à des triangles réels.

2° Calculer, en fonction de l'angle $\widehat{OCP}$, les angles et les longueurs des côtés du triangle PQR.

Étudier la variation de la longueur du côté QR lorsque $\widehat{OCP}$ varie.

3° Des points Q et R on mène les deux tangentes au cercle (ω) autres que PQ et PR.

Trouver le lieu géométrique du point d'intersection M de ces deux tangentes, dans le cas particulier où le cercle (γ) passe par le centre O du cercle (ω).

Mathématiques spéciales.

Étant donnée la surface du second ordre S qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

on considère les deux coniques C et C′ d'intersection de cette surface par les plans xOy et xOz et une droite D située dans le plan yOz et passant par l'origine des coordonnées.

1° Trouver l'équation de tout plan P tel que, si M est l'un de ses points d'intersection avec la conique C, M′ l'un de ses points d'intersection avec la conique C′ et N son point d'intersection avec la droite D, les trois points M, M′ et N soient en ligne droite.

2° Trouver l'enveloppe des plans P.

3° Trouver le lieu Σ des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A de l'espace sur les plans P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, passant par A, qui coupent cette surface Σ suivant deux cercles.

Trouver l'enveloppe de ces plans Q et le lieu de la corde commune aux deux cercles.

4° Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, on considère une courbe C telle que la tangente MT et la normale MN menées à cette courbe en un point M forment avec l'axe Ox un triangle MNT dont l'aire reste constante (et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné a) lorsque M décrit C.

1° Exprimer les coordonnées x et y, par rapport à Ox et Oy, d'un point M de la courbe C en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M; construire la courbe.

2° Exprimer ensuite les coordonnées x et y considérées en fonction *uniforme* d'un paramètre u à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Calculer en fonction de u le rayon de courbure relatif au point M de la courbe C et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de u.

4° Démontrer que, si l'on désigne par M′ le centre de courbure de la courbe C relatif au point M et par P la projection de M sur Ox, l'aire du triangle $M'NP$ ne varie pas avec le point M ; indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.

5° Calculer en fonction de u la longueur de l'arc de la courbe C compris entre un point donné M_0 et le point M correspondant à la valeur u du paramètre.

6° Soit M un point de la courbe C correspondant à la valeur u du paramètre et situé du même côté de l'axe Ox qu'un point donné M_0 de cette courbe ; on suppose de plus que l'arc de la courbe C qui joint M_0 et M n'est pas rencontré, entre M_0 et M, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 limitées à l'axe Ox ; calculer en fonction de u l'aire dont le contour est formé par la portion PP_0 de l'axe Ox, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 et par l'arc de la courbe C joignant les points M_0 et M.

Mécanique rationnelle.

I. Un corps homogène pesant de révolution est suspendu par un point O de son axe : étudier son mouvement, sachant que l'axe est assujetti par une liaison sans frottement à rester dans un plan P passant par la verticale du point O et tournant autour de cette verticale avec une vitesse angulaire constante ω. Dans quelles conditions le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit-il à une rotation permanente autour de son axe ?

II. Un disque circulaire homogène, infiniment mince, de masse M et de rayon R, se meut, assujetti à rester dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy. A un certain moment, le centre du disque est en O ; la vitesse v de ce centre est dirigée suivant Ox, et la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son centre est ω. Au même instant, on rend immobile, par une liaison sans frottement, un point A du disque, défini par ses coordonnées polaires $OA = \rho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. Déterminer la percussion que subit le disque, le nouvel état des vitesses des points du disque après la percussion, et la variation de force vive qui se produit.