Nouvelles annales de mathématiques

Eugène Fabry

Sur une formule fondamentale des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 114-123

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__114_1>

[F2e]

SUR UNE FORMULE FONDAMENTALE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. EUGÈNE FABRY.

Dans le Traité de Greenhill (*Sur les fonctions elliptiques et leurs applications*) on trouve, aux exercices proposés à la fin du Chapitre VI, l'intégrale

$$(1)\quad I=\int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-16(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}=\frac{\pi}{2},$$

où $e_1>x>e_2>y>e_3$.

La valeur de cette intégrale double se déduit des propriétés des fonctions $p(u)$, $\zeta(u)$, et de la relation

$$(2)\qquad \delta=\eta\omega'-\omega\eta'=\pm\frac{\pi i}{2},$$

où $\eta=\zeta(\omega)$, $\eta'=\zeta(\omega')$, le signe $\pm$ étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Inversement, on peut calculer directement la valeur de l'intégrale (1), sans employer les fonctions elliptiques, et en déduire une démonstration de la formule (2).

En supposant toujours e_1, e_2, e_3 réels, $e_1>e_2>e_3$, faisons la substitution

$$x=e_2+X,\qquad y=e_2-Y.$$

En posant

$$e_1 - e_2 = a, \qquad e_2 - e_3 = b,$$

on a

$$I = \int_0^a \int_0^b \frac{(X+Y)\,dX\,dY}{4\sqrt{XY(a-X)(a+Y)(b+X)(b-Y)}}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$XY = u, \qquad Y - X = v,$$

de déterminant différentiel

$$\frac{D(u,v)}{D(X,Y)} = X + Y.$$

Si le point (X, Y) décrit les axes, entre les points $(0, b)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, c'est-à-dire si l'on a $X = 0$, Y variant de b à 0; puis $X = 0$, Y variant de 0 à a; on aura

$$u = 0,$$

v variant de b à 0 puis à $-a$.

Pour $X = a$, Y variant de 0 à b, on a

$$u - av = a^2,$$

u variant de 0 à ab.

Pour $Y = b$, X variant de 0 à a, on a

$$u + bv = b^2,$$

u variant encore de 0 à ab.

Les points (X, Y) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a, b, correspondent à des points (u, v) intérieurs au triangle dont les côtés ont pour équations

$$u = 0, \qquad u - av = a^2, \qquad u + bv = b^2.$$

Les sommets de ce triangle sont les points

$$(u = 0,\ v = -a), \qquad (u = 0,\ v = b), \qquad (u = ab,\ v = b - a).$$

L'intégrale double devient ainsi

$$I = \int_0^{ab} \int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{du\,dv}{4\sqrt{u(a^2-u+av)(b^2-u-bv)}}.$$

Or on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \left(2\,\mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\right)_\alpha^\beta = \pi \qquad (\alpha < \beta),$$

et

$$\int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{dv}{\sqrt{(a^2-u+av)(b^2-u-bv)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

Par suite

$$I = \int_0^{ab} \frac{\pi\,du}{4\sqrt{abu}} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour en déduire la valeur de l'expression (2), supposons ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs. On a

$$e_1 = p(\omega), \qquad e_2 = p(\omega+\omega'), \qquad e_3 = p(\omega'),$$

$$2\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

$$2\omega' = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$2\eta = \zeta(u+2\omega)-\zeta(u)$$
$$= -\int_{\omega'}^{\omega'+2\omega} p(u)\,du = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{y\,dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

$$2\eta' = \zeta(u+2\omega')-\zeta(u)$$
$$= -\int_{\omega}^{\omega+2\omega'} p(u)\,du = -i\int_{e_2}^{e_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\eta\omega'-\omega\eta'$$
$$= \frac{i}{4}\int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{\pi i}{2}.$$

On peut remarquer que la fonction $p(u)$ suppose $e_1+e_2+e_3=0$, mais la valeur de l'intégrale (1) reste la même, quels que soient e_1, e_2, e_3, pourvu que $e_1>e_2>e_3$.

Dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont imaginaires, la formule (2) peut encore se déduire de l'intégrale (1).

Si e_1, e_2, e_3 ont des rapports réels, soit

$$\frac{e_1}{\rho_1}=\frac{e_2}{\rho_2}=\frac{e_3}{\rho_3}=e^{\theta i},$$

on peut poser

$$\begin{aligned}2\omega &= \int_{e_3}^{e_2}\frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}\\ &= e^{-\frac{\theta i}{2}}\int_{\rho_3}^{\rho_2}\frac{dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\omega' &= \int_{e_2}^{e_1}\frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}\\ &= ie^{-\frac{\theta i}{2}}\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}},\end{aligned}$$

$\dfrac{\omega'}{i\omega}$ étant supposé positif;

$$2\eta=-e^{\frac{\theta i}{2}}\int_{\rho_3}^{\rho_2}\frac{y\,dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}},$$

$$2\eta'=-ie^{\frac{\theta i}{2}}\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}},$$

$\eta\omega'$ et $\omega\eta'$ ne dépendent pas de θ, et $\eta\omega'-\omega\eta'$ se ramène à l'intégrale I.

Enfin, si e_1, e_2, e_3 n'ont pas de rapports réels, soit

$$e_1=A+Re^{\alpha_1 i},\qquad e_2=A+Re^{\alpha_2 i},\qquad e_3=A+Re^{\alpha_3 i}$$

et

$$x=A+Re^{ti},\qquad y=A+Re^{\theta i}.$$

Supposons

$$0 < \alpha_1 < t < \alpha_2 < \theta < \alpha_3 < 2\pi,$$

les points x et y décrivent alors la circonférence qui passe par les points e_1, e_2, e_3. Pour préciser la valeur des radicaux, nous supposerons qu'en passant de l'arc $e_1 e_2$ à l'arc $e_2 e_3$, on tourne autour du point e_2 en passant en dehors de la circonférence. Soit alors

$$\sqrt{y - e_1} = \sqrt{2R\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}}\, e^{\frac{\theta + \alpha_1 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{y - e_2} = \sqrt{2R\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}}\, e^{\frac{\theta + \alpha_2 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{y - e_3} = \sqrt{2R\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}\, e^{\frac{\theta + \alpha_3 - \pi}{4} i},$$

on en déduit

$$\sqrt{x - e_1} = \sqrt{2R\sin\frac{t - \alpha_1}{2}}\, e^{\frac{t + \alpha_1 + \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{x - e_2} = \sqrt{2R\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}}\, e^{\frac{t + \alpha_2 - \pi}{4} i},$$

$$\sqrt{x - e_3} = \sqrt{2R\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}}\, e^{\frac{t + \alpha_3 - \pi}{4} i}.$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} 2\omega &= \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}} \\ &= e^{\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{e^{\frac{\theta i}{4}}\, d\theta}{2\sqrt{2R\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega' &= \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \\ &= e^{\frac{3\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{e^{\frac{ti}{4}}\, dt}{2\sqrt{2R\sin\frac{t - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}}}. \end{aligned}$$

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires, sous la forme $2\omega = a + bi$, $2\omega' = a' + b'i$, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est $\frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$ et a le signe de

$$ab' - ba' = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{\cos\frac{\theta - t}{4}\, dt\, d\theta}{8\mathrm{R}\sqrt{\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}$$

qui est positif.

D'autre part

$$2\eta = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{y\, dy}{\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}$$

$$= -e^{\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i}\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{R}e^{\theta i})\, e^{\frac{\theta i}{4}}\, d\theta}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}},$$

$$2\eta' = -\int_{e_2}^{e_1} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

$$= -e^{\frac{3\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{R}\, e^{ti})\, e^{\frac{ti}{4}}\, dt}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{t - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}}},$$

$$\delta = \eta\omega' - \omega\eta' = \int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2} \frac{(x - y)\, dx\, dy}{4\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}$$

$$= e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} i}$$

$$\times \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(e^{\theta i} - e^{ti})\, e^{\frac{t + \theta}{4} i}\, dt\, d\theta}{32\sqrt{\sin\frac{t - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}.$$

Faisons la substitution

$$t = \alpha_2 - 2u, \qquad \theta = \alpha_2 + 2v$$

et posons

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2a, \qquad \alpha_3 - \alpha_2 = 2b,$$

a et b sont positifs,

$$a + b = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} < \pi.$$

$$\delta = i\,e^{(a-b)i} \int_0^a \int_0^b \frac{\sin(u+v)\,e^{3\frac{v-u}{2}i}\,du\,dv}{4\sqrt{\sin u \sin v \sin(a-u)\sin(a+v)\sin(b+u)\sin(b-v)}}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$\sin u \sin v = X, \qquad v - u = Y.$$

Le déterminant différentiel

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \sin(u+v).$$

Si le point (u, v) décrit les axes entre les points $(0, b)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, c'est-à-dire si $u = 0$, v variant de b à 0; puis $v = 0$, u variant de 0 à a; on a

$$X = 0,$$

Y variant de b à 0 et $-a$.

Lorsque $u = a$, v variant de 0 à b, on a

$$X = \sin a \sin(a + Y),$$

Y variant de $-a$ à $b - a$.

Lorsque $v = b$, u variant de 0 à a, on a

$$X = \sin b \sin(b - Y),$$

Y variant de b à $b - a$.

Les points (u, v) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a, b, correspondent à des points intérieurs au triangle curviligne dont les côtés ont pour équations

$$X = 0, \qquad X = \sin a \sin(a + Y), \qquad X = \sin b \sin(b - Y).$$

et dont les sommets sont les points

$$(X = 0,\ Y = -a),\quad (X = 0,\ Y = b),$$
$$(X = \sin a \sin b,\ Y = b - a).$$

On a donc

$$\delta = \frac{i}{4} e^{(a-b)i} \times \left[\int_{-a}^{b-a} \int_0^{\sin a \sin(a+Y)} + \int_{b-a}^{b} \int_0^{\sin b \sin(b-Y)} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, dY\, dX}{\sqrt{\begin{matrix} X(X - \sin a \sin(a+Y)) \\ \times (X - \sin b \sin(b-Y)) \end{matrix}}} \right],$$

où les deux intégrales ne diffèrent que par les limites.

Dans la première, posons

$$X = \sin a \sin(a+Y) \sin^2\theta;$$

dans la seconde

$$X = \sin b \sin(b-Y) \sin^2\theta.$$

On a

$$\delta = \frac{i}{2} e^{(a-b)i} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, d\theta\, dY}{\sqrt{\sin b \sin(b-Y) - \sin a \sin(a+Y) \sin^2\theta}} \right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{b-a}^{b} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, d\theta\, dY}{\sqrt{\sin a \sin(a+Y) - \sin b \sin(b-Y) \sin^2\theta}} \right];$$

Or

$$\int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, dY}{\sqrt{\sin b \sin(b-Y) - \sin a \sin(a+Y) \sin^2\theta}}$$
$$= \left[\frac{-2 e^{\frac{Yi}{2}} \sqrt{\sin b \sin(b-Y) - \sin a \sin(a+Y) \sin^2\theta}}{e^{-bi} \sin b + e^{ai} \sin a \sin^2\theta} \right]_{-a}^{b-a}$$
$$= 2 \frac{e^{-\frac{a}{2}i} \sqrt{\sin b \sin(a+b)} - e^{\frac{b-a}{2}i} \sqrt{\sin a \sin b} \cos\theta}{e^{-bi} \sin b + e^{ai} \sin a \sin^2\theta},$$

la seconde intégrale s'en déduit par une simple permutation

$$-\int_b^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\,dY}{\sqrt{\sin a \sin(a+Y) - \sin b \sin(b-Y)\sin^2\theta}}$$

$$= 2\,\frac{e^{\frac{b}{2}i}\sqrt{\sin a \sin(a+b)} - e^{\frac{b-a}{2}i}\sqrt{\sin a \sin b}\cos\theta}{e^{ai}\sin a + e^{-bi}\sin b \sin^2\theta}.$$

On obtient ainsi, en intervertissant les termes

$$\delta = -i\,e^{\frac{a+b}{2}i}\sqrt{\sin a \sin b}$$
$$\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin a\, e^{(a+b)i} + \sin b \sin^2\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i}\sin a \sin^2\theta}\right)$$
$$+\, i\sqrt{\sin(a+b)}$$
$$\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{ai}{2}}\sqrt{\sin b}\,d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i}\sin a \sin^2\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{bi}{2}}\sqrt{\sin a}\,d\theta}{\sin a + e^{-(a+b)i}\sin b \sin^2\theta}\right).$$

Posons dans la première intégrale

$$\sin\theta = x\sqrt{\frac{\sin a}{\sin b}},$$

dans la seconde

$$\sin\theta = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sin b}{\sin a}},$$

dans la troisième

$$\tang\theta = x\sqrt{\frac{\sin b}{\sin(a+b)}},$$

dans la quatrième

$$\tang\theta = x\sqrt{\frac{\sin a}{\sin(a+b)}}.$$

On obtient ainsi

$$\delta = -i\,e^{\frac{a+b}{2}i}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + e^{(a+b)i}}$$
$$+\, i\,e^{-\frac{ai}{2}}\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{-ai} + x^2} + i\,e^{\frac{bi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{bi} + x^2};$$

or

$$\int \frac{e^{\frac{\omega i}{2}}\,dx}{e^{\omega i}+x^2} = \frac{i}{2}\log\left(\frac{x+ie^{\frac{\omega i}{2}}}{x-ie^{\frac{\omega i}{2}}}\right)$$

$$= \frac{i}{4}\log\frac{1+x^2-2x\sin\frac{\omega}{2}}{1+x^2+2x\sin\frac{\omega}{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x\cos\frac{\omega}{2}}{x^2-1}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\omega i}{2}}\,dx}{e^{\omega i}+x^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \qquad -\pi < \omega < \pi.$$

En prenant successivement pour ω les valeurs $a+b$, $-a$, b, on a

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

On pourrait, en changeant la valeur de

$$\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

changer les signes de ω et η, alors δ et le coefficient de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ changent de signes en même temps.