NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Propriétés générales des substitutions à une variable et des fonctions qu'elles laissent invariables

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 529-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__529_0>

[D5d]

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SUBSTITUTIONS A UNE VARIABLE ET DES FONCTIONS QU'ELLES LAISSENT INVARIABLES;

PAR M. E. IAGGI.

Dans deux Notes précédentes ([1]), nous avons considéré, sous le nom de *fonctions périodiques* ([2]), des fonctions *complètes* ([3]) $F(x)$ telles qu'il existe des substitutions à x qui laissent invariables ces fonctions; et nous avons montré que toute fonction complète uniforme, c'est-à-dire toute fonction uniforme sans points critiques, est une fonction périodique, et en outre qu'il existe des fonctions complètes multiformes qui sont périodiques. Nous avons vu aussi que toute fonction complète périodique *ponctale* ([4]), uniforme ou multiforme, a pour groupe de substitutions un groupe *discontinu*, et que toute fonction complète périodique improprement *linéale* ([5]) ou *aréale* ([6]), a pour groupe de substitutions un groupe *continu*.

1. Considérons une fonction *périodique* $F(x)$ quelconque, et le groupe, discontinu ou continu, de ses substitutions. Les substitutions, ou, dans notre langage abrégé, les fonctions $s(x)$ elles-mêmes que l'on peut

([1]) *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, avril 1901). — *Sur les substitutions à une variable et les fonctions qu'elles laissent invariables* (*Ibid.*, octobre 1901).

([2]), ([3]), ([4]), ([5]), ([6]), *Voir*, au sujet de ces termes, les deux Notes citées.

substituer à x, sont *toutes les racines* de l'équation

$$F(s) = F(x),$$

et ce sont des racines *simples* de cette équation, ainsi que nous l'avons vu, sauf pour des valeurs particulières de x qui sont les *points multiples* ([1]) du groupe. Soient $s_i(x)$, $s_j(x)$ deux substitutions quelconques du groupe. On a

$$F\big(s_i(x)\big) = F(x) = F\big(s_j(x)\big)$$

et, par conséquent,

$$F\Big(s_i\big(s_j(x)\big)\Big) = F\big(s_j(x)\big) = F(x) = F\Big(s_j\big(s_i(x)\big)\Big).$$

Donc, *si* $s_i(x)$ *et* $s_j(x)$ *sont deux substitutions quelconques d'un groupe, les deux fonctions* $s_i\big(s_j(x)\big)$, $s_j\big(s_i(x)\big)$ *sont aussi des substitutions du groupe*. Il résulte de là que si, dans toutes les substitutions d'un groupe, on fait à x une substitution du groupe, on ne peut obtenir ainsi que des substitutions du groupe. D'ailleurs, on ne peut obtenir deux fois la même substitution; car si, ayant substitué $s_i(x)$ à x, on avait, s_p et s_q étant distinctes,

$$s_p\big(s_i(x)\big) = s_q\big(s_i(x)\big),$$

on aurait, en faisant à x la substitution σ_i inverse de s_i,

$$s_p\Big(s_i\big(\sigma_i(x)\big)\Big) = s_q\Big(s_i\big(\sigma_i(x)\big)\Big)$$

et, par conséquent,

$$s_p(x) = s_q(x),$$

ce qui n'est pas. Il s'ensuit que si, dans un groupe quelconque, on fait à x une substitution quelconque du groupe, ce groupe, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les

---

([1]) *Voir*, au sujet de ce terme, les deux Notes citées.

substitutions, y compris la substitution identique, reste *invariable.*

Ceci conduit immédiatement à considérer une fonction périodique $F(x)$ quelconque comme une fonction *symétrique* des substitutions de son groupe. Ainsi, par exemple, lorsque le nombre des substitutions $s_i(x)$ est fini, la fonction symétrique

$$x\prod s_i(x)$$

est une fonction périodique du groupe considéré, et cela se vérifie aisément, si l'on considère, par exemple, le groupe d'un polynome

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

L'équation

$$F(s) = F(x)$$

ou

$$a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} s + a_m - F(x) = 0,$$

montre que le produit des racines, $x\prod s_i$, est

$$\frac{a_m - F(x)}{a_0}$$

et, par suite, que toutes les fonctions entières

$$\lambda x\prod s_i + \mu = \lambda' F(x) + \mu',$$

où λ, μ, λ', μ' sont des constantes et dont l'une est le produit considéré, ont pour groupe de substitutions le groupe de $F(x)$.

Dans tous les cas où le nombre des substitutions du groupe est fini, on obtient une fonction périodique par le produit $x\prod s_i(x)$; car ce produit est nécessairement convergent, et invariable pour les substitutions du groupe. Mais lorsque le nombre des substitutions est infini, le produit $\lambda x \prod s_i(x)$ (qui peut d'ailleurs n'être pas convergent) ne donne pas généralement de fonction périodique du groupe, lorsqu'il est convergent.

Le produit convergent

$$x \prod \left(1 - \frac{x^2}{m^2 \pi^2}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

qui est, à un facteur constant près, le produit des substitutions de $\tang x$, en est un exemple. Cependant le produit, à un facteur constant près, des substitutions de $\sin x$

$$x \prod \left[1 - \frac{x^2}{(2m\pi)^2}\right] \prod \left[1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right]$$
$$(m = 1, 2, \ldots; \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

n'est autre que la fonction $\sin x$ elle-même; mais ceci ne se présente que dans des cas très particuliers. Nous verrons dans la suite une méthode générale de détermination des fonctions périodiques dont on donne le groupe.

2. Considérons un groupe quelconque, discontinu ou continu, de substitutions, que nous désignerons par G. Désignons par $s_1(x)$ une substitution quelconque du groupe G; la substitution $s_1(s_1(x))$, que nous désignerons par $s_2(x)$, fait partie du groupe et il en sera de même des substitutions

$$\begin{aligned} s_3(x) &= s_1(s_2(x)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n+1}(x) &= s_1(s_n(x)), \\ s_{n+p}(x) &= s_p(s_n(x)). \end{aligned}$$

Nous considérerons deux cas :

1° Le cas où, m étant un nombre fini, on arrive ainsi par *itération* de $s_1(x)$ à la substitution identique

$$s_m(x) = x;$$

2° Le cas où, quelque grand que soit m, on n'arrive jamais, par itération de $s_1(x)$, à la substitution identique.

Dans le premier cas, on peut écrire

$$x = s_m(x) = s_1\big(s_{m-1}(x)\big) = s_p\big(s_{m-p}(x)\big).$$

Il s'ensuit que s_1 et s_{m-1}, que s_p et s_{m-p}, sont *inverses l'une de l'autre,* autrement dit, que deux substitutions équidistantes des extrêmes, dans la suite

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_{m-2}, \quad s_{m-1}$$

sont *inverses* l'une de l'autre. Si $m - 1$ est impair, c'est-à-dire si m est pair, il y a une substitution, au milieu de cette suite, *qui est inverse d'elle-même*. On peut désigner si l'on veut par s_{-p} au lieu de s_{m-p} la substitution inverse de s_p, en remarquant que

$$x = s_0(x) = s_m(x) = s_{2m}(x) = \ldots,$$

car alors

$$s_{m-p}(x) = s_m\big(s_{-p}(x)\big) = s_{-p}(x);$$

en appliquant aux indices négatifs la règle exprimée par l'égalité

$$s_{n+p}(x) = s_n\big(s_p(x)\big) = s_p\big(s_n(x)\big).$$

Cette notation a son importance pour l'étude du second cas. Mais remarquons que l'ensemble des substitutions

$$x, \quad s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots. \quad s_{m-1}(x)$$

reste invariable (ou que ses éléments ne sont que permutés), lorsqu'on fait à x une des m substitutions de cet ensemble; que, par suite, cet ensemble constitue un *groupe,* car on peut concevoir et même former une fonction symétrique de ces substitutions, c'est-à-dire une fonction périodique ayant pour groupe cet ensemble de substitutions; le produit

$$x\prod_{1}^{m-1} s_i(x)$$

est une de ces fonctions. Ainsi, les fonctions *itérées* $s_i(x)$ forment par leur ensemble un *groupe,* et si en formant ces fonctions par répétition de $s_i(x)$ nous n'avons pas épuisé toutes celles du groupe G donné où nous avons pris s_1, on pourra dire que le groupe que nous venons de former *est contenu dans* G, ou enfin est un *sous-groupe g contenu dans* G.

Dans le second cas, où si grand que soit m, aucune substitution $s_m(x)$ obtenue par répétition de $s_1(x)$ n'est identique à x, on n'obtient jamais par ces répétitions une fonction inverse des fonctions itérées successives

$$s_1. \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_p(x), \quad \ldots, \quad s_m, \quad \ldots$$

car si l'on avait, pour des nombres finis n et p,

$$s_n(x) = s_{-p}(x),$$

on aurait

$$s_{n+p}(x) = x,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; on démontre d'ailleurs d'une manière analogue que les substitutions $s_n(x)$ sont toutes distinctes.

Afin de constituer un ensemble analogue à celui qui s'est présenté dans le cas précédent, nous adjoindrions aux précédentes substitutions en nombre infini, la substitution s_{-1}, inverse de s_1, et toutes celles qu'on en déduit par répétition. Toutes ces substitutions en nombre infini

$$s_{-1}, \quad s_{-2}, \quad s_{-3}, \quad \ldots, \quad s_{-n}, \quad \ldots$$

sont respectivement les inverses des substitutions

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

ainsi qu'on le vérifie aisément. L'ensemble constitué par cette double infinité de substitutions auxquelles on adjoint $s_0 = x$, jouit de cette propriété de rester invariable (ses éléments ne sont que permutés) lorsqu'on fait à x une des substitutions de cet ensemble, et si l'on ne peut vérifier l'existence d'une fonction symétrique des éléments de cet ensemble, on peut du moins la concevoir; ceci nous suffit pour désigner encore sous le nom de *groupe* cet ensemble de substitutions : toute fonction symétrique des $s_n(x)$, s'il en existe, sera une fonction périodique ayant cet ensemble pour groupe.

Toutes les substitutions s_{-n}, comme les substitutions s_n, sont contenues dans le groupe G, car ce groupe, contenant s_n, contient son inverse s_{-n}; le groupe que nous venons de former est donc, ou identique à G, ou contenu dans G; s'il est contenu dans G, on pourra l'appeler un *sous-groupe g contenu dans* G.

3. Les groupes g, d'un nombre fini ou infini de substitutions que nous venons de considérer, sont remarquables en ce sens qu'une seule substitution $s_1(x)$ suffit pour trouver toutes les autres, c'est-à-dire pour déterminer chacun de ces groupes. La substitution $s_1(x)$ sera appelée la *substitution fondamentale* du groupe g formé par itération et inversion de $s_1(x)$. Quant au groupe g, on dira qu'il est *d'ordre* 1, en désignant par

ordre d'un groupe, le plus petit nombre de substitutions fondamentales qui suffisent à le déterminer, comme nous l'expliquerons dans la suite.

Il est certain que toutes les substitutions $s_n(x)$ d'un groupe g d'ordre 1 ont entre elles quelque chose de commun, puisqu'elles proviennent toutes d'itération ou d'inversion de $s_1(x)$. On peut dire que dans la suite finie ou infinie

$$\ldots,\quad s_{-n},\quad \ldots,\quad s_{-2},\quad s_{-1},\quad s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n,\quad \ldots,$$

s_n est fonction de n en même temps que de x : n sera appelé le *paramètre des substitutions du groupe;* quant aux coefficients, que contiennent les s_n, et qui ne dépendent pas de n et par suite sont les mêmes dans toutes les substitutions de ce groupe, ce seront les *constantes du groupe.*

Supposons que le groupe d'ordre 1 considéré ne contienne qu'un nombre fini m de substitutions; ces substitutions sont alors algébriques, car le groupe contient non seulement la substitution inverse s_{-n} d'une substitution s_n quelconque et qui est telle que

$$s_{-n}(s_n(x)) = x,$$

mais encore toutes les fonctions partielles qu'il faut adjoindre soit à s_n, soit à s_{-n} pour former une fonction complète; en sorte que si s_n était transcendante, le nombre de ces fonctions partielles, s'_n, s''_n, ..., ou s'_{-n}, s''_{-n}, ..., serait infini et par suite le groupe contiendrait une infinité de substitutions. Ceci étant, on pourra prendre pour paramètre, au lieu de n, une racine m^{ieme} de l'unité :

$$\lambda_n = e^{\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{m}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

et l'équation

$$F(s) = F(x),$$

où F est une fonction périodique de groupe g, permet d'écrire les substitutions sous la forme

$$s_n(x) = \varphi(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_1^n).$$

Il s'ensuit qu'au lieu de s_1, on pourra prendre, pour substitution fondamentale du groupe, toute substitution s_p telle que les puissances de λ_1^p donnent les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité : ces substitutions s_p sont donc telles que λ_1^p est une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire que p est premier avec m; on en sait former le nombre au moyen des diviseurs premiers de m. En particulier, si m est un nombre premier, chacune des substitutions s_p peut être prise pour substitution fondamentale.

L'itération d'une substitution s_p dans laquelle p n'est pas premier, avec m, donne des substitutions du groupe, mais ne les donne pas toutes; leur ensemble constitue évidemment aussi un groupe, mais ce groupe est contenu comme sous-groupe dans le groupe g, et le nombre des substitutions de ce nouveau groupe est un diviseur de m.

Lorsque le nombre des substitutions de g est infini, les substitutions ne sont pas nécessairement algébriques et l'on ne peut généralement prendre pour paramètres des racines imaginaires de l'unité (cependant dans le cas du groupe continu d'ordre 1 de la fonction improprement linéale

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m,$$

où m est incommensurable, on peut prendre pour paramètre une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité). Mais on pourra, le plus souvent, distinguer comme précédemment dans le groupe, des substitutions autres que s_1, qui pourraient être prises, chacune, pour substitution fondamentale;

l'itération et l'inversion de toute autre ne donnerait qu'un sous-groupe contenu dans g.

4. Considérons maintenant les points multiples de g. Soit α un point multiple où l'on a

$$s_p(\alpha) = \alpha.$$

Il s'ensuit immédiatement

$$s_p(\alpha) = s_{2p}(\alpha) = s_{3p}(\alpha) = \ldots = \alpha.$$

Ainsi, toutes les substitutions du groupe d'ordre 1 dont $s_p(\alpha)$ est la substitution fondamentale deviennent identiques à α, pour $x = \alpha$. Si $s_p(x)$ est une des substitutions qui peuvent être prises pour substitution fondamentale du groupe g d'ordre 1 primitivement formé au moyen de $s_1(x)$, α appartient à toutes les substitutions du groupe g (si le nombre des substitutions est un nombre fini m, nous rappelons que p est premier avec m). Si $s_p(x)$ n'est pas une substitution pouvant être prise pour substitution fondamentale, il peut arriver que α n'appartienne pas à toutes les substitutions du groupe g. Si le nombre m était un nombre fini premier, on voit que le point α serait nécessairement commun à toutes les substitutions du groupe g ([1]).

Dans le cas où g contient une infinité de substitutions obtenues par itération et inversion de $s_1(x)$, on doit faire croître indéfiniment n dans $s_n(x)$. Si $s_n(x)$ a une limite finie, cette limite est indépendante de x; en effet $s_n(x)$ et $s_{n+1} = s_1(s_n)$ ont nécessairement même limite;

([1]) Ces propriétés ont été étudiées dans certains cas particuliers par plusieurs mathématiciens, notamment par M. Kœnigs. Notre méthode tire sa simplicité et sa généralité de l'hypothèse de l'existence de la fonction périodique $F(x)$, qui nous a permis de nous servir de l'équation aux substitutions $F(s) = F(x)$.

il s'ensuit que si $\sigma(x)$ est la limite de s_n, $s_1(\sigma(x))$ est la limite de s_{n+1} et par conséquent

$$s_1(\sigma(x)) = \sigma(x),$$

ce qui est impossible, à moins que : 1° σ ne soit constant; 2° la valeur de la limite σ ne soit un point multiple de s_1 et, par suite, de toutes les autres substitutions. D'autre part, si a est cette limite finie de $s_n(x)$, on a

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a),$$

puisque a est une substitution du groupe, limite de $s_n(x)$; cette égalité est impossible quel que soit x, à moins que $\mathrm{F}(a)$ ne soit indéterminée; donc :

Toute limite finie de la substitution $s_n(x)$, itérée de $s_1(x)$ lorsque n croît indéfiniment, est une constante a et cette constante est à la fois un point multiple commun à toutes les substitutions du groupe d'ordre 1, *et un point singulier essentiel de la fonction périodique* $\mathrm{F}(x)$ *de groupe* g.

On en a un exemple dans les substitutions données par l'égalité

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{x-a} + \frac{n}{b} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

qui sont les substitutions de la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \operatorname{tang} \frac{\pi b}{x-a},$$

et des transformées linéaires de cette fonction; le point a est à la fois un point multiple du groupe, le seul d'ailleurs, et un point essentiel de la fonction $\mathrm{F}(x)$.

On peut ajouter d'une manière générale et pour un groupe d'ordre quelconque que, les substitutions $s_n(x)$

laissant $F(x)$ invariable, les zéros, les infinis, les points singuliers essentiels de $F(x)$ ou restent invariables par les substitutions du groupe, et alors ce sont des points multiples, ou sont transformés en des points qui sont respectivement de même nature qu'eux-mêmes.

5. Ayant pris une substitution quelconque $s_1(x)$ dans un groupe G quelconque, nous avons formé le sous-groupe d'ordre 1 dont $s_1(x)$ est la substitution fondamentale et, à cette occasion, nous avons démontré les propriétés générales des groupes d'ordre 1. Soit maintenant g_1 le sous-groupe formé au moyen de $s_1(x)$ et soit $s_2(z)$ une substitution de G qui n'appartienne pas à g_1; on peut former un sous-groupe g_2 d'ordre 1 dont la substitution fondamentale soit s_2. Si g_2 contient g_1, nous laisserons g_1 de côté; si g_2 et g_1 ont quelques substitutions communes, nous rejetterons s_2 et prendrons une autre substitution de G; nous nous placerons donc dans le cas où g_1 et g_2 n'ont aucune substitution commune. G contient toutes les substitutions formées par combinaisons de substitutions de g_1 et de substitutions de g_2. Formons toutes ces substitutions; leur ensemble, en y comprenant les substitutions de g_1 et celles de g_2, restera invariable si l'on y fait à x une substitution prise dans cet ensemble; ses éléments ne seront que permutés. Cet ensemble est donc un *groupe* $g_{1,2}$ d'ordre 2, contenu comme sous-groupe dans G, et contenant comme sous-groupes g_1 et g_2.

Soit maintenant g_3 un nouveau sous-groupe d'ordre 1, formé au moyen d'une substitution s_3 de G n'appartenant pas à $g_{1,2}$, et supposons comme plus haut que g_3 n'ait aucune substitution commune avec $g_{1,2}$. Toutes les substitutions formées par combinaisons des substitutions de g_3 et de $g_{1,2}$ appartiennent à G et forment, avec celles de g_3 et de $g_{1,2}$, un sous-groupe $g_{1,2,3}$ d'ordre 3, contenu dans G, et contenant comme sous-groupes g_3, $g_{1,2}$ et par suite g_1 et g_2. Mais si l'on forme le groupe d'ordre 2, $g_{2,3}$, au moyen des substitutions fondamentales s_2 et s_3, on voit que ce groupe est contenu dans $g_{1,2,3}$ et contient g_2 et g_3 ; de même le groupe d'ordre 2, $g_{1,3}$, formé au moyen des substitutions fondamentales s_1 et s_3, est contenu dans $g_{1,2,3}$ et contient g_1 et g_3. En résumé, le sous-groupe d'ordre 3, $g_{1,2,3}$ contient les trois sous-groupes d'ordre 2, $g_{1,2}$, $g_{2,3}$, $g_{1,3}$ qui contiennent eux-mêmes, chacun, deux des sous-groupes d'ordre 1, g_1, g_2, g_3.

Formant un nouveau sous-groupe d'ordre 1, g_4, au moyen d'une substitution s_4 de G, qui n'appartienne pas à $g_{1,2,3}$, on aura par combinaisons des substitutions de ces deux groupes, des substitutions formant avec g_3 et $g_{1,2,3}$ un sous-groupe $g_{1,2,3,4}$ d'ordre 4, contenu dans G, et ce sous-groupe contiendra tous les sous-groupes d'ordres respectifs 3, 2, 1,

$$g_{2,3,4},\quad g_{1,3,4},\quad g_{1,2,4},\quad g_{1,2,3},$$
$$g_{1,2},\quad g_{1,3},\quad g_{1,4},\quad g_{2,3},\quad g_{2,4},\quad g_{3,4},$$
$$g_1,\quad g_2,\quad g_3,\quad g_4,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les substitutions de G; nous supposons qu'avec un nombre fini de substitutions fondamentales s_1, s_2, ..., s_n on soit arrivé à former une suite de sous-groupes

$$g_1,\quad g_{1,2},\quad g_{1,2,3},\quad \ldots,\quad g_{1,2,3,\ldots,n},$$

dont le dernier, $g_{1,2,\ldots,n}$, qui est d'ordre n, soit identique à G. Dans cette suite de sous-groupes, on peut remarquer que l'un quelconque d'entre eux contient comme sous-groupes tous ceux qui le précèdent et est contenu dans ceux qui le suivent. Les éléments de formation de G ont été $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

On peut considérer aussi comme éléments de cette formation les sous-groupes *fondamentaux* d'ordre 1,

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_n.$$

On aurait une autre suite de sous-groupes, en partant d'un sous-groupe g_{p_1} d'ordre 1, et combinant ses substitutions avec celles d'un autre sous-groupe g_{p_2} d'ordre 1 et ainsi de suite :

$$g_{p_1}, \quad g_{p_1,p_2}, \quad g_{p_1,p_2,p_3}, \quad \ldots, \quad g_{p_1,p_2,\ldots,p_n},$$

où les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne sont autres que les n premiers nombres et les g_p les mêmes sous-groupes fondamentaux d'ordre 1 que précédemment, mais rangés dans un ordre différent.

Dans les n sous-groupes fondamentaux, on peut d'ailleurs choisir d'autres substitutions fondamentales que celles qui ont été primitivement choisies : on aurait d'autres systèmes fondamentaux de substitutions de G, mais qui donneraient les mêmes sous-groupes fondamentaux. Mais on peut aussi partir de substitutions n'appartenant à aucun des n sous-groupes d'ordre 1 formés : on obtiendra ainsi de nouvelles formations de G et d'autres suites de sous-groupes d'ordre $1, 2, \ldots, n'$ n'ayant rien de commun avec les premières; dans chacune de ces formations le dernier groupe obtenu, qui sera d'ordre n', sera identique à G.

Nous réserverons le terme d'*ordre du groupe* G au plus petit N des nombres $n, n', n'', \ldots$ et le terme de *système fondamental* à N substitutions ou à N sous-groupes d'ordre 1, qui suffisent à déterminer G.

Si l'on forme N sous-groupes fondamentaux d'ordre 1 d'un groupe G d'ordre N, puis, au moyen d'une substitution qui n'appartient pas à ces N sous-groupes, un nouveau sous-groupe d'ordre 1, puis, au moyen d'une substitution de G qui n'appartient pas à ces N + 1 sous-groupes, un nouveau sous-groupe d'ordre 1 et ainsi de suite, on voit que G peut être considéré comme un ensemble de sous-groupes d'ordre 1, car on arrivera ainsi nécessairement à épuiser les substitutions de G. Ce théorème nous sera utile dans les applications.

Soient deux groupes, G et G' d'ordres quelconques, et supposons que ces deux groupes aient des substitutions communes. Si $s_i(x)$ et $s_j(x)$ sont deux quelconques de ces substitutions communes, la substitution $s_i(s_j(x))$ est aussi une substitution qui appartient à G et à G'; les itérées et les inverses de s_i, de s_j, de $s_i(s_j(x))$ sont aussi des substitutions communes. Les substitutions communes à G et à G', étant telles, que leur ensemble contient toutes les substitutions formées en faisant à x une substitution quelconque de cet ensemble, *forment un groupe* g. Donc, lorsque deux groupes G et G' quelconques ont des substitutions communes, les deux groupes G et G' ont en commun un sous-groupe g et n'ont pas d'autres substitutions communes que celles de ce sous-groupe g, dont l'ordre peut d'ailleurs être un nombre entier quelconque inférieur aux ordres respectifs de G et de G'.

6. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions complètes uniformes et par conséquent périodiques. La fonction

$$F(x) = \varphi(f(x))$$

est également une fonction complète uniforme et par conséquent une fonction périodique. Soient G, g, γ les groupes respectifs de F, f et φ; s_1, s_2, s_3, ..., et σ_1, σ_2,

σ_3, ... les substitutions respectives de f et de φ, formant les groupes g et γ. $F(x)$ admet évidemment toutes les substitutions de $f(x)$ et, par conséquent, g est contenu comme sous-groupe dans G. Les substitutions de F qui n'appartiennent pas à f, c'est-à-dire les substitutions qui, dans G, ne sont pas contenues dans g, sont des substitutions $t_1(x)$, $t_2(x)$, ... qui transforment $f(x)$ en les substitutions $\sigma(f)$ de la fonction $\varphi(f)$:

$$f(t_i(x)) = \sigma_j(f(x)).$$

Réciproquement, si deux fonctions complètes uniformes $F(x)$ et $f(x)$ ont des groupes G et g, tels que g est contenu comme sous-groupe dans G, $F(x)$ est une certaine fonction complète uniforme φ de $f(x)$ [1], car, puisque g est contenu dans G, une valeur de $f(x)$ ne détermine qu'une valeur $F(x)$ [en dehors de certaines valeurs particulières de f, qui seraient, lorsqu'elles existent, des points singuliers essentiels de φ, et correspondent à des points singuliers essentiels x de $F(x)$].

Soient G un groupe d'ordre N et

$$g_1, \quad g_{1,2}, \quad g_{1,2,3}, \quad \ldots, \quad g_{1,2,\ldots,N}$$

une suite de sous-groupes telle que celles que nous avons formées précédemment (5) où le dernier $g_{1,2,\ldots,N}$ est

(1) Nous nous sommes servi de ces propriétés dans l'étude d'une certaine fonction uniforme $\varphi(y)$ qui est telle que

$$\operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin\frac{\pi}{2K}x\right), \qquad \operatorname{sn}(K+x) = \varphi\left(\cos\frac{\pi}{2K}x\right)$$

[*Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en intégrale circulaire* (*Nouvelles Annales,* décembre 1900)]. On se sert également de cette propriété dans la théorie des fonctions elliptiques, lorsqu'on exprime $\Theta(x)$ au moyen de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$.

identique à G. Si $F(x)$ est une fonction complète uniforme de groupe G et $f_{1,2,\ldots,p}(x)$ une fonction complète uniforme de groupe $g_{1,2,\ldots,p}$, F sera une certaine fonction complète uniforme de $f_{1,2,\ldots,p}$, et l'on voit que F pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = \varphi_N\Big(\varphi_{N-1}\Big(\ldots\Big(\varphi_3\big(\varphi_2(f_1(x))\big)\Big)\ldots\Big)\Big),$$

où f_1, φ_2, φ_3, ..., φ_N sont des fonctions complètes uniformes.

Les diverses formations que l'on peut faire du groupe G d'ordre N conduisent à diverses formes analogues de $F(x)$. Nous n'insistons pas davantage, mais nous ferons remarquer que ces propriétés pourraient être utiles dans la théorie générale des fonctions uniformes et de leurs inverses.

Si deux fonctions complètes uniformes y_1, y_2 sont liées par une relation algébrique de degré m_1 en y_1 et m_2 en y_2 et si y_1 a plus de m_2 substitutions, y_1 et y_2 ont des substitutions communes et, par suite, d'après ce qui précède (5), un *sous-groupe commun*, car s'il n'y avait pas de substitutions communes, le nombre des valeurs de y_2, déterminées par une valeur de y_1, serait égal au nombre des substitutions de y_1 et, par conséquent, serait supérieur à m_2; y_1 a d'ailleurs au moins m_2 substitutions (y compris la substitution identique). On peut tenir le même raisonnement sur la fonction y_2. Si g est le sous-groupe commun aux groupes de y_1 et y_2 et s'il existe une fonction complète uniforme u de groupe g, c'est-à-dire admettant les substitutions de g et seulement celles-là, y_1 et y_2 sont fonctions complètes uniformes de u.

Il résulte de ce qui précède, que deux fonctions complètes uniformes de x qui ont toutes leurs substitutions communes, c'est-à-dire ont le même groupe, *sont fonctions complètes uniformes l'une de l'autre,* c'est-à-dire sont liées par une équation linéaire par rapport à chacune d'elles, ou enfin, que toutes les fonctions complètes uniformes qui ont pour substitutions celles de G, et seulement celles-là, sont les fonctions

$$\text{(A)} \qquad \frac{\lambda F(x) + \mu}{\nu F(x) + \rho},$$

$F(x)$ étant l'une d'elles et λ, μ, ν, ρ des constantes.

7. Toutes les propriétés que nous avons démontrées sur les groupes (1 à 6) sont démontrées dans le cas général et quel que soit le groupe, discontinu ou continu, et par suite quelle que soit la fonction $F(x)$, uniforme ou multiforme, ponctale ou improprement linéale ou aréale.

Les théorèmes que nous venons de démontrer (6) sur les fonctions $F(x)$ ne sont relatifs qu'aux fonctions complètes uniformes. Toutefois on peut dire que si $f(x)$ est une fonction complète multiforme périodique ainsi que $\varphi(x)$, la fonction $\varphi(f(x))$ admet toutes les substitutions de $f(x)$ et en outre celles qui changent $f(x)$ en une substitution $\sigma(f)$ de la fonction périodique $\varphi(f)$; mais ce théorème ne donne pas lieu à une réciproque comme dans le cas des fonctions uniformes. On peut dire aussi que si F est une fonction multiforme de groupe G, toutes les fonctions données par la formule (A) sont aussi des fonctions de groupe G; mais on ne peut plus dire que ces fonctions (A) sont *les seules* qui admettent les substitutions de G et seulement celles-là.

Nous sommes donc ici obligés de séparer le cas des fonctions complètes multiformes périodiques du cas des fonctions complètes uniformes [1]. Cependant nous verrons plus tard que les calculs que nous ferons pour déterminer, lorsqu'elles existent, les fonctions complètes uniformes admettant les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là, s'appliquent également au moins à certains cas de fonctions multiformes périodiques, ponctales ou improprement linéales ou aréales, lorsqu'il n'existe pas de fonctions uniformes du groupe donné. C'est, en particulier, ce que l'on peut dire des considérations suivantes :

8. Si $F(x)$ est une fonction complète uniforme, elle se met sous forme de quotient de deux fonctions entières, $\Theta_1(x)$ et $\Theta_2(x)$. Toutes les fonctions (A) de même groupe G que $F(x)$ s'expriment donc par le quotient de deux fonctions entières de la forme

$$\Theta = \lambda\Theta_1 + \mu\Theta_2, \tag{B}$$

où λ et μ sont des constantes. Lorsqu'on fait à x une substitution du groupe G, les fonctions Θ, dont les quotients demeurent invariables, ne peuvent être que multipliées, toutes, par un même facteur $\theta(x)$. Ainsi qu'on l'a déjà fait dans certains cas particuliers, nous appellerons ces fonctions Θ, les *fonctions à multiplicateur relatives au groupe* G *donné*.

Les fonctions Θ, relatives à un groupe G, s'exprimant, toutes, en fonction linéaire et homogène (B) de deux quelconques d'entre elles, sont les intégrales d'une équation différentielle, linéaire et homogène du deuxième

---

(1) Ces différences de propriétés proviennent de ce fait que les fonctions complètes multiformes ne sont pas, *toutes*, périodiques, tandis que *toutes* les fonctions complètes uniformes sont périodiques (sauf la fonction linéaire).

ordre, dont les coefficients ne dépendent que des substitutions du groupe.

L'expression générale (A) des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe et *seulement celles-là*, montre que toutes ces fonctions sont les intégrales d'une équation différentielle du troisième ordre de la forme

$$\frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = \chi(x),$$

où $\chi(x)$ ne dépend que des substitutions du groupe. Cette équation n'est d'ailleurs que l'équation aux quotients des intégrales de l'équation en Θ.

Dans une prochaine Note, nous déterminerons, au moyen des substitutions d'un groupe donné et d'ailleurs quelconque, les coefficients de ces deux équations différentielles, et nous donnerons la formule générale du multiplicateur des fonctions Θ relatives au groupe donné.