E.-M. LÉMERAY

Sur certains nombres analogues aux nombres de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 509-516

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__509_0>

[C2j] [H12a]

SUR CERTAINS NOMBRES ANALOGUES AUX NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

1. Désignons par $|x|^m$ la factorielle

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1),$$

où m est un entier positif. On sait que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} |a+b|^m = {} & |a|^m + C_m^1 |a|^{m-1} |b|^1 + \ldots \\ & + C_m^{m-1} |a|^1 |b|^{m-1} + |b|^m; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad |a|^0 = 1 \quad \text{quel que soit } a;$$

$$(3)\qquad |-1|^m = (-1)^m m!;$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d|x|^m}{dx} = {} & |-1|^0 C_m^1 |x|^{m-1} \\ & + |-1|^1 C_m^2 |x|^{m-2} + \ldots \\ & + |-1|^{m-2} C_m^{m-1} |x|^1 + |-1|^{m-1}; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x &= |x|^1, \\ x^2 &= |x|^2 + |x|^1, \\ x^3 &= |x|^3 + 3|x|^2 + |x|^1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, en général, que la transformation de x^m en factorielles fournit un polynome en $|x|^m$, $|x|^{m-1}$, ... dont le terme en $|x|^1$ a pour coefficient l'unité.

2. Intégrons tout d'abord la factorielle $|x|^{m-1}$; comme elle représente un polynome de degré $m-1$, on aura, en introduisant les coefficients binomiaux et en dési-

gnant par b_0, b_1, b_2, ... des constantes à déterminer,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} m\int |x|^{m-1}dx = b_0|x|^m + C_m^1 b_1|x|^{m-1} + \ldots \\ + C_m^{m-1} b_{m-1}|x|^1. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte de (2), on peut écrire sous forme symbolique

$$m\int |x|^{m-1}\,dx = |x+b|^m,$$

où, après développement du second membre, on remplace la factorielle $|b|^j$ par b_j. En dérivant, on aura l'égalité symbolique

$$(7)\qquad m|x|^{m-1} = \frac{d}{dx}|x+b|^m.$$

En tenant compte de (1) et de (4); (7) devient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}|x|^m + b_1 C_m^1 \frac{d}{dx}|x|^{m-1} \\ &\qquad + b_2 C_m^2 \frac{d}{dx}|x|^{m-2} \\ &\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= |-1|^0 b_0 C_m^0 C_m^1 |x|^{m-1} + |-1|^1 C_m^0 C_m^2 |x|^{m-2} + \ldots \\ &\qquad + |-1|^0 b_1 C_m^1 C_{m-1}^1 |x|^{m-2} + \ldots \\ &\qquad + \ldots, \end{aligned}\right.$$

expression qui se termine d'elle-même.

En égalant entre eux les coefficients des factorielles dans le premier membre de (7) et dans le second membre de (8), on a

$$\begin{aligned} &|-1|^0 b_0 C_m^0 C_m^1 &&= m, \\ &|-1|^1 b_0 C_m^0 C_m^2 - |-1|^0 b_1 C_m^1 C_{m-1}^1 &&= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or dans les coefficients C le numérateur seul dépend de m, et dans la $n^{\text{ième}}$ équation les numérateurs des produits

$$C_m^0 C_m^n,\quad C_m^1 C_m^{n-1},\quad \ldots,\quad C_m^{n-1} C_{m-n+1}^1$$

sont tous égaux à

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = |\,m\,|^n.$$

On peut donc diviser les deux membres de la $n^{\text{ième}}$ équation par $|\,m\,|^n$, et il reste pour définir les b des équations ne contenant plus m. On en conclut que *les nombres* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *forment une suite unique* applicable à l'intégration de la factorielle $|\,x\,|^m$ quel que soit l'entier positif m. Les équations sont

$$\begin{array}{ll}
|-1|^0 C_1^0 b_0 & = 1,\\
|-1|^1 C_2^0 b_0 + |-1|^0 C_2^1 b_1 & = 0,\\
|-1|^2 C_3^0 b_0 + |-1|^1 C_3^1 b_1 + |-1|^0 C_3^2 b_2 & = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

On remarque que la $(n+1)^{\text{ième}}$ équation qui peut s'écrire symboliquement

$$\frac{d|\,b\,|^{n+1}}{db} = 0,$$

donne par récurrence b_n en fonction de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

De plus, en éliminant $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ entre les $n+1$ premières équations, on trouve, après réduction,

$$(n+1)b_n = \begin{vmatrix}
|-1|^0 C_1^0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
|-1|^1 C_2^0 & |-1|^0 C_2^1 & \ldots & 0 & 0\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & . & .\\
|-1|^{n-1} C_n^0 & |-1|^{n-2} C_n^1 & \ldots & |-1|^0 C_n^{n-1} & 0\\
|-1|^n C_{n+1}^0 & |-1|^{n-1} C_{n+1}^1 & \ldots & |-1|^1 C_{n+1}^{n-1} & 0
\end{vmatrix}.$$

3. *Expression des nombres b par les* $D|\,0\,|^n$. — En développant $|\,x\,|^m$ par la série de Mac Laurin, on a le

polynome

$$|x|^m = |0|^m + \left(\frac{d|x|^m}{dx}\right)_{x=0} \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2|x|^m}{dx^2}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

d'où

$$(9) \qquad \int |x|^m dx = |0|^m \frac{x}{1} + \left(\frac{d|x|^m}{dx}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots.$$

D'autre part, au moyen des factorielles et des nombres b, on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \int |x|^m dx = \frac{1}{m+1} \Big[& b_0 |x|^{m+1} + \frac{m+1}{1!} b_1 |x|^m \\ & + \frac{(m+1)m}{2!} b_2 |x|^{m-1} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dans (9) les puissances x, x^2, ... par les factorielles au moyen des formules de transformation (5) et en égalant les coefficients des mêmes factorielles dans les seconds membres de (10) et de l'équation ainsi obtenue, on aurait des équations définissant les b; mais on peut faire $m = 1, 2, \ldots, n$; pour déterminer b_1, b_2, ..., b_n, ... il suffira alors dans chaque cas d'égaler entre eux les coefficients de $|x|^1$; on a ainsi l'expression générale

$$(11) \quad b_n = \frac{1}{2!} \mathrm{D}|0|^n + \frac{1}{3!} \mathrm{D}^2|0|^n + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \mathrm{D}^n|0|^n,$$

où l'on a posé

$$\left(\frac{d^j|x|^n}{dx^j}\right)_{x=0} = \mathrm{D}^j|0|^n.$$

On peut ne pas limiter l'expression, car les $\mathrm{D}^j|0|^n$ s'annulent pour $j > n$; on peut l'écrire alors symboliquement

$$b_n = -(1+\mathrm{D}) + e^{\mathrm{D}},$$

où, après développement et réduction, on remplace D^j par $\mathrm{D}^j|0|^n$.

4. *Expression des b par les* S_p^q. — Si l'on désigne par S_p^q la somme des produits des p premiers nombres q à q on a

$$|\,x\,|^n = x^n - S_{n-1}^1\, x^{n-1} + S_{n-1}^2\, x^{n-2} + \ldots \pm S_{n-1}^{n-1}\, x.$$

En comparant à (8) on a, au signe près,

$$D^j\,|\,0\,|^n = j!\; S_{n-1}^j.$$

L'expression (11) devient alors

$$b_n = \frac{S_{n-1}^0}{n+1} - \frac{S_{n-1}'}{n} + \ldots \pm \frac{S_{n-1}^{n-1}}{2}.$$

On pourrait inversement exprimer linéairement les S_p^q au moyen des b.

5. *Intégration des polynomes.* — D'après (6) on a

$$\int |\,x\,|^m\, dx = \frac{1}{m+1}\left[b_0\,|\,x\,|^{m+1} + b_1\,\frac{m+1}{1}\,|\,x\,|^m + b_2\,\frac{(m+1)m}{2!}\,|\,x\,|^{m-1} + \ldots\right];$$

or comme l'on sait

$$\sum |\,x\,|^m = \frac{|\,x\,|^{m+1}}{m+1},$$

$$\Delta\,|\,x\,|^m = m\,|\,x\,|^{m-1},$$

$$\Delta^2\,|\,x\,|^m = m(m-1)\,|\,x\,|^{m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on peut donc écrire

$$\int |\,x\,|^m\, dx = b_0 \sum |\,x\,|^m + \frac{b_1}{1!}\,|\,x\,|^m + \frac{b_2}{2!}\,\Delta\,|\,x\,|^m + \ldots.$$

Par suite, si $f(x)$ représente un polynome, qu'on peut toujours mettre sous la forme

$$A + B\,|\,x\,| + C\,|\,x\,|^2 + \ldots,$$

on aura

$$
(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int f(x)\,dx = b_0 \sum f(x) + \frac{b_1}{1} f(x) + \frac{b_2}{2!} \Delta f(x) + \dots \\ + \frac{b_n}{n!} \Delta^{n-1} f(x) + \dots, \end{aligned} \right.
$$

expression qui se termine d'elle-même, car à partir d'un certain rang les différences s'annulent.

6. *Extension de l'expression* (12). *Relation entre les nombres b et la fonction* $\frac{u}{L(1+u)}$. — Appliquons à la fonction $(1+u)^x$ l'expression (12). Nous avons

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+u)^x, \\
\Delta f(x) &= u(1+u)^x, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\Delta^n f(x) &= u^n(1+u)^x,
\end{aligned}
$$

$$
\sum_0^x f(x) = 1 + (1+u) + (1+u)^2 + \dots + (1+u)^{x-1} = \frac{(1+u)^x - 1}{u}.
$$

Or

$$
\int_0^x (1+u)^x\,dx = \frac{(1+u)^x - 1}{L(1+u)}.
$$

On aura donc, si l'expression (12) est applicable,

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+u)^x - 1}{L(1+u)} = \frac{(1+u)^x - 1}{u} + \frac{b_1}{1!}[(1+u)^x - 1] \\
+ \frac{b_2}{2!} u[(1-u)^x - 1)] + \dots.
\end{aligned}
$$

Supprimant le facteur commun $(1+u)^x - 1$ et multipliant par u on a

$$
(13) \qquad \frac{u}{L(1+u)} = 1 + \frac{b_1}{1!} u + \frac{b_2}{2!} u^2 + \frac{b_3}{3!} u^3 + \dots;
$$

or la fonction $\frac{u}{L(1+u)}$ est uniforme finie et continue à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité et ayant l'origine pour centre; le second membre de (13) représente donc la fonction pour toute valeur de u dont le module est plus petit que 1, et en général

$$(14) \qquad b_n = \left[\frac{d^n}{du^n} \frac{u}{L(1+u)}\right]_{u=0}.$$

Dans la série (13) le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n} u.$$

Dans la série (12), prise entre les limites x_0 et x_1, le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n} \frac{\Delta^n(x_1) - \Delta^n(x_0)}{\Delta^{n-1}(x_1) - \Delta^{n-1}(x_0)},$$

où l'on a désigné par $\Delta^\mu(x_p)$ la différence d'ordre μ de la fonction $f(x)$ quand la variable a la valeur x_p; la série (12) sera donc absolument convergente si le module du rapport

$$\frac{\Delta^n(x_1) - \Delta^n(x_0)}{\Delta^{n-1}(x_1) - \Delta^{n-1}(x_0)}$$

tend à la limite vers un nombre plus petit que 1.

7. La relation (14) donne un moyen simple pour calculer les nombres b : on les aura en effectuant la division

$$\frac{u}{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots}.$$

On trouve

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = -\frac{1}{6},$$

$$b_3 = \frac{1}{4}, \qquad b_4 = -\frac{19}{30}, \qquad b_5 = \frac{9}{4},$$

$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

On en obtient d'ailleurs une nouvelle expression au moyen des inverses des nombres entiers; en effet, la division donne presque immédiatement les relations

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1,\\
b_1 &= \frac{1}{2}b_0,\\
\frac{b_2}{2!} &= -\frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{2}b_1,\\
\frac{b_3}{3!} &= \frac{1}{4}b_0 - \frac{1}{3}\frac{b_1}{1!} + \frac{1}{2}b_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et l'on trouve

$$
b_n = n!\begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \ldots & 0\\
. & . & . & \ldots & .\\
\frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \ldots & 1\\
\frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{2}
\end{vmatrix}.
$$

On voit l'analogie entre les nombres b et les nombres de Bernoulli : ces derniers servent à la sommation des puissances, les nombres b à l'intégration des factorielles.