G. FONTENÉ

Interprétation par l'aire d'un secteur gauche de l'argument des fonctions $\frac{\sigma_i u}{\sigma u}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 27-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__27_1>

[F2h]

INTERPRÉTATION PAR L'AIRE D'UN SECTEUR GAUCHE DE L'ARGUMENT DES FONCTIONS $\frac{\sigma_i u}{\sigma u}$;

Par M. G. FONTENÉ.

Nous emploierons les notations du Traité d'Halphen, qui sont celles adoptées dans le Tableau publié par les *Nouvelles Annales*, sauf que l'on a conservé ω et ω' au lieu de ω_1 et ω_3; dans l'excellent Opuscule de M. Ch. Henry, les rôles des indices 1 et 3 sont intervertis, et l'on peut le regretter au point de vue de la tradition. Je rappelle que l'on a

$$\sigma_i u = \frac{e^{\eta_i u}\,\sigma(\omega_i - u)}{\sigma\omega_i} = \frac{e^{-\eta_i u}\,\sigma(\omega_i + u)}{\sigma\omega_i}.$$

Relativement aux fonctions dn, cn, sn, on a, avec

$$e_1 - e_3 = 1,$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u},$$

et les périodes de ces fonctions qui ne donnent pas lieu à des semi-périodes (quand on les regarde comme des fonctions doublement périodiques de seconde espèce) sont respectivement

$$2\omega_1, \quad 2\omega_2, \quad 2\omega_3,$$

les fonctions étant prises dans l'ordre dn, cn, sn. On a encore, avec $e_1 - e_3 = 1$ naturellement,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} &= i \ \operatorname{dn} v \\ \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} &= ki \operatorname{cn} v \qquad (u - \omega_3 = v). \\ \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} &= k \ \operatorname{sn} v \end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

$$e_1 - e_3 = 1, \qquad e_2 - e_3 = k^2, \qquad e_1 - e_2 = k'^2,$$

$$e_1 = \frac{1 + k'^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{k^2 - k'^2}{3}, \qquad e_3 = -\frac{1 + k^2}{3}.$$

Les formules relatives à l'homogénéité permettraient de ne pas faire l'hypothèse $e_1 - e_3 = 1$ pour les fonctions σ auxquelles on rattache dn, cn, sn (c'est le point de vue adopté par Halphen). On poserait alors

$$e_1 - e_3 = M^2, \qquad e_2 - e_3 = M^2 k^2, \qquad \ldots;$$

la quantité M est appelée *multiplicateur*. J'ai supposé $M = 1$, mais il peut y avoir avantage à ne pas faire cette hypothèse.

1. Une biquadratique gauche qui est l'intersection de deux quadriques ayant leurs axes suivant Ox, Oy, Oz est représentée par les équations

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \frac{y^2}{\beta^2} + e_2 = \frac{z^2}{\gamma^2} + e_3,$$

où nous supposerons, comme on peut le faire,

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0;$$

si l'on représente par (b^2, c'^2), (c^2, a'^2), (a^2, b'^2) les carrés des demi-axes des trois coniques qui sont les projections de la courbe sur les plans yOz, zOx, xOy, on a :

$$\begin{cases} b^2 = -\beta^2(e_2 - e_3), \\ c'^2 = \gamma^2(e_2 - e_3), \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 = -\gamma^2(e_3 - e_1), \\ a'^2 = \alpha^2(e_3 - e_1), \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = -\alpha^2(e_1 - e_2), \\ b'^2 = \beta^2(e_1 - e_2). \end{cases}$$

La représentation paramétrique de la courbe peut s'effectuer par les formules

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \frac{y^2}{\beta^2} + e_2 = \frac{z^2}{\gamma^2} + e_3 = \wp u,$$

la fonction $\wp u$ étant celle qui répond à l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3);$$

x, y, z sont des fonctions uniformes de u, et l'on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}, \quad \wp' u = -2\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{dx}{\alpha} = -\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma}du, \quad \frac{dy}{\beta} = -\frac{z}{\gamma}\frac{x}{\alpha}du, \quad \frac{dz}{\gamma} = -\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}du.$$

Si A est un point fixe de la courbe, M un point courant, on a pour la différentielle dS de l'aire conique AOM

$$
\begin{aligned}
4(dS)^2 &= (y\,dz - z\,dy)^2 + \ldots \\
&= \beta^2\gamma^2\left(\frac{y}{\beta}\,\frac{dz}{\gamma} - \frac{z}{\gamma}\,\frac{dy}{\beta}\right)^2 + \ldots \\
&= \left[\beta^2\gamma^2\left(\frac{z^2}{\gamma^2}\,\frac{x}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta^2}\,\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right](du)^2 \\
&= [\beta^2\gamma^2(e_2 - e_3)^2(\wp u - e_1) + \ldots](du)^2 \\
&= [b^2c'^2(\wp u - e_1) + \ldots](du)^2.
\end{aligned}
$$

Donc, *sous la condition*

$$
(1) \qquad b^2c'^2 + c^2a'^2 + a^2b'^2 = 0
$$

on aura

$$
(2) \qquad u - u_0 = \frac{2S}{\sqrt{-(e_1 b^2c'^2 + e_2 c^2a'^2 + e_3 a^2b'^2)}} = 2\bar{S},
$$

en désignant par $\bar{S}$ le rapport de l'aire S à celle que représente le radical.

1° *Avec $u_0 = 0$, l'aire est comptée depuis une direction asymptotique.* Comme on a

$$
\alpha^4 = \frac{a^2a'^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = a^2a'^2 e^{-2\eta_1\omega_1}\sigma^4(\omega_1),
$$

on peut écrire

$$
\alpha = \sqrt{aa'}\,e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\omega_1, \qquad \ldots,
$$

et les formules

$$
\frac{x}{\alpha} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} = \frac{e^{\eta_1 u}\sigma(\omega_1 - u)}{\sigma\omega_1\,\sigma u}, \qquad \ldots
$$

deviennent

$$
(3) \qquad \frac{x}{\sqrt{aa'}} = \frac{e^{\eta_1\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(\omega_1 - u)}{\sigma u}, \qquad \ldots \qquad (u = 2\bar{S}).
$$

2° *Avec $u_0 = \omega_3$, l'origine des aires est dans le plan $z = 0$.* Si l'on fait alors

$$e_1 - e_3 = 1,$$

on a d'abord

$$\begin{cases} b = \beta k i, \\ c' = \gamma k, \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \gamma, \\ a' = \alpha i, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \alpha k' i, \\ b' = \beta k'; \end{cases}$$

en gardant seulement a', b, c', la condition (1) peut s'écrire (en vue du cas de dégénérescence $e_2 = e_3$ ou $k = 0$)

$$(1') \qquad b^2 c'^2 + \frac{a'^2(c'^2 - k'^2 b^2)}{k^2} = 0,$$

et l'on a, en posant $u - \omega_3 = v$,

$$\frac{x}{\alpha} = i \operatorname{dn} v, \qquad \frac{y}{\beta} = k i \operatorname{cn} v, \qquad \frac{z}{\gamma} = k \operatorname{sn} v,$$

ou encore

$$(3') \qquad \frac{x}{a'} = \operatorname{dn} 2\overline{S}' \qquad \frac{y}{b} = \operatorname{cn} 2\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \operatorname{sn} 2\overline{S}',$$

l'origine des aires étant, comme on l'a dit, dans le plan $z = 0$.

2. Si la biquadratique dégénère en un système de deux coniques, on a par exemple $e_2 = e_3$, et l'on est dans un cas de dégénérescence pour pu, σu. *En outre,* ω_3 devenant infini et l'aire $\overline{S}'$ comptée depuis le plan $z = 0$ restant finie, *l'argument $u = \omega_3 + 2\overline{S}'$ prend ici des valeurs infiniment grandes lorsqu'on approche du cas limite,* et le début du calcul précédent devient illusoire; il faut imaginer que l'on a écrit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \ldots = pu = p(\omega_3 + v) = e_3 + k^2 \operatorname{sn}^2 v,$$

puis, que l'on a transposé e_3 et divisé par k^2 qui tend vers zéro; cela revient à dire que l'on doit partir des formules (3′) avec $u - \omega_3$ ou v au lieu de $2\,\overline{S}'$. Il y a là un fait général qui mériterait d'être signalé. D'après la condition (1′), on aura

$$v = 2\,\overline{S}'$$

si l'on a

$$a' = 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2 = c'^2$$

(β et γ sont infinis); dans le premier cas on a une conique double dans le plan $x = 0$, avec

$$\frac{x}{0} = 1, \qquad \frac{y}{b} - \cos 2\,\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \sin 2\,\overline{S}';$$

dans le second cas on a deux cercles dans les plans $x = \pm a'$.

Il est superflu de remarquer que, pour $e_1 = e_2$ par exemple, les formules exactes

$$\frac{x}{a'} = \cos 2\,\overline{S}', \qquad \frac{y}{b} = \cos 2\,\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \sin 2\,\overline{S}'$$

ne rentrent pas dans les formules (3′); ces dernières formules sont pour ce cas

$$\frac{x}{a'} = \frac{1}{\operatorname{Ch} u}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{1}{\operatorname{Ch} u}, \qquad \frac{z}{c'} = \operatorname{Th} u,$$

et l'on a d'ailleurs

$$2\,d\overline{S}' = \frac{-du}{\operatorname{Ch} u}, \qquad u = \log \text{nép.} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \overline{S}'\right);$$

on peut encore écrire, d'après une formule due à M. Laisant,

$$\operatorname{Th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\overline{S}'.$$

3. Si la biquadratique est sphérique, on a, en appelant R le rayon de la sphère,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0, \qquad R^2=-(e_1\alpha^2+e_2\beta^2+e_3\gamma^2);$$

or on a en général

$$4(dS)^2=(A\,pu+B)(du)^2,$$
$$A=\sum\alpha^2\sum e_1^2\alpha^2-\left(\sum e_1\alpha^2\right)^2,$$
$$B=e_1e_2e_3\left(\sum\alpha^2\right)^2-\sum e_1\alpha^2\sum e_2e_3\alpha^2.$$

et, dans le cas actuel,

$$4(dS)^2=\left(-R^4pu+R^2\sum e_2e_3\alpha^2\right)(du)^2.$$

La condition (1) est donc ici $R=0$, ce qui donne naturellement $dS=0$: *Le cas d'une biquadratique sphérique doit donc être écarté.*

Il y a toutefois exception pour le cas déjà rencontré d'une biquadratique formée de deux cercles; cette exception ne peut s'offrir qu'en remplaçant pu par $e_3+k^2\operatorname{sn}^2 v$, avec $v=u-\omega_3$; la condition (1) est alors $R^4k^2=0$, et l'on peut faire $k=0$.

Note. — On aurait pu remplacer la fonction pu par une fonction φu satisfaisant à l'équation différentielle

$$\varphi'^2u=4M^2(\varphi u-e'_1)(\varphi u-e'_2)(\varphi u-e'_3),$$

en remplaçant dès le début e par e' *sans supposer*

$$e'_1+e'_2+e'_3=0.$$

Cette fonction a un pôle double w, et les deux séries de valeurs de u qui correspondent à une même valeur de la fonction sont deux séries identiques lorsque la fonction doit avoir l'une des quatre valeurs

$$(\alpha) \qquad \infty, \quad e'_1, \quad e'_2, \quad e'_3 :$$

u est alors congru à l'une des valeurs doubles

$$(\beta) \qquad w, \quad w + \omega_1, \quad w + \omega_2, \quad w + \omega_3.$$

Il y a dégénérescence de φu lorsque deux des quatre quantités (α) sont égales, et, quand on doit supposer que l'un des e' devient infini, ou que le polynome du troisième degré en φu se réduit au second degré, on ne peut pas prendre pour φu une fonction $\wp u$; on peut prendre alors $\varphi u = \sin^2 u$. Cette remarque se lie à celle du n° 2.