NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DUPORCQ

Sur certaines extensions du théorème de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 161-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__161_1>

[M¹8g]

SUR CERTAINES EXTENSIONS DU THÉORÈME DE PONCELET;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

1. On sait que, comme l'a remarqué M. Darboux, deux polygones complets de m côtés, circonscrits à une même conique C, ont leurs $m(m-1)$ sommets sur une même courbe Γ d'ordre $(m-1)$. Il existe alors une infinité de polygones complets de m côtés, circonscrits à C et ayant leurs sommets sur Γ.

La conique C étant mise sous forme unicursale, soient

$$f_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(t) = 0$$

les deux équations de degré m dont les racines correspondent aux côtés des deux premiers polygones considérés : on sait que les côtés d'un quelconque des polygones circonscrits à C et inscrits à Γ correspondront à une équation de la forme

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0.$$

On a donc ainsi une représentation d'une involution du $m^{\text{ième}}$ ordre et de première espèce.

2. Considérons maintenant trois polygones complets P_1, P_2, P_3, circonscrits à C et dont les côtés sont

définis par les trois équations de degré m :

$$f_1(t) = 0, \qquad f_2(t) = 0, \qquad f_3(t) = 0,$$

et soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les trois courbes d'ordre $(m-1)$ circonscrites respectivement aux polygones P_2 et P_3, P_3 et P_1, P_1 et P_2. Il est facile de voir que ces courbes ont en commun $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points.

Cette propriété résulte de ce que les deux tangentes à C issues d'un point de Γ_1 correspondent à deux racines d'une équation de la forme

$$(1) \qquad \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0;$$

de même, deux tangentes à C issues d'un point de Γ_2 sont racines d'une équation de la forme

$$(2) \qquad \mu_3 f_3 + \mu_1 f_1 = 0.$$

Si, pour des valeurs finies de λ_3 et μ_3 les équations (1) et (2) ont deux racines communes, les tangentes correspondantes menées à C se couperont en un des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points communs à Γ_1 et à Γ_2, en dehors des $\frac{m(m-1)}{2}$ sommets du polygone P_3, et réciproquement. Mais, en multipliant respectivement (1) et (2) par μ_3 et λ_3, et retranchant membre à membre, on obtient une équation de la forme

$$(3) \qquad \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 = 0,$$

à laquelle satisferont aussi les deux racines communes à (1) et à (2) : par suite, les points obtenus seront aussi sur Γ. Ainsi donc :

Les trois courbes d'ordre $(m-1)$ auxquelles sont inscrits deux à deux trois polygones complets *de m côtés, circonscrits à une même conique, ont* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *points communs.*

3. On peut encore se rendre compte de ce résultat au moyen de la méthode suivante.

Considérons la courbe unicursale U définie par les équations

$$(4) \qquad \frac{x}{f_1(t)} = \frac{y}{f_2(t)} = \frac{z}{f_3(t)}.$$

A toute valeur de t, il correspond à la fois un point de U et une tangente à C. Une droite quelconque Δ coupe U en m points, auxquels correspondent m tangentes à C : soit P le polygone complet qu'elles déterminent. Nous définissons ainsi une transformation qui fait correspondre à toute droite Δ les sommets d'un polygone complet de m côtés, circonscrit à C : c'est bien évidemment une transformation de contact. Si Δ a une enveloppe quelconque, les sommets de P décriront la courbe correspondant à cette enveloppe.

Supposons que Δ passe par le sommet

$$a_1(y = 0, z = 0)$$

du triangle de référence $a_1 a_2 a_3$.

A la droite

$$\lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$$

correspond l'équation (1), de sorte qu'au point a_1 correspond la courbe Γ_1. Les courbes Γ_2 et Γ_3 correspondent de même aux points a_2 et a_3. Or, la courbe U admet $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles : pour toute droite Δ passant par l'un de ces points doubles, le polygone P correspondant à deux côtés fixes, qui sont définis par les deux valeurs que prend t pour ce point double, et il est bien visible que le point commun à ces deux côtés sera à la fois sur Γ_1, Γ_2 et Γ_3. On retrouve bien ainsi les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points fixes.

4. Tout polygone P correspondant à une droite Δ, d'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

est défini par l'équation

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0,$$

dont les racines fournissent les valeurs que prend le paramètre t pour les m côtés de ce polygone.

Deux de ces polygones P et P', correspondant à deux droites Δ et Δ', sont inscrits à une courbe Γ, d'ordre $(m-1)$, qui peut être considérée comme la transformée du point a, commun aux droites A et A'.

Cette courbe passe évidemment aussi par les

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points fixes.

Deux courbes Γ et Γ' se couperont, en outre de ces point fixes, en $\frac{m(m-1)}{2}$ points qui seront les sommets d'un polygone P, celui qui correspond à la droite aa'.

Remarquons enfin que par deux points arbitraires du plan il passe généralement une seule courbe Γ : en effet, de tout point du plan on peut mener à C deux tangentes, qui correspondent à deux points de U, et ceux-ci déterminent une droite Δ : à deux points m et m' correspondent ainsi deux droites Δ et Δ' se coupant en un point a, et la courbe Γ correspondant à ce point passe par m et m'.

Les courbes Γ forment donc un réseau linéaire, et leur équation générale est de la forme

$$(5) \qquad \Gamma = \lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 = 0,$$

puisque Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont trois courbes Γ.

Les trois paramètres λ sont d'ailleurs visiblement proportionnels aux coordonnées homogènes du point a par rapport au triangle $a_1 a_2 a_3$: ils définissent eux-mêmes un certain système de coordonnées homogènes par rapport à ce triangle.

5. Si le point a décrit une courbe dont l'équation tangentielle est dans le système

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

la courbe Γ aura une enveloppe d'équation

$$(6) \qquad \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = 0,$$

qui sera circonscrite à une infinité de polygones P.

Réciproquement :

Toute courbe de la forme

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = 0,$$

φ étant homogène, est circonscrite à une infinité de polygones complets de m côtés circonscrits à C.

Il est bien évident que les points fixes, communs à Γ_1, Γ_2, Γ_3, seront des points multiples d'ordre p de cette courbe, si φ est de degré p. Enfin toute tangente à C sera alors un côté de p polygones P inscrits dans la courbe obtenue.

6. Considérons le cas particulier où U est une cubique, et où a décrit une conique.

Les polygones P sont alors des triangles circonscrits à C, les courbes Γ des coniques passant par un point fixe, et la courbe (6) devient une quartique à un nœud. Il est facile de voir que C touche six bitangentes à cette quartique, celles-ci correspondant aux six points communs à la cubique U et à la conique décrite par a. Il est assez facile de déduire de là que :

Il existe toujours deux quartiques ayant un point double donné et bitangentes à six droites touchant une même conique.

7. On peut obtenir des résultats analogues dans l'espace pour des polyèdres complets ayant leurs sommets sur une cubique gauche. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas des tétraèdres.

Soient donc trois tétraèdres T_1, T_2 et T_3 inscrits à une cubique gauche C, et soient

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

les trois équations en t du quatrième degré qui définissent leurs sommets. L'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

représente une double infinité de tétraèdres inscrits à C et dont les faces enveloppent une quadrique, car par toute corde de C il passe seulement, en général, deux de ces faces. Cette quadrique est d'ailleurs évidemment inscrite aux trois tétraèdres T_1, T_2 et T_3. On voit donc que :

Trois tétraèdres inscrits à une même cubique gauche sont circonscrits à une même quadrique Q, et il existe alors une double infinité de tétraèdres inscrits à la cubique et circonscrits à Q.

8. On voit que les paramètres correspondant aux sommets de ces tétraèdres correspondent à ceux de quatre points en ligne droite sur la quartique unicursale

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}.$$

Mais celle-ci admet trois points doubles. A toutes les sécantes issues de l'un de ces points correspondent une infinité de tétraèdres circonscrits à Q et ayant pour arête commune une corde de la cubique : les extrémités de celle-ci correspondent aux deux valeurs du paramètre qui fournissent le point double envisagé. On obtient ainsi trois cordes de la cubique qui sont nécessairement des génératrices de Q.

Réciproquement :

Il existe une double infinité de tétraèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique admettant pour génératrices trois cordes de cette cubique.

9. Soit maintenant T_4 un quatrième tétraèdre inscrit à C et correspondant à une équation

$$f_4 = 0.$$

Les quatre tétraèdres considérés sont, trois à trois, circonscrits à quatre quadriques, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Celles-ci ont une génératrice commune.

Pour le montrer simplement, considérons la quartique *gauche* unicursale définie par les équations

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3} = \frac{t}{f_4},$$

par rapport à un tétraèdre $a_1 a_2 a_3 a_4$. Les t des sommets d'un tétraèdre inscrit à C et circonscrit à Q_1 correspondent aux points d'intersection de la quartique avec un plan issu de a_1. Or une quartique gauche a une infinité de sécantes triples : les trois points de la cubique qui correspondront à trois points en ligne droite sur la quartique détermineront un plan touchant à la fois Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4, puisque les trois points de la quartique se trouvent bien dans un même plan contenant a_1, ou a_2, ou a_3, ou enfin a_4. Trois points alignés sur la quartique y forment d'ailleurs évidemment une involution de troisième ordre et de première espèce, puisque la donnée de l'un de ces points définit les deux autres. Or sur la cubique gauche une telle involution est évidemment obtenue en la coupant par des plans issus d'une droite fixe, et réciproquement. Donc, les plans tangents communs à Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 sont les plans issus d'une certaine droite Δ, qui est par suite une génératrice commune à ces quadriques.

Ainsi donc :

Les quatre quadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *auxquelles sont circonscrits trois par trois quatre tétraèdres inscrits à une cubique gauche,* C, *ont une génératrice commune.*

10. Par une correspondance anharmonique entre les points d'une quartique gauche unicursale et ceux d'une cubique gauche, on associe donc à tout plan Π de l'espace les faces d'un tétraèdre T inscrit à la cubique. Si le plan Π pivote autour d'un point fixe a, on voit que T reste circonscrit à une quadrique Q, passant par la droite fixe Δ.

A trois points a de l'espace correspondront trois quadriques Q passant par Δ et qui seront inscrites à un même tétraèdre inscrit à la cubique, et correspondant au plan des trois points.

Si donc a décrit une surface, Q aura une enveloppe à deux paramètres, qu'elle touchera en quatre points où les plans tangents formeront un tétraèdre inscrit à la cubique. On trouve ainsi que :

Si φ *désigne une fonction homogène, et* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *les premiers membres des équations* TANGENTIELLES *des quadriques* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *l'équation*

$$\varphi(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0$$

représente une surface inscrite à une double infinité de tétraèdres inscrits à la cubique gauche C.

Si φ est de degré m, toute corde de la cubique est une arête de m tétraèdres circonscrits à cette surface.