NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL-J. SUCHAR

Sur une loi de force centrale déterminée par la considération de l'hodographe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 123-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__123_1>

[R7b]

SUR UNE LOI DE FORCE CENTRALE DÉTERMINÉE PAR LA CONSIDÉRATION DE L'HODOGRAPHE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.
Docteur ès sciences.

Je me propose de résoudre le problème suivant :

Sachant que, sous l'action d'une force centrale, l'hodographe est une conique quelles que soient les conditions initiales, trouver la loi de la force.

Soit

$$(1)\qquad f(x',y') = A'x' + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

l'équation de la conique hodographe rapportée à un système d'axes ayant le centre attractif pour origine. Les coordonnées x', y' sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées x, y du point correspondant de la trajectoire.

Le théorème des aires nous donne

$$(2)\qquad xy' - yx' = \gamma.$$

Écrivons que la tangente à l'hodographe en un point quelconque est parallèle au rayon vecteur correspondant de la trajectoire; nous aurons

$$(3)\qquad \frac{y}{x} = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}},$$

$f'_{x'}$, $f'_{y'}$ étant les demi-dérivées partielles de (1) par rapport à x', y'.

Les équations (2) et (3) nous donnent

$$(4)\qquad x = -\gamma\frac{B'x' + C'y' + E'}{D'x' + E'y' + F'},\qquad y = \gamma\frac{A'x' + B'y' + D'}{D'x' + E'y' + F'}.$$

Si nous résolvons le système (4) par rapport à x', y', on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(E'D' - B'F')x - (E'^2 - F'C')y + \gamma(C'D' - B'E')}{(D'B' - A'E')x - (D'C' - E'B')y + \gamma(B'^2 - A'C')},\\ y' &= -\frac{(D'^2 - A'F')x + (D'E' - F'B')y + \gamma(B'D' - A'E')}{(D'B' - A'E')x + (D'C' - E'B')y - \gamma(B'^2 - A'C')}.\end{aligned}\right.$$

Les relations (4) et (5) nous montrent qu'entre les coordonnées x', y' et x et y il existe une transformation homographique, et comme le point de coordonnées x' et y' décrit une conique, il résulte que le point de coordonnées x et y décrit aussi une conique, c'est-à-dire que la trajectoire correspondante sera aussi une conique et cela quelles que soient les conditions initiales.

La même proposition peut s'établir géométriquement d'une manière très simple.

Nous pouvons évidemment envisager la trajectoire comme étant l'enveloppe d'une de ses tangentes; or, en vertu du théorème des aires que l'on peut écrire sous la forme

$$pv = \gamma,$$

où v est la vitesse et p la distance du centre attractif à la tangente à la trajectoire, nous remarquons que l'extrémité du segment de la vitesse portée sur la droite qui mesure p est le pôle de la tangente à la trajectoire; nous remarquons encore que, si la tangente enveloppe la trajectoire, la courbe lieu du pôle tournée d'un angle droit autour du centre attractif n'est autre chose que la courbe hodographe; or, d'après une proposition bien connue en Géométrie, à savoir : *Si la polaire enveloppe une conique, le pôle décrit aussi une conique et réciproquement,* donc notre proposition se trouve établie.

D'après ce qui précède, notre problème se ramène à un problème un peu plus général que celui proposé par Bertrand (*Comptes rendus,* t. LXXXIV) et résolu à la fois par Halphen et M. Darboux.

Dans un travail qui paraîtra prochainement, nous reprenons le problème de Bertrand, ainsi modifié, où nous montrons qu'il existe, outre les deux lois de forces trouvées par Halphen et M. Darboux et qui ne dépendent que de la position du mobile, une troisième loi qui dépend de la distance au centre attractif, de la vitesse et de l'angle de la vitesse avec une droite fixe.

Nous allons terminer par une application qui nous paraît intéressante.

Trouver la loi de la force centrale sachant que le point correspondant de l'hodographe le parcourt suivant la loi des aires autour du centre attractif.

Si nous appelons s_1 l'arc de l'hodographe, la condition que le point de l'hodographe parcourt cette courbe suivant la loi des aires autour du centre attractif se traduit par une expression de la forme

$$\frac{ds_1}{dt} v \sin V = C_1,$$

où V est l'angle du rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire; or, par définition, si J est la force cherchée, nous aurons

$$J = \frac{ds_1}{dt},$$

où nous supposons, pour simplifier, la masse du point égale à 1; donc la formule précédente s'écrit

$$J v \sin V = C_1.$$

D'après le théorème des aires, on a

$$v \sin V = \frac{C}{r},$$

C étant la constante des aires due à la force centrale; on trouve alors

$$J = \frac{C_1}{C} r,$$

donc la trajectoire est une conique ayant le centre attractif pour centre. Il résulte, d'après notre proposition sur l'hodographe, que l'hodographe sera aussi une conique.

Il est facile de se rendre compte de la nature de la conique hodographe. Remplaçons, dans l'expression

$$J v \sin V = C_1,$$

J par la valeur trouvée; nous aurons

$$v = \frac{C}{r \sin V},$$

ou encore, en désignant par r' le demi-diamètre de la conique trajectoire, conjuguée à la direction r, nous aurons

$$v = \frac{C r'}{r r' \sin V};$$

or, d'après le théorème d'Apollonius, l'expression

$$r r' \sin V$$

est constante; il résulte alors que la vitesse est proportionnelle au demi-diamètre conjugué à la direction r.

Si nous nous rapportons maintenant à la définition de l'hodographe, nous savons que pour l'obtenir nous devons porter, par le centre attractif, des segments égaux et parallèles aux vitesses de la trajectoire, c'est-à-dire des segments proportionnels à r'; donc l'hodographe sera une courbe homothétique de la trajectoire et aura le même centre que la conique trajectoire.