

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 2
(1902), p. 232-238

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__232_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES.

1893.

(1900, p. 5-4)

On donne une parabole P représentée par $y^2 - 2px = 0$; on considère les paraboles Q qui touchent XO en O et dont les directrices sont tangentes à P.

1° Former l'équation générale des paraboles Q, démontrer que par chaque point du plan il passe trois de ces paraboles, déterminer la région où sont situés les points tels que deux des trois paraboles qui y passent soient confondues;

2° Former l'équation de l'axe d'une parabole Q, en déduire qu'il passe trois axes par chaque point du plan, trouver le lieu des points tels que deux axes correspondants soient rectangulaires;

(1) *Nouvelles Annales*, 4^e série, t. II, p. 48 et 240.

3° Trouver le lieu des foyers des paraboles Q;

4° Former l'enveloppe des tangentes au sommet.

(CH. BUCHE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

1. Soient

F le foyer d'une parabole Q;

F' le symétrique de F par rapport à OX;

α et β les coordonnées de F;

θ l'angle de l'axe de Q avec OX;

$OF = OF' = q$.

L'équation de la directrice de Q est

$$(1) \quad x \cos \theta + y \sin \theta + q = 0.$$

Les coordonnées de F sont

$$(2) \quad \alpha = -q \cos \theta, \quad \beta = q \sin \theta.$$

De sorte que l'équation générale des paraboles tangentes en O à OX est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta + q)^2$$

ou

$$(x + q \cos \theta)^2 + (y - q \sin \theta)^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta + q)^2,$$

qui se réduit à

$$(x \sin \theta - y \cos \theta)^2 - 4qy \sin \theta = 0.$$

Reste à exprimer que la droite (1) est tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

En portant $x = \frac{y^2}{2p}$ dans (1), on a

$$y^2 \cos \theta + 2py \sin \theta + 2pq = 0.$$

Cette équation en y aura ses racines égales pour

$$q = \frac{p \sin^2 \theta}{2 \cos \theta};$$

par conséquent l'équation générale des paraboles Q est, en

fonction du paramètre variable θ .

$$(3) \quad (x \sin \theta - y \cos \theta)^2 - \frac{2py \sin^3 \theta}{\cos \theta} = 0.$$

En posant $\tan \theta = m$, et ordonnant par rapport à m , cette équation devient

$$(4) \quad 2pym^3 - m^2x^2 + 2mxy - y^2 = 0.$$

Cette équation en m est du troisième degré : il passe donc, par chaque point (x, y) du plan, trois paraboles Q. Si deux de ces paraboles sont confondues, c'est que l'équation (4) a une racine commune avec sa dérivée par rapport à m , c'est-à-dire

$$(5) \quad 3pym^2 - mx^2 + xy = 0.$$

En multipliant (5) par $2m$ et en retranchant (4) multipliée par 3, on a

$$(6) \quad m^2x^2 - 4mxy + 3y^2 = 0.$$

On est donc ramené à éliminer m entre (5) et (6), ce qui donne

$$y^2[(x^3 - 9py^2)^2 - x^2(x^4 - 12pxy^2)] = 0$$

ou

$$y^4(27py^2 - 2x^3) = 0.$$

Le lieu cherché est donc la *parabole semi-cubique*

$$(7) \quad y^2 = \frac{2x^3}{27p},$$

qui est la *développée de la parabole*

$$y^2 = 8p(x + 4p).$$

La courbe (7) est aussi l'enveloppe de la parabole (3)

2. L'équation de l'axe de la parabole Q est

$$y - \beta = (x - \alpha) \tan \theta$$

ou

$$(y - q \sin \theta) \cos \theta = (x + q \cos \theta) \sin \theta.$$

$$x \sin \theta - y \cos \theta + 2q \sin \theta \cos \theta = 0.$$

ou enfin

$$(8) \quad x \sin \theta - y \cos \theta + p \sin^3 \theta = 0.$$

En posant $\tan \theta = m$, cette équation devient

$$(9) \quad (x + p)m^3 - ym^2 + xm - y = 0.$$

Donc, par un point (x, y) du plan il passe trois axes dont les coefficients angulaires m_1, m_2, m_3 satisfont à l'équation (9). Par conséquent

$$(10) \quad m_1 + m_2 + m_3 = \frac{y}{x + p},$$

$$(11) \quad m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = \frac{x}{x + p},$$

$$(12) \quad m_1 m_2 m_3 = \frac{y}{x + p}.$$

Si deux des axes sont rectangulaires, on a en outre

$$(13) \quad m_2 m_3 = -1.$$

Il faut donc éliminer m_1, m_2, m_3 entre les équations (10), (11), (12) et (13); (12) donne

$$(14) \quad m_1 = -\frac{y}{x + p}.$$

(10) et (11) deviennent, en tenant compte de (13) et (14),

$$m_2 + m_3 = \frac{2y}{x + p},$$

$$m_2 + m_3 = -\frac{(2x + p)}{y}.$$

De sorte que, en égalant ces deux valeurs de $(m_2 + m_3)$, on obtient, pour l'équation du lieu tel que deux axes soient rectangulaires,

$$(2x + p)(x + p) + 2y^2 = 0,$$

$$2(x^2 + y^2) + 3px + p^2 = 0.$$

Ce lieu est donc le *cercle*

$$(15) \quad \left(x + \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}.$$

3. Les coordonnées de F s'écrivent

$$(16) \quad \alpha = -\frac{p \sin^2 \theta}{2}, \quad \beta = \frac{p \sin^3 \theta}{2 \cos \theta}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations donne

$$(17) \quad \alpha(x^2 + \beta^2) + \frac{p\beta^2}{2} = 0.$$

C'est une *cissoïde droite* ayant son point de rebroussement en O, et pour asymptote la directrice de la parabole P. L'équation polaire de cette cissoïde est d'ailleurs immédiatement donnée par la valeur de q

$$q = \frac{p \sin^2 \theta}{2 \cos \theta},$$

l'axe polaire étant dirigé suivant OX'.

On sait d'ailleurs que le lieu de F', symétrique de F par rapport à OX, est le lieu de la projection de O sur la directrice de Q, et, par conséquent, la podaire de la parabole P par rapport à son sommet; et ce lieu est précisément la cissoïde (17).

4. L'équation de la tangente au sommet de la parabole Q qui passe par la projection de F sur OX est

$$y = -(x - \alpha) \cot \theta, \quad (x + q \cos \theta) \cos \theta + y \sin \theta = 0$$

ou

$$(18) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = -\frac{p}{2} \sin^2 \theta \cos \theta.$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ est

$$(19) \quad -x \sin \theta + y \cos \theta = -\frac{p}{2} (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta).$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y , on trouve pour les coordonnées d'un point de l'enveloppe de la tangente au sommet

$$(20) \quad x = \frac{p}{2} \sin^2 \theta \cos 2\theta,$$

$$(21) \quad y = -\frac{p}{2} \cos^2 \theta \sin 2\theta.$$

On reconnaît sous cette forme que les coordonnées (20) et (21) sont celles d'une *hypocycloïde triangulaire* rapportée à une tangente de rebroussement et à sa tangente perpendiculaire.

Les trois points de rebroussement ont pour coordonnées

$$\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{p}{16}, \frac{3p\sqrt{3}}{16}\right), \quad \left(\frac{p}{16}, -\frac{3p\sqrt{3}}{16}\right).$$

L'hypocycloïde passe aussi par le point O et par les points $\left(0, \pm \frac{p}{4}\right)$.

Le rayon du cercle qui passe par les trois points de rebroussement est $\frac{3p}{8}$, et l'aire de l'hypocycloïde est $\frac{\pi p^2}{16}$.

Remarques. — Voici un certain nombre d'autres lieux géométriques ou enveloppes relatives à la même figure, et dignes d'être consignés.

1° *L'enveloppe de l'axe de la parabole Q est une courbe ayant pour aire $\frac{5\pi p^2}{4}$;*

2° *Le lieu de la projection de O sur la tangente au sommet est la courbe en coordonnées polaires*

$$r = -\frac{p}{2} \cos \theta \sin^2 \theta,$$

dont l'aire est $\frac{\pi p^2}{64}$;

3° *Le lieu de la projection de O sur l'axe de Q est la courbe*

$$r = -p \cos^3 \theta,$$

dont l'aire est $\frac{5\pi p^2}{16}$;

4° *Le lieu de la projection de O sur la corde focale principale de Q est la courbe*

$$r = -\frac{p \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \cos \theta},$$

dont l'équation cartésienne est

$$(x^2 + y^2)^2 x - \frac{p}{2} y^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une courbe du cinquième degré.

1899.

(1900, p. 575.)

On donne un point A et une droite D située à une distance d du point A. Une longueur $BC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ se déplace sur D. Montrer que la droite d'Euler du triangle ABC enveloppe une parabole. (E.-N. BARIÉSIEN.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Prenons D pour axe des x , la perpendiculaire menée par A pour axe des y et posons $\overline{OB} = \lambda$, $\overline{BC} = a$: les coordonnées du barycentre G du triangle ABC étant

$$x = \frac{2\lambda + a}{3}, \quad y = \frac{d}{3},$$

et celles du centre du cercle circonscrit M

$$x = \frac{\lambda + a}{2}, \quad y = \frac{d^2 + (a + \lambda)\lambda}{2d},$$

l'équation de la droite GM est

$$(\lambda + a)(a + \lambda)\lambda - x(d^2 + 3a\lambda + 3\lambda^2) - y \cdot d(\lambda + a) = 0;$$

en particulier, si $a = \frac{2d}{\sqrt{3}}$, elle devient, après suppression du facteur $(d + \lambda\sqrt{3})$,

$$\lambda^2 + (a - 3x)\lambda + d(y - x\sqrt{3}) = 0,$$

dont l'enveloppe est

$$\left(3x - \frac{4d}{\sqrt{3}}\right)^2 - 8d(y - x\sqrt{3}) = 0.$$

En transportant les axes au point $\left(0, \frac{d}{3}\right)$, l'équation de cette parabole prend la forme $9x^2 = 16d \cdot y$.

Autre solution de M. LEZ.