Nouvelles annales de mathématiques

V. Hioux

Nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 254-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__254_0>

[K2c]

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. V. HIOUX.

En associant, au cercle inscrit dans un triangle ABC, un quelconque des trois cercles ex-inscrits, le théorème de Feuerbach peut être démontré comme il suit :

1° Soit S le point de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A et du côté BC; si du point S on mène la seconde tangente au cercle inscrit, elle sera parallèle à la tangente AT en A au cercle circonscrit.

En effet, dans l'angle ATB, à cause de

$$TB \times TC = \overline{TA}^2,$$

les droites AB et AC sont antiparallèles, d'où résulte l'égalité des angles TAS et AST, puisque chacun d'eux est égal à $\left(B + \frac{A}{2}\right)$.

Soit ST′ la seconde tangente au cercle O menée de S : elle est symétrique de la première ST par rapport à SA et l'on a

$$\widehat{T'SA} = \widehat{TAS}.$$

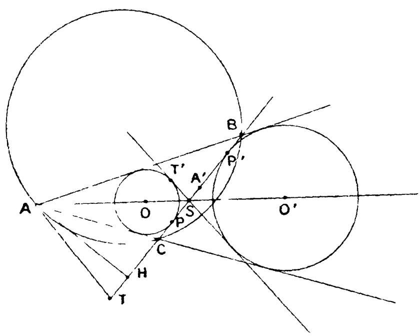
Les deux droites AT et ST′ font donc avec AS des angles alternes-internes égaux et sont donc parallèles.

2° Au cercle inscrit O associons le cercle O′, ex-inscrit dans l'angle A, et menons la perpendiculaire AH à BC.

Sur la droite AS les centres O et O′ et les centres de similitude A et S des cercles O et O′ forment une division harmonique; il en est par suite de même de leurs projections sur le côté BC. Ainsi P′, P, S et H forment une division harmonique. On voit que le milieu A′ de BC est aussi le milieu du segment PP′ et l'on a donc la relation

$$A'S \times A'H = \overline{A'P}^2.$$

Le cercle des neuf points du triangle ABC passe par A′ et par H. Si, par conséquent, en prenant A′ pour origine et $\overline{A'P}^2$ pour puissance d'inversion, on forme la figure inverse des cercles O et O′ et du cercle des



neuf points, les deux premiers se transforment en eux-mêmes, puisque A′P est tangente au premier et

$$A'P' = A'P,$$

tangente au second. Quant au cercle des neuf points, il a pour inverse une droite passant par S; cette droite est parallèle à la tangente en A′ à ce cercle. Mais cette tangente est parallèle à AT, puisque A et A′ sont les sommets homologues de deux triangles homothétiques.

La droite en question coïncide par conséquent avec la seconde tangente commune T′S aux cercles O et O′.

Donc le cercle des neuf points est tangent à chacun des cercles O et O′.

Les points de contact se déterminent facilement.