

GREENHILL

**Le pendule simple sans approximations**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1902), p. 241-247

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1902\\_4\\_2\\_\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__241_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

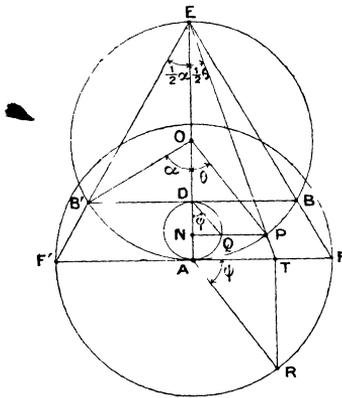
[R7f]

## LE PENDULE SIMPLE SANS APPROXIMATIONS;

PAR M. GREENHILL.

La théorie du pendule simple est demandée dans certains programmes de Dynamique élémentaire. La méthode suivante est présentée dans le but d'éviter les approximations, qui n'apportent pas toujours la conviction dans l'esprit de l'élève et qui sont ordinairement employées quand on se borne au cas des petites oscillations.

Soit  $P$  l'extrémité d'un pendule simple de longueur  $OP = l$ , oscillant entre  $B$  et  $B'$  sur l'arc  $BAB'$ ,  $2\alpha$  désignant l'amplitude des oscillations; au mouve-



ment du point  $P$  comparons celui du point  $Q$  qui se déplace, en restant à la même hauteur verticale, sur le cercle  $AQD$ .

Les composantes verticales des vitesses de  $P$  et de  $Q$

( 242 )

sont égales, c'est-à-dire que

$$(1) \quad (\text{vit. de Q}) \sin 2\varphi = (\text{vit. de P}) \sin \theta,$$

d'où

$$(2) \quad \left( \frac{\text{vit. de Q}}{\text{vit. de P}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 2\varphi} = \frac{\frac{NP^2}{\frac{1}{4}AE^2}}{\frac{NQ^2}{\frac{1}{4}AD^2}} = \frac{AD^2}{AE^2} \frac{AN \cdot NE}{AN \cdot ND} = \frac{AD^2}{AE^2} \frac{NE}{ND}.$$

A ces résultats géométriques joignons la formule dynamique

$$(3) \quad (\text{vit. de P})^2 = 2g \text{ ND},$$

de sorte que

$$(4) \quad (\text{vit. de Q})^2 = 2g \frac{AD^2}{AE^2} NE = \frac{g}{l} AD^2 \frac{NE}{AE} = \frac{g}{l} AD^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

$\theta$  étant l'inclinaison du fil sur la verticale.

$\cos \frac{1}{2} \theta$  variant entre un maximum 1 et un minimum  $\cos \frac{1}{2} \alpha$ , on a

$$(5) \quad \sqrt{\frac{g}{l}} AD > \text{vit. de Q} > \sqrt{\frac{g}{l}} AD \cos \frac{1}{2} \alpha,$$

Le point Q décrit la circonférence  $\pi AD$  du cercle AQD pendant que le point P oscille de B à B'; par suite

$$(6) \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}} < \text{durée de l'oscillation} < \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sec \frac{1}{2} \alpha.$$

Si  $\alpha$  est faible,  $\sec \frac{1}{2} \alpha$  est très voisin de l'unité, de sorte que la durée d'une petite oscillation est très voisine de  $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Dans le cas où la durée de l'oscillation est un peu plus grande, si on lui attribue comme valeur la moyenne géométrique des limites, on a

$$(7) \quad \text{durée de l'oscillation} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\sec \frac{1}{2} \alpha};$$

nous obtenons alors comme correction circulaire

$$(8) \quad \sqrt{\sec \frac{1}{2} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}} \approx 1 + \frac{1}{3} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

correction d'environ  $25 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$  pour 100 :

Angle d'oscillation..	$2\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Correction.....	} $\sec \frac{1}{2} \alpha$	1,0086	1,0196	1,0353
	} pour 100	0,43	$0,98 \approx 1$	$1,76 < 2$

Au lieu d'observer le mouvement du pendule dans son plan vertical, on le regarde en général latéralement, de manière à examiner ses déplacements latéraux. Pour cela, projetons stéréographiquement le point P du point E qui est le plus élevé sur le cercle BAB'; nous examinons ainsi le mouvement de son ombre T projetée sur la tangente horizontale AT par un point lumineux placé en E : elle oscille entre F et F'. Considérons alors le mouvement du point R du cercle horizontal FRF', qui accompagne T, de sorte que TR reste constamment perpendiculaire à AT (ce cercle horizontal est représenté sur la figure comme rabattu sur le plan vertical). On a

$$(9) \quad \frac{\text{vit. de T}}{\text{vit. de R}} = \frac{TR}{AR}, \quad \frac{\text{vit. de P}}{\text{vit. de T}} = \frac{EP}{ET},$$

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left( \frac{\text{vit. de P}}{\text{vit. de R}} \right)^2 = \frac{TR^2 EP^2}{AR^2 ET^2} \\ = \frac{EF^2 - ET^2}{AF^2} \frac{EP^2}{ET^2} \\ = \left( \frac{EF^2}{ET^2} - 1 \right) \frac{EP^2}{AF^2} \\ - \left( \frac{EP^2}{EB^2} - 1 \right) \frac{EP^2}{AF^2} \\ = \frac{EP^2 - EB^2}{AF^2} \frac{EP^2}{EB^2} \\ - \frac{AE \cdot ND}{AF^2} \frac{EF^2}{ET^2};$$

on a, comme tout à l'heure,

$$(3) \quad (\text{vit. de P})^2 = 2g \cdot ND,$$

de sorte que, en posant  $\frac{g}{l} = n^2$ ,

$$(11) \quad (\text{vit. de R})^2 = \frac{2g}{AE} \Delta F^2 \frac{ET^2}{EF^2} = n^2 \Delta F^2 \frac{\sec^2 \frac{1}{2} \theta}{\sec^2 \frac{1}{2} \alpha};$$

par suite, la vitesse de R reste comprise entre un maximum  $n\Delta F$ , et un minimum  $n\Delta F \cos \frac{1}{2} \alpha$ , et la période de la rotation de R sur la circonférence  $2\pi\Delta F$  reste comprise entre les limites

$$(12) \quad \frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n} \sec \frac{1}{2} \alpha,$$

d'où

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} < \text{période d'oscillation double} \\ < 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sec \frac{1}{2} \alpha, \end{array} \right.$$

comme tout à l'heure.

Si R était l'extrémité d'un pendule conique attaché en O, sa période serait

$$(14) \quad \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{OA}{g}},$$

et le pendule conique de période  $\frac{2\pi}{n} \sec \frac{1}{2} \alpha$  aurait une longueur

$$(15) \quad l \sec \frac{1}{2} \alpha = \frac{2l}{1 + \cos \alpha},$$

de sorte qu'il devrait être attaché au point O' tel que

$$(16) \quad OO' = l \tan^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Dans la méthode précédente, un mouvement oscillatoire a été remplacé par un mouvement continu sur un cercle, de sorte que sa vitesse varie dans un faible inter-

valle, et l'on en déduit une limite supérieure et inférieure de la périodicité.

Les fonctions elliptiques qui donnent les solutions exactes s'introduisent par les transformations précédentes.

En effet, dans le cercle AQD, on a, d'après (4),

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = n \cos \frac{1}{2} \theta & = n \sqrt{1 - \frac{AN}{AE}} \\ & = n \sqrt{1 - \frac{AD}{AE} \frac{AN}{AD}} = n \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} = n \Delta \varphi, \end{cases}$$

en posant

$$(18) \quad x^2 = \frac{AD}{AE} = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

de sorte que  $\frac{1}{2} \alpha$  est l'angle modulaire; par suite

$$(19) \quad nt + \varepsilon = \int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = F(\varphi, x),$$

dans la notation de Legendre, ou

$$(20) \quad \varphi = \text{am}(nt + \varepsilon, x),$$

dans la notation de Jacobi.

Dans la notation du Gudermann, en posant

$$(21) \quad \begin{cases} nt + \varepsilon = u, \\ \left\{ \begin{array}{ll} \cos \frac{1}{2} \theta = \text{dn } u, & \sin \frac{1}{2} \theta = x \text{ sn } u, \\ \text{AP} = \text{AB sn } u, & \text{EP} = \text{AE dn } u, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{cases}$$

La période T du pendule est donnée par

$$(22) \quad nT = \int_0^\Gamma \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = 4K, \quad T = 4k \sqrt{\frac{l}{g}};$$

de sorte que les limites (6) donnant

$$(23) \quad \frac{\pi}{2} < K < \frac{\pi}{2x'},$$

et, en prenant la moyenne géométrique des limites,

$$(24) \quad K \approx \frac{\pi}{2\sqrt{x'}}.$$

Cette formule est exacte à moins de 1 pour 100 ou de 3 pour 100 des angles modulaires ( $\frac{1}{2}x$ ) égaux à  $45^\circ$  ou  $60^\circ$ .

Dans le cercle FRF', en désignant par  $\psi$  l'angle EAR, on a, d'après (11)

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= n \frac{ET}{EF} = n \sqrt{1 - \frac{TR^2}{EF^2}} \\ &= n \sqrt{1 - \frac{AF^2}{EF^2} \sin^2 \psi} = n \Delta \psi. \end{aligned} \right.$$

Par suite

$$(26) \quad nt + \varepsilon' = F(\psi, x), \quad \psi = \text{am}(nt + \varepsilon', x).$$

$$(27) \quad AT = AE \tan \frac{\theta}{2} = AF \cos \psi,$$

$$(28) \quad \tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{x}{2} \text{cn } v, \quad v = nt - \varepsilon'.$$

Comme les arguments  $u = nt + \varepsilon$  et  $v = nt + \varepsilon'$  diffèrent de  $K$ , on peut employer les relations qui unissent les fonctions elliptiques dont la différence de phase est  $K$  :

$$(29) \quad \text{cn } v = \frac{k \text{sn } u}{\text{dn } u}, \quad \text{sn } v = \frac{\text{cn } u}{\text{dn } u}, \quad \dots$$

M. Appell a ainsi utilisé le mouvement du pendule pour mettre en évidence la double périodicité des fonctions elliptiques.

Supposons que la pesanteur soit tout à coup changée de sens quand P est en B (ce qui peut être réalisé dans un pendule matériel, par l'addition ou la suppression

d'un poids puisque le pendule reste un instant en repos); P oscillera alors sur l'arc BEB' et donnera lieu à des fonctions elliptiques du module complémentaire  $\alpha'$ , donné, d'accord avec (23), par

$$(30) \quad \cot \frac{\theta}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \operatorname{cn}(v, k').$$

Mais un changement de signe de  $g$  dans (28) changera  $m$  en  $ni$  et  $v$  en  $vi$ , de sorte que, sur l'arc BEB',

$$(31) \quad \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cn}(vi, k);$$

donc

$$\operatorname{cn}(vi, k) \operatorname{cn}(v, k') = 1,$$

relation fondamentale pour le changement de l'argument réel en argument imaginaire du module complémentaire.

De cette manière la double périodicité apparaît en intégrant le long d'un cercle, au lieu de le faire sur le contour d'un parallélogramme de périodes.