NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1902. Composition mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 313-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__313_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1902. COMPOSITION MATHÉMATIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On donne, relativement à un système de trois axes rectangulaires $Oxyz$, *un point* P, *de coordonnées* a, b, c, *et un cercle* [C] *défini par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \qquad z = 0.$$

1° *Former l'équation du lieu des projections orthogonales du point* P *sur les droites qui rencontrent à la fois le cercle* [C] *et l'axe* Oz. *Reconnaître que ce lieu se compose d'une sphère et d'une surface du quatrième degré* [S].

2° *Trouver les sections de la surface* [S] *par les plans contenant* Oz, *et le lieu des centres de ces sections.*

3° *Déterminer les limites entre lesquelles sont compris les plans parallèles à* xOy *qui coupent la surface* [S] *en des points réels. Trouver les sections de* *cette surface par le plan xOy et par le plan, parallèle à ce dernier, qui contient le point* P.

N. B. — Il sera tenu compte aux candidats des explications géométriques qu'ils pourront fournir des résultats trouvés par le calcul.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. Il est évident que toutes les droites passant par l'origine répondent à la question et que le lieu des projections du point P sur ces droites est la sphère Σ de diamètre OP.

Laissant de côté cette solution singulière, nous allons chercher le lieu des projections de P sur les droites rencontrant l'axe Oz et le cercle [C] en des points A et B *distincts*. Soient les points

$$(\mathrm{A}) \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$

$$(\mathrm{B}) \qquad x = \frac{2\mathrm{R}}{1+m^2}, \qquad y = \frac{2m\mathrm{R}}{1+m^2}, \qquad z = 0.$$

Les équations de la droite AB sont

$$\frac{x}{2\mathrm{R}} = \frac{y}{2m\mathrm{R}} = \frac{h-z}{h(1+m^2)}.$$

Celle du plan mené par P perpendiculairement à AB est

$$2\mathrm{R}(x-a) + 2m\mathrm{R}(y-b) - h(1+m^2)(z-c) = 0.$$

L'élimination de m et h entre ces trois équations donne celle du lieu cherché

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2-ax-by)(x^2+y^2-2\mathrm{R}x) \\ &\qquad\qquad - (x^2+y^2)z(z-c) = 0, \end{aligned} \right.$$

surface [S] du quatrième ordre évidemment fermée puisque l'ensemble des termes du degré le plus élevé $(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2)$ définit le cône isotrope de sommet O et les plans isotropes passant par Oz, mais admettant toutefois cet axe comme droite double.

L'équation (1) met, en outre, immédiatement en évidence que la surface [S] a pour plan de symétrie le plan $z = \frac{c}{2}$.

II. Si l'on coupe par le plan $y = mx$, on trouve, pour l'équation de la projection sur le plan Oxy, en outre de la solution $x^2 = 0$, déjà remarquée, l'ellipse

$$\begin{aligned}&(1 + m^2)^2 x^2 + (1 + m^2) z^2\\ &\quad - (1 + m^2)(a + bm + 2R)x\\ &\quad - (1 + m^2) c z + 2R(a + bm) = 0.\end{aligned}$$

Pour avoir l'équation de cette section dans son plan (désigné par OXz), il suffit de remplacer x par $\frac{X}{\sqrt{1 + m^2}}$, ce qui donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&(1 + m^2)(X^2 + z^2)\\ &\quad - \sqrt{1 + m^2}(a + bm + 2R)X\\ &\quad - (1 + m^2) c z + 2R(a + bm) = 0,\end{aligned}\right.$$

équation d'un cercle.

Revenant au premier système d'axes, on voit que le centre de ce cercle est défini par les équations

$$\begin{gathered}y = mx,\\ 2(1 + m^2)x - (a + bm + 2R) = 0,\\ 2z - c = 0.\end{gathered}$$

L'élimination de m entre ces équations donne, pour le lieu de ce point,

$$z = \frac{c}{2}, \qquad x^2 + y^2 - \left(\frac{a}{2} + R\right)x - \frac{b}{2}y = 0,$$

cercle du plan $z = \frac{c}{2}$, rencontrant Oz et ayant pour centre le milieu de la droite qui joint le centre C du cercle [C] au milieu D de la perpendiculaire abaissée de P sur Oz.

III. L'équation (1), où z reçoit une valeur particulière, représente la section de la surface par un plan parallèle à Oxy. C'est une quartique bicirculaire qui présente un point double sur Oz; elle deviendra imaginaire lorsque toute droite issue de ce point ne la rencontrera (en dehors du point double sur Oz devenant alors un point isolé) qu'en deux points imaginaires.

Les abscisses de ces deux points, situés sur la droite

$$y = mx,$$

sont données par l'équation

$$(3)\quad \begin{cases} (1 + m^2)^2 x^2 - (1 + m^2)(a - bm + 2R)x \\ \quad + (1 + m^2)z^2 - (1 + m^2)cz + 2R(a - bm) = 0. \end{cases}$$

Cette équation a ses racines imaginaires si

$$(4)\quad \begin{cases} [b^2 - 4z(z - c)]m^2 \\ \quad + 2(a - 2R)bm + (a - 2R)^2 - 4z(z - c) < 0. \end{cases}$$

Pour que cette inégalité ait lieu *quel que soit m*, il faut que le trinome en m ait ses racines imaginaires, c'est-à-dire que

$$(5)\qquad 4z(z - c)[(a - 2R)^2 - b^2 - 4z(z - c)] < 0$$

et que le coefficient du terme en m^2 soit négatif ou

$$(6)\qquad b^2 - 4z(z - c) < 0.$$

Ces deux inégalités se ramènent à une seule qui est

$$(7)\qquad (a - 2R)^2 + b^2 - 4z(z - c) < 0.$$

En effet, si elle a lieu, la précédente (6) a lieu *a fortiori*; elle entraîne d'ailleurs nécessairement

$$z(z - c) > 0,$$

et, par suite, l'inégalité (5). L'inégalité (7) peut d'ailleurs s'écrire

$$4z^2 - 4cz - [(a - 2R)^2 - b^2] > 0.$$

La section sera donc imaginaire lorsque z sera en dehors des racines de ce trinome, et, par suite, *réelle lorsque z sera compris entre ces racines,* ce qui donne

$$\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{(a-2\mathrm{R})^2+b^2+c^2}}{2} < z < \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{(a-2\mathrm{R})^2+b^2+c^2}}{2}.$$

Nous avons ainsi les z des plans limites dont on trouvera plus loin la détermination géométrique.

Quant aux sections de [S] par les plans $z=0$ et $z=c$, elles se confondent, d'après l'équation (1), avec les sections par les mêmes plans des cylindres

$$x^2+y^2-2\mathrm{R}x=0, \qquad x^2+y^2-ax-by=0,$$

parallèles à Oz et ayant pour sections droites : l'un, le cercle [C], l'autre, le cercle qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée de P sur Oz.

Il était d'ailleurs évident que la section parallèle à Oxy, qui est toujours une quartique bicirculaire, devait, en se décomposant, donner un système de deux cercles, et que les systèmes de cercles obtenus dans les plans $z=0$ et $z=c$ devaient être identiques en raison de la symétrie remarquée plus haut de la surface par rapport au plan $z=\frac{c}{2}$.

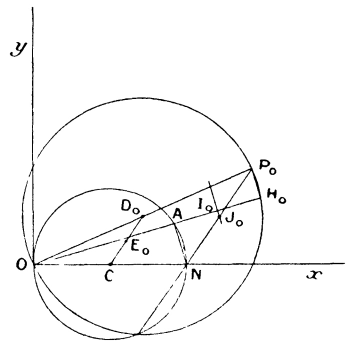
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. Pour déterminer l'ordre de la surface [S], remarquons d'abord que l'axe Oz est une droite double de cette surface, puisque, par chaque point B de cet axe passent deux droites (réelles ou imaginaires) perpendiculaires à PB et rencontrant le cercle [C].

Si maintenant nous coupons par un plan OAz contenant Oz, nous voyons que la section obtenue en dehors de cet axe est le lieu des projections de P sur les droites passant par le point A, où le plan considéré rencontre le cercle [C]. Ce lieu est le cercle qui a pour diamètre la distance du point A à la projection H du point P sur le plan OAz.

Toute section par un plan OAz comprenant une droite double et un cercle, *la surface* [S] *est du quatrième ordre*.

II. Nous venons de voir que les *sections de* [S] *par les plans* OAz *sont des cercles*. Cherchons le lieu des centres de ces cercles. Le centre I de l'un d'eux



est le milieu de AH. Or, le point H est situé dans le plan $z = c$. Le point I reste donc dans le plan $z = \frac{c}{2}$, et la courbe qu'il décrit se projette en vraie grandeur sur le plan Oxy (où nous représentons les projections des divers points par la même lettre avec l'indice o). Or le point I_0, étant la projection sur AH_0 du milieu J_0 de NP_0, décrit le cercle de diamètre OJ_0, c'est-à-dire celui qui, passant par O, a pour centre le milieu de la droite joignant le centre C au milieu D_0 de OP_0.

Ce cercle transporté parallèlement à Oz *de* $\frac{c}{2}$ (de façon que son centre vienne au milieu E de CD) *donne donc le lieu cherché du centre* I.

III. Toutes les sections circulaires, contenues dans les plans OAz, ayant leurs centres I dans le plan $z = \frac{c}{2}$, ce plan est de symétrie pour la surface [S], et les plans limites en seront à une distance égale au rayon de la plus grande de ces sections circulaires.

Or, le rayon IA de l'une d'elles est égal à la projection de la moitié JN de NP sur le plan OAz. Ce rayon sera donc maximum lorsque, le plan OAz devenant parallèle à NP, la projection se fera en vraie grandeur.

La distance des plans limites au plan $z = \frac{c}{2}$ *est donc égale au segment* JN *de l'espace.*

Autrement dit : *Un plan parallèle à* Oxy *donne à la fois une section réelle ou une section imaginaire* (abstraction faite du point isolé situé sur Oz) *dans la surface* [S] *et dans la sphère de diamètre* NP.

On voit en outre que la surface contient le cercle [C], sa projection [C_1] sur le plan $z = c$, le cercle [D] contenu dans ce plan et ayant pour diamètre la distance de P à Oz, et sa projection [D_0] sur Oxy.

On obtient, en effet, chacun d'eux selon que l'on prend, en chaque point A du cercle [C] :

1° La droite perpendiculaire à PA qui rencontre Oz;

2° La parallèle à Oz;

3° La droite passant par la projection H de P sur le plan OAz;

4° La droite OA.

Remarque complémentaire. — La surface [S] admet un quadruple mode de génération conforme à celui que définit l'énoncé. Il suffit d'associer à l'un quelconque des quatre cercles [C], [C_1], [D] et [D_0] le point diamétralement opposé à celui situé sur Oz dans celui des trois autres cercles qui n'est, avec le premier, ni dans un même plan, ni sur un même cylindre de révolution. On s'en convainc aisément en remarquant que les sections circulaires obtenues dans les plans passant par Oz sont les mêmes dans les quatre cas.