Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 230-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__230_0>

CORRESPONDANCE.

M. **G. Painvin,** à Nantes. — Il me semble que la fin de la solution de la question 1857 (novembre 1901, p. 527) n'est pas exacte à partir des mots *Le lieu cherché,* etc.

Si, en effet, au lieu de considérer les deux cônes A^2 et B^2, on considère le cône C^2, qui évidemment contient aussi le lieu, il faut que ce cône passe par l'intersection des deux premiers, ce qui est impossible si la projection du lieu se compose de $C'K$ et $A'B'$, droites qui constituent le contour apparent du cône C^2 et ne peuvent, par suite, être la projection d'une courbe tracée sur sa surface, sauf dans le cas où ce cône C^2 se réduit à deux plans, cas particulier qui est l'objet du dernier paragraphe. Dans le cas général, on trouve des arcs de coniques comme projections sur le plan.

M. **d'Ocagne.** — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées parallèles* (à propos de la question 1920). — J'ai commis une inadvertance dans l'énoncé de la question 1920, qui doit être ainsi modifié à partir de la quatrième ligne : « compris entre le point de contact et l'une des asymptotes ». Voici la voie qui m'y avait conduit.

En formant l'équation du centre de courbure répondant à la tangente (u, v) en coordonnées parallèles (¹) et écrivant ensuite que sa distance à cette tangente est égale au rayon de courbure R, on trouve

$$R = \frac{d^2v\,du - d^2u\,dv}{(dv - du)^3}\,\frac{[\delta^2 + (v-u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

les axes de coordonnées Au et Bv étant supposés perpendiculaires à l'axe AB des origines et δ représentant la distance AB de ces origines.

Si l'on prend u comme variable indépendante, cette expres-

(¹) *Coordonnées parallèles et axiales.* Paris, Gauthier-Villars; 1885.

sion devient

$$R = \frac{v''_u}{(v'_u - 1)^3} \frac{[\delta^2 + (v - u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

et l'on en peut donner l'interprétation géométrique que voici : si la tangente dont le point de contact est M coupe l'axe Au en T, on a

$$R = v''_u \frac{\overline{MT}^3}{AB}.$$

Soit, par exemple, une ellipse tangente en A et B à Au et Bv. Si l'on représente par $2a$ l'axe AB ou δ de cette ellipse, par $2b$ le second axe, l'équation de l'ellipse s'écrit

$$uv = b^2,$$

d'où

$$v''_u = \frac{2b^2}{v^3} = \frac{2b^2}{\overline{AT}^3},$$

et la formule précédente devient

$$R = \frac{b^2}{a} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{AT}^3}.$$

Or, si du centre O de l'ellipse on abaisse sur la tangente MT la perpendiculaire $OH = h$, on a (1)

$$MT.h = AT.a.$$

Par suite,

$$Rh^3 = a^2b^2,$$

égalité qui se traduit par l'énoncé de la question 1919 (2).

On déduit de là

$$Rh = \frac{a^2b^2}{h^2} = \frac{a^2b^2}{\rho^2 \sin^2\omega},$$

en appelant ρ le demi-diamètre OM et ω l'angle de ce diamètre

---

(1) Il suffit, pour établir cette relation, de remarquer que les triangles OMT et OTA sont équivalents comme projections de triangles égaux dans le plan du triangle principal.

(2) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. II, p. 48.

avec la tangente MT, ou, en appelant ρ' le demi-diamètre conjugué et appliquant le second théorème d'Apollonius

$$Rh = \rho'^2.$$

Dans le cas de l'hyperbole, il suffit, dans ce qui précède, de changer b^2 en $-b^2$. Le demi-diamètre ρ' figurant dans cette dernière égalité doit alors être pris dans l'hyperbole conjuguée. Mais, pour n'avoir pas à faire intervenir celle-ci, il suffit de remarquer que ce demi-diamètre est égal au segment de la tangente MT, compris entre le point de contact et l'une des asymptotes. De là l'énoncé rectifié de la question 1920 ([1]), qui conduit à cette construction du centre de courbure :

Si le centre O *de l'hyperbole se projette en* I *sur la normale en* M, *et si la tangente en* M *coupe l'une des asymptotes en* R, *la perpendiculaire élevée en* R *à* IR *passe par le centre de courbure situé sur la normale* MI.