NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

# Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 2 (1902), p. 206-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__206_0>

[M¹5b]

# SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. MAURICE FRÉCHET,
Élève de l'École Normale supérieure.

---

On appelle *hypocycloïde à trois rebroussements* une courbe de troisième classe H, tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques.

Nous l'étudierons en partant du problème suivant :

I. *Trouver l'enveloppe de la droite de Simson* PQR *relative à un triangle quelconque* ABC *et à un point variable* M.

Prenons celui-là comme triangle de référence; les équations des droites PQR, MP, MQ, MR seront

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$(v\cos C + w\cos B)x + vy + wz = 0,$$
$$ux + (w\cos A + u\cos C)y + wz = 0,$$
$$ux + vy + (u\cos B + v\cos A)z = 0.$$

Ces trois droites étant concourantes, le déterminant des coefficients $\Delta(u, v, w)$ est nul. L'enveloppe cherchée est donc la courbe de troisième classe $\Delta = 0$. La droite de l'infini est tangente double, car $\Delta'_u$, $\Delta'_v$, $\Delta'_w$ sont nuls pour $\frac{u}{\sin A} = \frac{v}{\sin B} = \frac{w}{\sin C}$. L'équation de ses points de contact

$$U^2\Delta''_{u^2} + V^2\Delta''_{v^2} + W^2\Delta''_{w^2} + 2UV\Delta''_{uv} + 2VW\Delta''_{vw} + 2WU\Delta''_{uw} = 0$$

se réduit par un calcul facile à celle des points cycliques.

*L'enveloppe des droites de Simson est donc une hypocycloïde à trois rebroussements* ([1]).

On a

$$\Delta(0, 0, w) = \Delta(\cos A, -\cos B, 0) = 0.$$

L'enveloppe est donc tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle ABC.

II. *Réciproquement toute hypocycloïde à trois rebroussements* H *peut être considérée d'une infinité de manières comme enveloppe de droites de Simson.*

En effet, d'après la définition donnée :

1° L'équation en coordonnées cartésiennes de H est de la forme

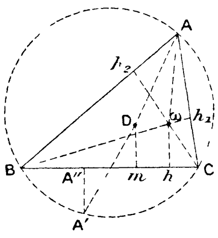
$$(1) \qquad (u^2 - v^2)w + A u^3 + 3 B u^2 v - 3 C u v^2 + D v^3 = 0;$$

donc il y a une seule hypocycloïde tangente à quatre droites données.

2° Il n'y a qu'une tangente à H qui soit parallèle à une direction donnée.

Soient alors $Ah_1$ et $Ah_2$ (*fig.* 1) deux tangentes quel-

Fig. 1.




conques à une hypocycloïde H, et $Bh_1$, $Ch_2$ les *deux tan-*

([1]) Pour une démonstration géométrique de cette propriété, *voir*, par exemple, E. Duporcq, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Nouvelles Annales*, avril 1901, p. 168-171).

*gentes* perpendiculaires. La courbe H aura quatre tangentes communes avec l'enveloppe des droites de Simson relative au triangle ABC ainsi formé; ces deux hypocycloïdes coïncident.

3° Les propriétés que nous allons démontrer sur l'enveloppe des droites de Simson s'appliqueront donc à une hypocycloïde H quelconque.

Lorsque le point M (qui décrit le cercle de centre D circonscrit à ABC) vient au point A′ diamétralement opposé à A, la tangente PQR se confond avec BC, et le point P vient en un point A″, projection de A′ sur BC. Donc BC *est tangent à* A *en* A″. On a

$$\frac{m\text{A}''}{mh} = \frac{\text{DA}'}{\text{DA}} = 1$$

si $m$ est le milieu de BC. Donc

$$m\text{A}'' = mh,$$

et, d'après la géométrie du triangle, il en résulte que les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes, et il y a une conique inscrite à ABC en A″B″C″. Comme le triangle ABC dépend de deux paramètres quand H est fixe et A variable, *il y aura un système doublement infini de coniques* S *tritangentes à* H. L'examen des conditions montre qu'il n'y en a pas d'autres.

4° Les trois normales à H aux points de contact avec une conique S sont les symétriques des hauteurs de ABC, par rapport à D. *Ces trois normales sont donc concourantes.*

5° Les points A″, $m$, $h$ et le point $k$ à l'infini sur BC forment une division harmonique; si $x, y$ sont les coordonnées trilinéaires de A″, celles de $m$, $h$, $k$ seront

$$\frac{1}{\sin A}, \quad \frac{1}{\sin B}, \quad 0; \qquad \frac{1}{\cos A}, \quad \frac{1}{\cos B}, \quad 0; \qquad \frac{1}{\sin A}, \quad -\frac{1}{\sin B}, \quad 0;$$

et l'on aura

$$2\left[\frac{x\cos B}{y\cos A}+\frac{\sin B}{\sin A}\left(-\frac{\sin B}{\sin A}\right)\right]=\left(\frac{x}{y}+\frac{\cos B}{\cos A}\right)\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin B}{\sin A}\right),$$

d'où

$$x\sin A\operatorname{tang} A = y\sin B\operatorname{tang} B.$$

De même, pour $B''$ et $C''$; l'équation de la conique inscrite en $A''$, $B''$, $C''$ sera

$$(2)\qquad \frac{\sin A\operatorname{tang} A}{u}+\frac{\sin B\operatorname{tang} B}{v}+\frac{\sin C\operatorname{tang} B}{w}=0.$$

Un calcul immédiat montre que la droite de l'infini a même pôle par rapport à (2) et à

$$(3)\qquad \frac{\sin A}{x}+\frac{\sin B}{y}+\frac{\sin C}{z}=0$$

(équation connue du cercle D circonscrit à ABC). Donc : *le centre d'une conique* S *tritangente à* H *coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes.*

6° Les coefficients $mm'm''$ des tangentes à H issues d'un point quelconque de coordonnées cartésiennes $x$, $y$ vérifient, d'après l'équation (1), la relation

$$(4)\qquad m^3(A-x)+m^2(y-3B)+m(3C-x)+y-D=0.$$

Le lieu des points $x$, $y$ sommets des angles droits circonscrits à H s'obtient au moyen des équations (3), et de

$$m'm''=-1,$$

d'où

$$m=\frac{m\,m'm''}{m'm''}=\frac{y-D}{A-x}$$

et

$$(5)\quad \begin{cases} 2(x^2+y^2)-3(A+C)x \\ \qquad -3(D+B)y+D^2+3DB+3AC+A^2=0. \end{cases}$$

*Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à* H *est un cercle fixe* Γ.

7° Alors dans le triangle A, B, C, les points $h$, $h_1$, $h_2$ sont sur Γ : le *cercle des neuf points du triangle des tangentes communes à* S *et* H *est fixe,* ou encore : le *lieu des milieux des côtés du triangle* ABC *est un cercle* Γ. Le *rayon* R *du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes à* S *et* H *est constant;* car il est double de celui du cercle des neuf points.

8° Le centre D de la conique S est certainement à distance finie. Soient

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$$

les équations en coordonnées cartésiennes de S et du cercle concentrique D. Il y a un triangle inscrit à D et circonscrit à S; en appliquant la condition $\theta'^2 - 4\theta\Delta' = 0$, on trouve

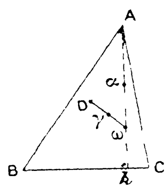
$$\mathrm{R}^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

Quand la conique S est réelle, $\mathrm{R}^2$ est réel, le produit $\alpha\beta$ est positif; *donc* S *est une ellipse.* Soient $a$ et $b$ ses deux demi-axes; on a, en choisissant $a \geqq b$,

$$\mathrm{R} = a + \varepsilon b \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{6}$$

Soit ω l'orthocentre du triangle ABC (*fig.* 2); le

Fig. 2.




centre γ du cercle des neuf points de ABC est le milieu de Dω. Posons $\gamma\omega = m$; on aura, d'après le théorème de Faure appliqué à S et au cercle conjugué au triangle ABC (de centre $\omega$ et de rayon $\rho$),

$$a^2 + b^2 = 4m^2 - \rho^2. \tag{7}$$

Or le cercle des neuf points passe par $h$ et par le milieu $\alpha$ de $A\omega$. On a donc, puisque son rayon est $\frac{R}{2}$,

$$\overline{\omega\alpha}\cdot\overline{\omega h} = m^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

et, comme

$$\rho^2 = \overline{\omega A}\cdot\overline{\omega h},$$

$$\rho^2 = 2m^2 - \frac{R^2}{2}. \tag{8}$$

Des formules (6), (7) et (8) on tire

$$ab = \varepsilon\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 - m^2\right]. \tag{9}$$

Donc le *produit des demi-axes de* S *est égal à la valeur absolue de la puissance de son centre* D *par rapport au cercle fixe* $\Gamma$. De plus $-\varepsilon$ est, d'après (9), du signe de cette puissance, et l'on conclut d'après (6) que :

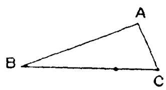
*Lorsque le centre de* S *est à l'intérieur du cercle fixe* $\Gamma$, *la somme des demi-axes est constante et égale au diamètre de* $\Gamma$; *lorsque* D *est à l'extérieur de* $\Gamma$, *c'est la différence qui remplace la somme.*

9° Les formules (6) et (9) montrent que l'on a

$$a = R, \qquad b = 0$$

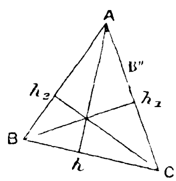
lorsque le centre de S est sur $\Gamma$. Alors la conique S se réduit à un segment de droite de longueur $2R$ dont le milieu est sur $\Gamma$. Au point de vue tangentiel, c'est un ensemble de deux points B, C ayant trois tangentes communes avec S. Il faut donc que ces trois tangentes soient BC et deux droites passant l'une en B, l'autre en C (*fig.* 3). Dans ce cas le triangle ABC devient tan-

Fig. 3.




gent en B et C à S (*fig.* 1); le point B″ (*fig.* 4) vient en C; donc $Ah_1 = B''C = 0$ et, par conséquent, $h_1$ venant en A,

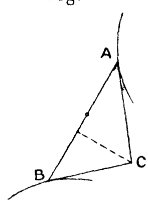
Fig. 4




la hauteur issue de B est AB : l'angle BAC est droit.

On peut voir ceci autrement : on peut prendre AC et AB arbitrairement. Laissant la tangente quelconque AB fixe, faisons tendre AC vers la tangente à H en l'un des points d'intersection de H et AB (*fig.* 5). Alors les

Fig. 5.




deux tangentes $Ah$ et AC se confondent, et par conséquent aussi les deux tangentes *perpendiculaires* $Bh_1$ et BC; donc B est sur H. Le triangle ABC devient rectangle en C; le côté $AB = 2R$, puisqu'alors le cercle circonscrit a AB pour diamètre; le milieu de AB est encore sur $\Gamma$.

Ainsi, *la portion d'une tangente quelconque à* H, *interceptée par* H *est constante; le milieu de ce segment décrit* $\Gamma$; *les tangentes aux extrémités sont rectangulaires.*

10° On tire des formules (6) et (9)

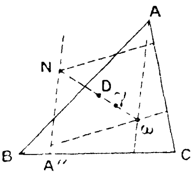
$$m = \frac{a - \varepsilon b}{2}.$$

*Donc le lieu des centres des coniques* S *de grandeur constante est un cercle concentrique à* $\Gamma$.

On peut considérer ces coniques S comme les diverses positions, dans un plan fixe Q, d'une ellipse $S_1$ invariable dans un plan mobile $q$.

Elles ont pour enveloppe H; donc le centre instantané de rotation sera le point de concours N (*fig.* 6)

Fig. 6.




des normales communes à S et H. On a

$$N\gamma = 3D\gamma = \tfrac{3}{2}(a - \varepsilon b) \qquad \text{et} \qquad ND = 2D\gamma = a - \varepsilon b.$$

Donc les distances du point N au point D fixe dans le plan mobile (D centre de $S_1$) et au point $\gamma$ fixe dans le plan fixe ($\gamma$ centre de $\Gamma$) sont constantes et les points N, D, $\gamma$ sont en ligne droite. Donc le lieu de N est un cercle de centre D et de rayon $a - \varepsilon b$ dans $q$, et un cercle de centre $\gamma$ et de rayon $\frac{3a - \varepsilon b}{2}$ dans le plan fixe.

*L'enveloppe d'une ellipse d'axes $2a$ et $2b$ invariablement liée à un cercle concentrique de rayon $a - \varepsilon b$ roulant sur un cercle C de rayon $\frac{3}{2}(a - \varepsilon b)$ est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

11° Les normales $A''N$, $B''N$, $C''N$ sont homothétiques des hauteurs du triangle ABC par rapport au point fixe $\gamma$. Les hauteurs de ABC sont tangentes à H.

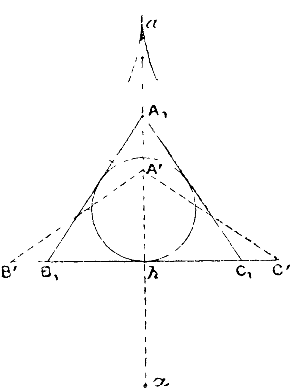
*La développée d'une hypocycloïde* H *est une autre hypocycloïde homothétique de la première par rapport à $\gamma$ dans le rapport* $-3$.

12° Lorsque le centre D de S vient en $\gamma$, on a

$$a = b = \frac{R}{2};$$

donc le cercle $\gamma$ est tritangent à H (*fig.* 7). Le cercle

Fig. 7.




des neuf points doit alors se confondre avec le cercle inscrit, pour le triangle $A_1B_1C_1$ relatif à $\Gamma$. Donc celui-ci est équilatéral. Si, d'un point $A'$ d'une hauteur $A_1 h$ du triangle $A_1 B_1 C_1$, on mène deux autres tangentes à H rencontrant $B_1 C_1$ en $B'$ et $C'$, le cercle $\Gamma$ sera le cercle des neuf points du triangle $A'B'C'$; donc ces tangentes sont symétriques par rapport à $A_1 h$ :

*Les hauteurs du triangle* $A_1 B_1 C_1$ *sont trois axes de symétrie de* H.

En prenant pour axes $A_1 h$ et $h C_1$, l'équation de H prend la forme réduite

$$w(u^2+v^2)+2Ru^2v=0. \tag{10}$$

13° Le cercle D circonscrit à $A'B'C'$ coupe $A'h$ en un point $\alpha$ tel que $\alpha A' = 2R$, diamètre de D. Lorsque $A'$ tend vers le point $a$ tel que $ah = 2R$, $\alpha$ vient en $h$; donc aussi $B'$ et $C'$; les tangentes $A'B'$, $A'h$, $A'C'$ sont alors confondues :

*Les axes de symétrie de* H *sont aussi ses tangentes de rebroussements et les points de rebroussements sont sur un cercle* $\Gamma'$ *concentrique à* $\Gamma$ *et de rayon triple.*

14° En appliquant la proposition (10°) dans le cas où $b = 0$, on ramène finalement à la proposition bien connue :

*L'hypocycloïde à trois rebroussements est le lieu d'un point d'un cercle qui roule intérieurement dans un cercle de rayon triple.*

15° On satisfait à l'équation (10) en posant

$$\frac{u}{1+t^2} = \frac{v}{t(1+t^2)} = -\frac{w}{2Rt}. \tag{11}$$

Les $t$ des tangentes communes à H et à une courbe quelconque de classe $m$

$$(A_0^0 u^m + A'_0 u^{m-1} + \ldots + A_0^m v^m)$$
$$+ w(A_1^0 u^{m-1} + \ldots) + w^2(\ldots) + \ldots + A_m^0 w^m = 0$$

sont racines d'une équation de la forme

$$(12) \qquad t^{3m} - T_1 t^{3m-1} + T_2 t^{3m-2} - \ldots = 0,$$

où

$$\rho T_1 = A_0^1 - 2 R A_1^0,$$
$$\rho T_3 = A_0^3 + m A_0^1 - 2 R [A_1^2 - (m-1) A_0^1] + (-2 R)^2 A_2^2,$$
$$\rho T_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où, par un calcul facile qui repose sur l'identité $(1-1)^p = 0$, on tire

$$\rho(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 - \ldots) = 0.$$

Soit alors $\varphi_i$ l'angle avec $Oy$ de l'une des tangentes $T_i$ définies par (12); la relation précédente devient

$$(13) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{3m} \equiv 0,$$

le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à un multiple de $\pi$ près.

D'ailleurs, toute courbe de classe $m$ tangente à $3m-1$ tangentes d'une courbe de troisième classe est tangente à une tangente fixe de cette dernière courbe. Ainsi *la relation* (13) *est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une courbe de classe m tangente aux* $3m$ *tangentes* $T_1, \ldots, T_{3m}$ *à* H.

16° On en déduit, par exemple : la condition pour que trois tangentes à H soient les tangentes communes à H et à une conique S tritangente

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv \frac{\pi}{2}$$

montre bien que celle-ci dépend de deux paramètres et qu'on peut choisir arbitrairement deux des tangentes communes.

17° *Les tangentes à* H, *issues des points de contact de* H *et de la conique* S *triplement tangente, sont concourantes;* car leurs paramètres $\varphi'_i$ donnés par les équations

$$2\varphi_i - \varphi'_i = 0$$

satisfont à la relation

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = 0,$$

si l'on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

18° Soit $\varphi_n$ la tangente à H menée par le point de contact de la tangente $\varphi_{n-1}$. Avec des déterminations convenables de ces angles on aura

$$-2\varphi_{n-1} = \varphi_n, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_n = (-2)^n\varphi.$$

Si l'on prend $\varphi = \dfrac{k\pi}{1-(-2)^n}$, on aura

$$\varphi = \varphi_n + k\pi.$$

Donc *il existe un ou plusieurs polygones de n côtés à la fois inscrits et circonscrits à* H.

Par exemple, pour $n = 3$, on a le triangle

$$\varphi = \frac{\pi}{9}, \qquad \varphi_1 = -\frac{2\pi}{9}, \qquad \varphi_2 = \frac{4\pi}{9}$$

et son symétrique par rapport à une tangente de rebroussement. En prenant ce triangle comme triangle de référence, l'équation de H prend la forme

$$\mathrm{A}\frac{u}{v} + \mathrm{B}\frac{v}{w} + \mathrm{C}\frac{w}{u} + \mathrm{D} = 0.$$