NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1901)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 516-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__516_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1901).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés un cercle fixe O, une droite fixe D, tangente à ce cercle, et une droite fixe Δ, parallèle à D, située du même côté de D que le cercle O, et ne coupant pas ce cercle, on mène d'un point A de Δ les deux tangentes au cercle O, qui coupent la droite D en B et C.

Le point A décrivant la droite Δ, on demande :

1° De trouver le lieu géométrique du point M de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle;

2° De trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC;

3° De trouver l'enveloppe du cercle passant par les milieux des côtés du triangle ABC;

4° De calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC connaissant la somme l des longueurs des deux médianes issues des sommets B et C.

N. B. — On désigne par r le rayon du cercle O et par h la distance des deux droites parallèles D et Δ.

Mathématiques spéciales.

On considère un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° Trouver l'équation générale des paraboloïdes P admettant le plan xOy pour plan de symétrie, tangents au plan yOz au point O, et ayant pour trace sur le plan zOx une ellipse de grandeur invariable dont le grand axe est dirigé suivant Ox;

2° Trouver les équations des focales F et Φ de l'un de ces paraboloïdes P.

3° Trouver l'enveloppe de la focale F, qui est située dans le plan xOy, lorsque le paraboloïde P varie.

4° Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de l'axe et le lieu du sommet de la focale Φ. — Construire cette enveloppe et ce lieu.

5° Calculer le paramètre de la focale Φ en fonction du coefficient angulaire de son axe (qui est situé dans le plan xOy), et étudier la variation de ce paramètre quand ce coefficient angulaire varie.

6° En se servant des résultats qui précèdent, donner une idée de la forme de la surface engendrée par la focale Φ, quand le paraboloïde P varie. — En particulier, indiquer quelle est la section de cette surface par le plan zOx.

N. B. — On désignera par a et b ($a > b$) les demi-axes de l'ellipse donnée dans le plan zOx.

Mécanique rationnelle.

On considère une plaque solide rectangulaire, homogène, infiniment mince, dont le centre O (centre de gravité) est fixe et qui s'appuie sur une sphère fixe infiniment petite S, sur laquelle elle peut glisser sans frottement; la distance $OS = l$ de cette sphère au centre O est supposée telle que la circonférence décrite, dans le plan de la plaque, de O comme centre avec l comme rayon, soit tout entière dans l'intérieur de la plaque.

1° Trouver le mouvement de la plaque, en supposant les conditions initiales telles, qu'au commencement du mouvement la plaque glisse sur la sphère S;

2° Calculer la réaction de la sphère S sur la plaque et voir si, à un certain instant, la plaque peut quitter la sphère.

Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois axes fixes menés par le point O, Ox_1 étant dirigé suivant OS; soient de même Ox, Oy, Oz les axes de symétrie de la plaque, Ox étant parallèle aux plus grands côtés du rectangle, Oy aux plus petits côtés et Oz normal à la plaque, la sphère S étant placée, par rapport à la plaque, du côté des z négatifs.

On désignera par A, B, C les moments d'inertie de la plaque pris respectivement par rapport à Ox, Oy, Oz, par θ l'angle z_1Oz et par φ l'angle x_1Ox.

On désignera également par θ_0, φ_0, θ'_0, φ'_0 les valeurs initiales données de θ, φ et de leurs dérivées θ', φ' par rapport au temps, en supposant φ_0 compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; on examinera successivement l'hypothèse dans laquelle le produit $\theta'_0\varphi'_0$ est nul, puis celle dans laquelle ce produit n'est pas nul; dans chacun des différents cas particuliers correspondant à ces hypothèses, on indiquera comment on a dû choisir les données initiales pour que le mouvement considéré se produise.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe gauche définie, en coordonnées rectangulaires, par l'intersection des surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0, \qquad z^2 = ax^2 + 3x,$$

où a est une constante.

1° En appelant s l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine jusqu'en un point $M(x, y, z)$, exprimer $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et déterminer a de façon que s soit donné en fonction de x par une intégrale elliptique de *première espèce*.

Dans tout ce qui suit, la constante a est supposée ainsi déterminée.

2° Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point M de la courbe en fonction de s, en employant successivement les notations de Jacobi et celles de Weierstrass.

Quel est, dans un parallélogramme des périodes, le nombre des valeurs de s correspondant à un point donné de la courbe?

3° Former la relation qui lie les valeurs de s correspondant à quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe situés dans un même plan. En déduire les points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire et discuter la réalité de ces points.

4° Calculer, en fonction de s, les coordonnées du centre de gravité de l'arc s supposé homogène.