NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1901. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 565-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__565_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1901. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Soient Ox, Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires; soient* a *et* a' *les abscisses de deux points* A *et* A′ *de l'axe* Ox, *et* b *l'ordonnée d'un point* B *de l'axe* Oy.

On considère toutes les hyperboles équilatères (H_λ) *circonscrites au triangle* AA′B.

I. *Calculer les coordonnées* x_1, y_1, *du quatrième point* M *de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle* AA′B *avec l'hyperbole* (H_λ). *Montrer qu'en* *désignant par λ un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme :*

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2},$$
$$y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A *et* B.

II. *Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point* M *passe par un point fixe, quel que soit* λ.

Le démontrer géométriquement.

III. *Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles* (H_λ) *parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier les cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.*

I. Tout cercle passant par les points A et A′ a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' + hy = 0.$$

Exprimant qu'il passe par le point B, on a

$$h = -\frac{aa' - b^2}{b}.$$

Si donc nous définissons b' par la relation

$$(1) \qquad aa' + bb' = 0,$$

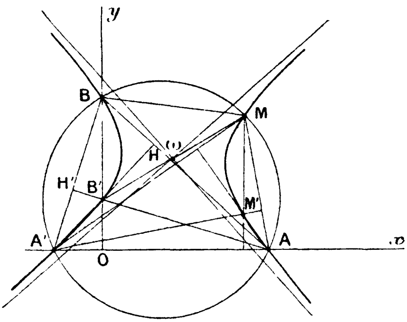
nous voyons que l'équation du cercle C s'écrit

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - (a + a')x + (b' - b)y - aa' = 0.$$

Si M est le quatrième point commun à ce cercle et à l'hyperbole H_λ (*fig.* 1), la droite BM ayant pour équation

$$y = \lambda x + b,$$

Fig. 1.



l'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + (b' - b)y + aa' + \theta y(y - \lambda x - b) = 0.$$

Exprimant qu'elle est équilatère, on a

$$\theta = -2.$$

L'équation de H_λ est donc

$$(3) \quad x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (a + a')x + (b + b')y + aa' = 0,$$

et l'on vérifie immédiatement, en tenant compte de l'équation (1), que cette hyperbole passe, quel que soit λ, par le point $x = 0$, $y = b'$, qui n'est autre que l'*orthocentre* B' *du triangle* ABA', propriété bien connue.

Pour avoir les coordonnées x_1, y_1 du point M, remarquons que, ce point se trouvant sur la droite BM, on a d'abord

$$(4) \qquad y_1 = \lambda x_1 + b.$$

Portant cette valeur de y dans l'équation du cercle et supprimant la racine $x = 0$ qui correspond au point B, on a

$$(5) \qquad x_1 = \frac{a + a' - \lambda(b + b')}{1 + \lambda^2}.$$

II. Si l'on représente par $f(x, y) = 0$ l'équation (3) de H_λ, on a

$$f'_x = 2x \quad + 2\lambda y - (a + a'),$$
$$f'_y = 2\lambda x - 2y \quad + (b + b').$$

L'équation du diamètre passant au point (x_1, y_1) étant

$$f'_x f'_{y_1} - f'_y f'_{x_1} = 0,$$

on a, en remplaçant y_1 par sa valeur tirée de (4),

$$[2x + 2\lambda y - (a + a')](b' - b)$$
$$- (2\lambda x - 2y - b + b')[2(1 + \lambda^2)x_1 + 2\lambda b - (a + a')] = 0,$$

ou, en tenant compte de (5),

$$x[b' - b - \lambda(a + a') + 2b'\lambda^2]$$
$$+ (y - b')[a + a' - (b + b')\lambda] = 0,$$

équation d'une droite *passant constamment par le point* $x = 0$, $y = b'$, *c'est-à-dire par le point* B', *orthocentre de* ABA'.

Géométriquement, cela résulte de ces deux théorèmes bien connus :

1° *Toutes les hyperboles* H_λ *passent par* B' (*vérifié ci-dessus*);

2° *Le lieu de leur centre est le cercle des neuf points de* ABA', *homothétique du cercle* C *par rapport à l'orthocentre* B', *le rapport d'homothétie étant* $\frac{1}{2}$.

Si, en effet, on se donne sur le cercle des neuf points le centre ω d'une des hyperboles H_λ, le symétrique du point B′ par rapport à ω, qui sera la seconde extrémité du diamètre de H_λ passant par B′, se trouvera sur le cercle C. Or, ce cercle, qui coupe déjà H_λ en A, A′ et B, ne la rencontre qu'en un point en dehors de ces trois-là. Le point obtenu est donc bien le point M, et le diamètre de ce point passe par le point fixe B′ [1].

III. Le diamètre conjugué de la direction de coefficient angulaire m par rapport à l'hyperbole H_λ est

$$2x + 2\lambda y - (a + a') + m(2\lambda x - 2y + b + b') = 0.$$

Éliminant λ entre cette équation et celle (3) de l'hyperbole, on a, pour le lieu cherché, en tenant compte de (1), l'équation

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y[x^2 + y^2 - (b + b')y + bb'] \\ & \quad - mx[x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'] = 0, \end{aligned} \right.$$

cubique Γ_m passant par les neuf points communs aux deux cubiques dégénérées constituées par

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} y = 0, \\ x^2 + y^2 - (b + b')y + bb' = 0 \\ \text{(cercle de diamètre BB')}, \end{array} \right.$$

et par

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{c} x = 0, \\ x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' = 0 \\ \text{(cercle de diamètre AA')}. \end{array} \right.$$

---

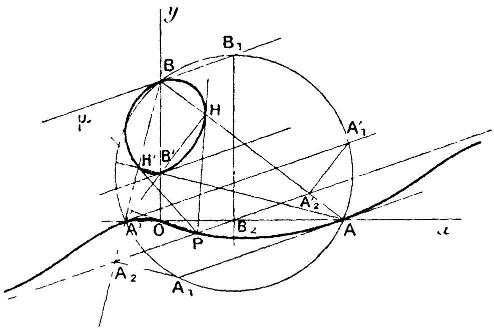
[1] On peut aussi ne s'appuyer que sur le premier des théorèmes énoncés ci-dessus, suivant la variante que voici :

Les cordes communes BM et AA′ à l'hyperbole H_λ et au cercle C sont également inclinées sur les axes de H_λ. Donc BM et la perpendiculaire BB′ à AA′ sont également inclinées sur les asymptotes de H_λ. Ce sont par suite deux cordes supplémentaires de cette hyperbole, et la droite MB′ qui joint les secondes extrémités de ces cordes est un diamètre.

Il suffit alors de remarquer que le centre ω est le milieu de MB′ pour déduire de là le lieu connu de ce point.

Ces neuf points sont les sommets A, A′, B du triangle, son orthocentre B′, les pieds de ses hauteurs O, H, H′, et les deux points cycliques du plan (*fig.* 2). La cu-

Fig. 2.



bique Γ_m est donc circulaire.

Pour le cas où $m = 0$, on a la cubique dégénérée (7) et pour celui où $m = \infty$, la cubique dégénérée (8) (1).

Pour construire la cubique Γ_m dans le cas général, il suffit de remarquer que *l'asymptote réelle de cette courbe est parallèle à la direction m.*

Coupons donc par la droite

$$y = mx + t.$$

Faisant cette substitution dans (6), on trouve, en

(1) *Évident géométriquement :* Si $m = 0$, on voit, en prenant l'hyperbole H_λ dégénérée constituée par Ox et Oy, que Ox fait partie du lieu. Pour voir que le reste du lieu est le cercle de diamètre BB′, il suffit de remarquer que, d'après le théorème de Frégier, aux points où ce cercle coupe une hyperbole H_λ quelconque, la normale est parallèle à BB′, et, par suite, la tangente parallèle à Ox. De même pour le second cas de dégénérescence. La même remarque s'applique évidemment aux directions des deux autres côtés AB, A′B et des deux autres hauteurs AH′ et A′H.

égard à (1), l'équation

$$(9)\quad \begin{cases} [(1+m^2)t-(b+b')m^2+(a+a')m]\,x^2 \\ \qquad +[t^2-(b+b')t+bb'](2mx+t)=0. \end{cases}$$

Elle montre que l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est donnée par

$$(10)\qquad t=-m\,\frac{a+a'-m(b+b')}{1+m^2},$$

et, par suite, son abscisse à l'origine par

$$s=\frac{a+a'-m(b+b')}{1+m^2}.$$

Comparant cette formule à (5), on en déduit que *le point où l'asymptote coupe* AA' *est la projection* B_2 *sur cette droite du point* B_1 *où la droite de direction* m *menée par* B *coupe le cercle* C.

Comme tout est symétrique par rapport aux trois côtés du triangle, une construction analogue fournira les points de rencontre de l'asymptote avec les côtés AB et A'B [1].

La condition de réalité des valeurs de x données par (9) peut s'écrire

$$(11)\quad [t^2-(b+b')t+bb'][t^2+m(a+a')t+m^2aa']\leqq 0.$$

Les valeurs de t qui annulent le premier facteur correspondent aux parallèles à la direction m menées par

---

[1] Le rapprochement de ces trois constructions fournit ce théorème :

Les parallèles à une même direction Δ*, menées par les trois sommets d'un triangle, coupent le cercle circonscrit en des points dont les projections sur les côtés opposés sont sur une même droite parallèle à* Δ.

Coïncidence curieuse : ce théorème a servi de sujet pour le concours général de Mathématiques élémentaires en 1898.

les points B et B′, celles qui annulent le second aux parallèles à la direction m menées par les points A et A′. Il résulte d'abord de là que *ces quatre droites parallèles à la direction* m *sont respectivement les tangentes à la cubique en* B, B′, A et A′.

L'inégalité (11) montre ensuite que, si l'on considère les trois bandes contiguës formées par ces quatre droites parallèles et les deux régions extérieures à ces bandes, il ne peut y avoir de points de la cubique Γ_m ni dans ces deux régions, ni dans la bande centrale.

La tangente à l'origine de la courbe est donnée par

$$y + mx = 0,$$

droite symétrique de la droite de direction m menée par O, par rapport à AA′.

Par raison de symétrie, la construction s'étendra aux tangentes en H et en H′, pieds des hauteurs sur les côtés AB et A′B. Il est facile de voir que *ces trois tangentes concourent en un même point* P *du cercle des neuf points du triangle* ABA′. On a, en effet, d'après la construction qui vient d'être indiquée,

$$\begin{aligned} A'H'P &= \mu BH', \\ AHP &= B_1BH, \end{aligned}$$

d'où, en additionnant,

$$H'BH + H'PH = 180^\circ - H'BH,$$

ou

$$H'PH = 180^\circ - 2H'BH,$$

ce qui prouve que le point P est sur le cercle passant par les pieds H, H′, O des trois hauteurs, c'est-à-dire sur le cercle des neuf points.

D'après l'équation (9), t ayant la valeur (10) correspondant à l'asymptote, l'abscisse du point de rencontre de cette asymptote et de la cubique est donnée par

$$(12) \qquad 2mx + t = 0,$$

c'est-à-dire que cette abscisse est la moitié de celle du point B_2 où l'asymptote elle-même coupe Ox. Cela montre que le point cherché n'est autre que le point P qui vient d'être trouvé, puisque le triangle OPB_2 est isoscèle.

En résumé :

La cubique Γ_m correspondant à la direction de coefficient angulaire m est une cubique circulaire passant par les trois sommets, l'orthocentre et les pieds des hauteurs du triangle donné. Les tangentes aux trois sommets, celle à l'orthocentre et l'asymptote sont parallèles à la direction m (¹). *Les tangentes aux pieds des hauteurs concourent au point où l'asymptote rencontre la courbe, point qui appartient au cercle des neuf points du triangle donné.*

Ces diverses remarques, jointes à celle faite précédemment sur les régions de réalité, fixent de façon très nette la forme générale de la courbe qui est celle représentée sur la *fig.* 2.

On voit que si l'un des angles du triangle est droit, le sommet de cet angle constitue un point double de la cubique, isolé ou effectif suivant qu'il se trouve en dehors ou en dedans des parallèles à la direction m menées par les deux autres sommets. La cubique est alors unicursale.

Supposons, par exemple, que ce soit l'angle A' qui soit

(¹) De là résulte, en vertu d'un théorème connu, que Γ_m est anallagmatique par rapport aux trois sommets du triangle et à son orthocentre.

droit. Alors

$$a' = b' = 0,$$

et l'équation (6) devient

$$(y - mx)(x^2 + y^2) - by^2 + max^2 = 0.$$

L'équation de l'ensemble des tangentes à l'origine est

$$by^2 - max^2 = 0.$$

Ces tangentes, également inclinées sur Ox, sont rectangulaires si

$$b - ma = 0,$$

c'est-à-dire *si la direction m est celle de la médiane issue de* A' *dans le triangle* ABA'. Dans ce cas, la cubique Γ_m, unicursale circulaire, ayant des tangentes rectangulaires en son point double, est une *strophoïde.*

Remarque complémentaire. — A la direction m correspond une hyperbole du faisceau défini dans la première partie, que nous représenterons par H_m, et qui s'obtient en faisant coïncider le point M de la *fig.* 1 avec le point B_1 de la *fig.* 2. La cubique Γ_m et l'hyperbole H_m, qui ont déjà en commun les quatre points A, A', B, B', se coupent en deux autres points qui sont ceux de l'hyperbole H_m où la tangente à cette courbe a la direction m. Ces points se trouvent donc sur le diamètre de cette hyperbole conjugué de cette direction, c'est-à-dire sur la droite qui joint le centre (milieu de $B'B_1$) au milieu de la corde BB_1 qui est précisément de direction m. Cette droite, parallèle équidistante de OB et de B_1B_2, passe, d'après ce qui vient d'être vu, par le point P où la cubique rencontre son asymptote. Ainsi :

Les points où l'hyperbole H_m *rencontre la cubique* Γ_m *sont sur le diamètre de cette hyperbole perpendiculaire à* AA', *diamètre qui passe par le point* P *où la cubique rencontre son asymptote.*

La vérification analytique de ce théorème peut être ainsi faite :

L'équation de l'hyperbole H_m, obtenue en remplaçant λ par m dans (3), peut s'écrire

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' + 2mxy - 2y^2 + (b + b')y = 0.$$

Éliminant le polynome $x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'$ entre cette équation et l'équation (6) de Γ_m, on a, après suppression de la solution $y = 0$ qui donnerait les points A et A′,

$$x^2 + y^2 - (b + b')y + bb' + mx(2mx - 2y + b + b') = 0.$$

L'addition des deux dernières équations écrites donne, en tenant compte de (1), et après suppression de la solution $x = 0$ qui donnerait les points B et B′,

$$2(1 + m^2)x + m(b + b') - (a + a') = 0.$$

Cette équation est bien l'équation (12) de la parallèle à Ox menée par P, dans laquelle t a la valeur (10).