Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 523-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__523_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1833.

(1900, p. 48.)

Soit

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a' + ia'')x^2 + 2(b' + ib'')xy + (c' + ic'')y^2$$

une forme binaire quadratique à coefficients imaginaires telle que la partie réelle

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

soit une forme positive. Démontrer que le déterminant de la forme proposée

$$D = ac - b^2$$

n'est jamais négatif (c'est-à-dire que, s'il est réel, il est nécessairement positif).

Soit

$$\sqrt{D} = \alpha + i\beta$$

la valeur principale (celle des deux valeurs de la racine dont la partie réelle α est > 0) de la racine carrée de ce déterminant.

Posons

$$a = a_0\sqrt{D}, \qquad b = b_0\sqrt{D}, \qquad c = c_0\sqrt{D};$$

a_0, b_0, c_0 sont des quantités imaginaires dont nous désignerons les parties réelles respectivement par a'_0, b'_0, c'_0.

Faire voir que la forme

$$a'_0 x^2 + 2b'_0 xy + c'_0 y^2$$

est aussi une forme positive? (J. FRANEL.)

SOLUTION

Par M. M. LAGOUTINSKY.

Posons

$$D_1 = a'c' - b'^2,$$
$$D_2 = a'c'' + a''c' - 2b'b'',$$
$$D_3 = a''c'' - b''^2.$$

La forme $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ est positive; on a donc

$$a' > 0, \qquad c' > 0, \qquad D_1 > 0.$$

Si, en outre, $D_3 > 0$, on en déduit immédiatement

$$4a'c'a''c'' > 4b'^2b''^2$$

et, *a fortiori*,

$$(a'c'' - a''c')^2 + 4a'c'a''c'' > 4b'^2b''^2$$

ou

$$|a'c'' + a''c'| > |2b'b''|.$$

On voit que D_2 a le signe de a'' et c''; en d'autres termes, les quantités $a''D_2$ et $c''D_2$ sont, dans ce cas, positives.

On conclut de même que, si $D_3 > 0$, on ne peut pas avoir $D_2 = 0$; dans ce dernier cas, on a donc nécessairement ou $D_3 = 0$, ou $D_3 < 0$.

Mais le cas où $D_3 = 0$ ne peut se produire; autrement la forme $a''x^2 + 2b''xy + c''y^2$ n'a pas ses coefficients réels; il reste $D_3 < 0$.

Considérons l'expression

$$D = ac - b^2 = D_1 + iD_2 - D_3.$$

Si $D_2 = 0$, elle devient une somme des quantités positives. Ainsi la première partie de la question se trouve établie.

Passons à la seconde. Multiplions la forme

$$(1) \qquad a'_0 x^2 + 2b'_0 xy + c'_0 y^2$$

par $|D|$; on a, en vertu des formules

$$a(\alpha - i\beta) = a_0(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = a_0|D|\ldots,$$

la forme

$$(2) \qquad (a'\alpha + a''\beta)x^2 + 2(b'\alpha + b''\beta)xy + (c'\alpha + c''\beta)y^2,$$

où α et β satisfont aux équations

$$(3) \qquad \alpha^2 - \beta^2 = D_1 - D_3,$$

$$(4) \qquad 2\alpha\beta = D_2$$

et à une égalité, $\alpha > 0$.

Démontrons en premier lieu que son discriminant, multiplié par -1,

$$4D_1\alpha^2 + 4D_2\alpha\beta + 4D_3\beta^2$$

est positif.

A l'aide de l'équation (4) cette expression se change en

$$4D_1\alpha^2 + 2D_2^2 + 4D_3\beta^2.$$

Si $D^3 \geq 0$, cette quantité est évidemment positive. Si, au contraire, $D_3 < 0$, multiplions-la par α^2 et transformons, à l'aide des équations (3) et (4), en

$$4D_1\alpha^4 + 2D_2^2(\beta^2 + D_1 - D_3) + D_3D_2^2$$

ou

$$4D_1\alpha^4 + 2D_2^2(\beta^2 + D_1) - D_3D_2^2;$$

c'est une quantité positive. Or le discriminant de la forme (2) est négatif. De là résulte que les quantités

$$(5) \qquad a'\alpha + a''\beta \quad \text{et} \quad c'\alpha + c''\beta$$

ont leur signe commun. En supposant $D_1 - D_3 > 0$, on conclut, de l'équation (3),

$$\alpha > |\beta|.$$

Si l'on fixe deux des trois quantites a'', b'', c'' et si l'on fait varier la troisième d'une manière continue, sans nuire à l'inégalité $D_1 - D_3 > 0$, la variation des quantités α et β et, par suite, de leurs fonctions (5), sera continue. Mais aucune des quantités (5) ne peut s'annuler; autrement, le discriminant de la forme (2) serait positif. Leur signe reste donc le même malgré la variation d'une des quantités a'', b'', c'', pourvu que la condition $D_1 - D_3 > 0$ soit remplie. Si donc nous avons $D_3 < 0$, a'' et c'' sont de même signe ou de signes contraires; il est permis de changer b'' pour le premier cas et la plus petite, en valeur absolue, des quantités a'' et c'', pour le second, de telle sorte que nous ayons $D_1 > D_3 > 0$.

En d'autres termes, il suffit, pour la détermination du signe des quantités (5), de se borner au seul cas $D_3 > 0$.

Abordons-le. En multipliant l'équation (4) par a'' et c'', nous aurons

$$2\alpha a''\beta = a'' D_2, \qquad 2\alpha c''\beta = c'' D_2,$$

d'où résulte que les quantités $a''\beta$ et $c''\beta$ sont positives. En sommant le résultat précédent, nous pouvons dire que les formes (2) et, par suite, (1) sont positives.

Autre solution de M. D. Pizzarello.

1857.

(1900, p. 383.)

On donne, dans un plan, un triangle ABC *dont les côtés sont a, b, c. On demande d'étudier, dans l'espace, le lieu des points* M *tels que leurs distances* MA', MB', MC' *aux trois côtés du triangle soient proportionnelles à a, b, c.*

En particulier, déterminer la projection de ce lieu sur le plan du triangle, séparer sur cette projection les arcs qui *sont des projections réelles de la courbe de l'espace, et examiner le cas du triangle isoscèle.*

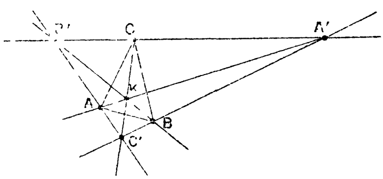
Cette question constitue en quelque sorte une extension du point de Lemoine, puisque c'est, dans l'espace, la courbe dont tous les points jouissent de la propriété qui, dans le plan, appartient au point de Lemoine. (E. Lemoine.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. V. Retali.

Appelons K le point de Lemoine du triangle ABC et A', B', C' les pôles des côtés | BC |, | CA |, | AB | par rapport au cercle circonscrit : le lieu A^2 des points de l'espace dont les distances aux côtés | AB |, | AC | sont dans le rapport $(c:b)$ est un cône quadrique orthogonal ayant le sommet A et par rapport auquel | AB |, | AC | sont un couple de rayons conjugués. Le plan du triangle est plan diamétral principal et coupe A^2 suivant

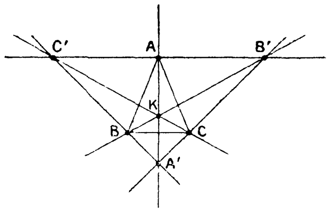
Fig. 1.



les droites | AA' | et | B'C' |; l'axe principal elliptique de A^2 (à l'intérieur du cône) est la bissectrice de l'angle aigu formé par | AA' | et | B'C' |. De même, le lieu des points dont les distances aux côtés | CB |, | BA | sont dans le rapport $(a:c)$ est un cône B^2 dont les droites | BB' |, | A'C' | forment une section diamétrale principale, etc. Le lieu cherché, intersection des cônes A^2 et B^2, se décompose donc en deux coniques situées dans des plans perpendiculaires au plan (ABC) dont les centres sont les milieux de deux diagonales du quadrilatère complet ayant les droites AC', BC', AK, BK pour côtés. Si, par exemple, les angles C'AK et C'BK sont aigus, le segment fini C'K et le segment infini A'B' sont des axes des deux coniques. Ces deux segments forment évidemment la projection orthogonale du lieu sur le plan du triangle.

Si le triangle est isoscèle, si par exemple $b = c$, le cône A^2 dégénère en deux plans perpendiculaires au plan (ABC) et entre eux, menés par les bissectrices de l'angle A ; la projec-

Fig. 2.



tion du lieu est constituée par le segment fini KA' et le segment infini B'C' de ces deux bissectrices.

1863.

(1900, p. 384.)

Il existe une infinité de coniques qui touchent en quatre points une quartique bicirculaire; ces points sont sur un cercle dont le centre est fixe. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Il existe en réalité treize systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique bicirculaire. Le théorème énoncé ne peut être exact que pour celui de ces systèmes qui comprend une droite double à l'infini. Les coniques de ce système ont pour équation générale

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + 1 = 0,$$

V étant le premier membre de l'équation d'un cercle; les points de contact avec l'enveloppe sont sur le cercle

$$\lambda V + 1 = 0,$$

dont le centre est fixe.