ED. COLLIGNON

# Problèmes sur les normales aux courbes planes

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 1 (1901), p. 481-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__481_0>

[O2b]

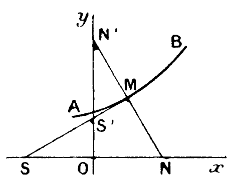
# PROBLÈMES SUR LES NORMALES AUX COURBES PLANES;

PAR M. ED. COLLIGNON.

## COURBES DANS LESQUELLES LE PRODUIT NN′ DES DEUX NORMALES EST CONSTANT.

Par le point M de la courbe AB que l'on cherche, menons la normale MN et la tangente MS (*fig.* 1). La

Fig. 1.




normale coupe les axes aux points N et N′ et la tangente les rencontre aux points S et S′.

Si le produit MN × MN′ des deux normales est constant, il en sera de même du produit MS × MS′ des deux tangentes, car les triangles N′MS′, SMN, rectangles en M et semblables, donnent l'égalité

$$MS \times MS' = MN \times MN'.$$

L'équation différentielle des courbes demandées est, en appelant $p$ le rapport $\frac{dy}{dx}$,

$$y\sqrt{1+p^2} \times \frac{x\sqrt{1+p^2}}{p} = C,$$

C désignant le produit constant, qu'on suppose donné; l'équation revient à la suivante :

$$xy\left(p+\frac{1}{p}\right)=\mathrm{C}. \tag{1}$$

La constante C est homogène au carré d'une longueur $a$, et l'on peut la représenter par $a^2$ ou par $-a^2$, suivant le signe qui lui est attribué.

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{y\,dy}{dx}+\frac{y\,dx}{dy}=\frac{\mathrm{C}}{x};$$

le problème revient donc à trouver une courbe où la somme de la sous-tangente et de la sous-normale soit inversement proportionnelle à l'abscisse.

Si dans l'équation (1) on change $p$ en $-\frac{1}{p}$ tout en conservant les valeurs de $x$ et $y$, on obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes cherchées; or cette substitution revient à changer le signe de C, c'est-à-dire à remplacer $a^2$ par $-a^2$. Il résulte de là que les deux équations

$$xy\left(p+\frac{1}{p}\right)=a^2$$

et

$$xy\left(p+\frac{1}{p}\right)=-a^2$$

représentent deux séries de courbes qui se coupent à angle droit; les unes sont tangentes aux droites MS, comme nous l'avons supposé d'abord; les autres sont tangentes aux droites MN.

On voit en même temps que les deux produits $\mathrm{MN}\times\mathrm{MN}'$, $\mathrm{MS}\times\mathrm{MS}'$, égaux en valeur absolue, doivent être regardés comme de signes contraires au point de vue analytique. Si les tangentes MS, MS' reçoivent le même signe, comme quantités portées dans le même sens à partir du point M, les normales MN, MN', portées en sens opposés, doivent recevoir des signes différents, ou inversement.

L'intégration de l'équation donnée peut se faire en changeant de variables, de manière à ramener l'équation à la forme linéaire. Posons

$$x = \sqrt{a}\sqrt{x'}, \qquad y = \sqrt{a}\sqrt{y'},$$

$x'$ et $y'$ représentant des variables nouvelles. On en déduit

$$xy = a\sqrt{x'y'},$$

$$dx = \sqrt{a}\frac{dx'}{2\sqrt{x'}}, \qquad dy = \sqrt{a}\frac{dy'}{2\sqrt{y'}},$$

et l'équation devient

$$a\sqrt{x'y'}\left(\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{y'}}\frac{dy'}{dx'} + \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{x'}}\frac{dx'}{dy'}\right) = a^2,$$

ce qui se réduit à la forme simple

$$x'\frac{dy'}{dx'} + y'\frac{dx'}{dy'} = a.$$

Posons $\frac{dy'}{dx'} = p'$; il viendra

$$p'x' + \frac{y'}{p'} = a,$$

ou bien

$$x'p'^2 - ap' + y' = 0.$$

Cette équation se ramène par la différentiation à la forme linéaire; il vient en effet, en observant que $dy'$ est identique à $p'\,dx'$,

$$p'^2\,dx' - 2x'p'\,dp' - a\,dp' + p'\,dx' = 0,$$

équation qui peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{dx'}{dp'} + \frac{2p'}{p'^2 + p'} x' = \frac{a}{p'^2 + p'},$$

ou encore

$$\frac{dx'}{dp'} + \frac{2}{p' + 1} x' = \frac{a}{p'^2 + p'}.$$

Cherchons d'abord l'intégrale de l'équation réduite à son premier membre; il viendra, en séparant les variables,

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{2\,dp'}{p' + 1} = 0,$$

et en intégrant

$$x'(p' + 1)^2 = C'.$$

$C'$ désigne la constante introduite par l'intégration lorsqu'on réduit à zéro le second membre de l'équation différentielle. En prenant $C'$ comme une variable fonction de $p'$, on pourra la déterminer de manière à satisfaire à l'équation où le second membre serait rétabli. Il vient, en faisant les substitutions et les réductions,

$$dC' = \frac{(p' + 1)\,a\,dp'}{p'} = a\left(1 + \frac{1}{p'}\right) dp'.$$

Donc

$$C' = C'' + ap' + a\,l(p'),$$

$C''$ étant une nouvelle constante arbitraire.

On aura, pour la valeur de $x'$ en fonction de $p'$,

$$x' = \frac{C'' + ap' + a\,l(p')}{(p' + 1)^2}.$$

On obtiendra ensuite $y'$ en intégrant la fonction

$$dy' = p'\,dx',$$

où $x'$ devra être remplacé par sa valeur en fonction de $p'$. Puis $x'$ et $y'$ serviront à déterminer $x$ et $y$ par les relations

$$x = \sqrt{ax'}, \qquad y = \sqrt{ay'} \quad (^1).$$

La solution est donc ramenée à des quadratures; mais si elle suffit pour déterminer par le calcul autant de points que l'on voudra des courbes cherchées, elle est trop compliquée pour qu'on puisse la discuter commodément d'après l'examen des équations obtenues. La discussion est beaucoup plus facile sur l'équation différentielle donnée,

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2.$$

Elle suffit, en effet, pour donner une idée exacte de la forme de la courbe, sauf à employer la solution rigoureuse pour la construire, s'il en est besoin.

Observons d'abord que les deux axes coordonnés satisfont chacun à l'équation (1). Si l'on pose $x = 0$, ce qui donne $p$ infini, l'équation peut être regardée comme satisfaite quel que soit $y$. De même, si l'on fait $y = 0$, en rendant $p$ nul et $\frac{1}{p}$ infini, $x$ peut recevoir une valeur quelconque.

Appelons $\alpha$ l'angle MSX de la tangente avec l'axe O$x$, égal à l'angle MN'O que fait la normale avec l'axe O$y$

---

[1] Si l'on avait fait usage de l'équation $xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = -a^2$, il aurait suffi de changer le signe de $a$ dans l'équation qui donne $x'$, et de poser

$$x' = \frac{C'' - ap' - a\,l(p')}{(p'+1)^2},$$

en conservant les formules de transformation

$$x = \sqrt{ax'}, \qquad y = \sqrt{ay'}.$$

pris dans le sens négatif. On aura

$$p = \operatorname{tang}\alpha, \qquad \frac{1}{p} = \cot\alpha,$$

et

$$p + \frac{1}{p} = \operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

L'équation (1) prend la forme

$$xy = C\sin\alpha\cos\alpha = \pm a^2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

en mettant en évidence le signe de la constante C.

Nous admettrons d'abord que la constante soit positive, et nous prendrons les équations

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2, \qquad xy = a^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Considérons dans le plan de la figure le lieu des points qui donnent à la dérivée $p$, ou, ce qui revient au même, à l'angle $\alpha$, une valeur déterminée.

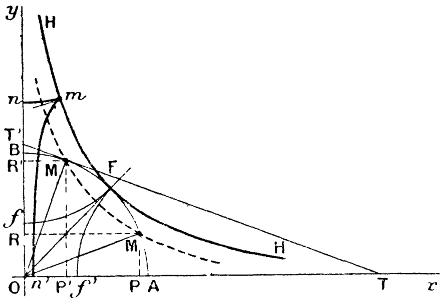
Ce lieu est l'hyperbole équilatère représentée par la dernière équation qu'on vient d'écrire, dans laquelle on attribuera à l'angle $\alpha$ une valeur arbitraire constante.

En faisant varier l'angle $\alpha$, nous obtiendrons une série d'hyperboles ayant toutes pour centre le point O, et pour asymptotes les axes coordonnés, toutes semblables entre elles et le long desquelles les courbes cherchées auront pour tangentes des droites dont le parallélisme est défini.

Nous pouvons nous borner à chercher ce qui se passe dans l'angle $yOx$ formé par les parties positives des axes; l'angle $\alpha$ ne doit alors recevoir que des valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Il est facile de construire ces hyperboles. Du point O comme centre avec $a$ pour rayon (*fig.* 2) décrivons une

Fig. 2.




circonférence et menons une droite OM faisant avec $Ox$ un angle $MOx = \alpha$, choisi arbitrairement. Abaissons les perpendiculaires MP, MR sur les axes; nous aurons pour l'aire du rectangle ORMP le produit

$$OP \times OR = a \cos\alpha \times a \sin\alpha = a^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Nous obtiendrons un rectangle égal en menant le rayon OM' sous l'angle $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, ce qui revient simplement à permuter les sinus et cosinus dans l'équation précédente. Les aires des deux rectangles étant les mêmes, l'hyperbole

$$xy = a^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

passe par les points M et M', et si l'on trace cette hyperbole, on saura qu'en chacun de ses points passent deux courbes satisfaisant à l'équation (1), et dont les tangentes sont respectivement parallèles aux rayons OM et OM'.

Considérons en particulier celles des courbes cherchées qui passent au point M'. L'une d'elles a une tangente parallèle à OM; l'autre a pour tangente la droite OM′ elle-même; celle-ci coupe donc la circonférence AB à angle droit. Il en est de même au point M, où l'une des deux courbes, passant en ce point, est tangente au rayon MO.

Il en résulte que le cercle AB, représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

est l'une des trajectoires orthogonales des courbes (1), et par conséquent son équation doit satisfaire à l'équation (1) quand on y change $a^2$ en $-a^2$. On a, en effet,

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

$$p = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{1}{p} = -\frac{y}{x},$$

et par suite

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = -xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = -(x^2 + y^2) = -a^2.$$

Il est facile de vérifier sur la figure que le produit des deux tangentes M′T et M′T′ menées au cercle, en un point M′, est égal en valeur absolue au produit des deux normales confondues en M′O, c'est-à-dire à $a^2$.

Menons la bissectrice OF de l'angle des axes; l'hyperbole correspondante HH′ sera tangente en F à la circonférence AB, puisque les points M et M′ se confondent alors en un seul au milieu du quadrant AB.

L'hyperbole HH′ est la limite en dehors de laquelle les courbes cherchées ne peuvent s'étendre; car au delà la dérivée $p$ devient imaginaire. Tout le long de l'hyperbole limite HH′,

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2,$$

l'angle $\alpha$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, $p$ est égal à l'unité, et les deux tangentes aux deux courbes qui passent généralement par un même point sont confondues en une seule : ce qui montre qu'en tous les points de HH' les courbes cherchées ont un point de rebroussement.

Ces caractères une fois constatés, on peut reconnaître aisément la forme de la courbe.

D'un point quelconque $m$ de l'hyperbole limite HH' partent deux branches de courbe, tangentes à la fois à une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes. En ce point on a $p = 1$ ; si l'on suit la branche pour laquelle $p$ va en diminuant, l'inclinaison de la tangente sur l'axe $Ox$ diminuera graduellement de $p = 1$ au point $m$, à $p = 0$ au point $n$ où la courbe rencontre l'axe $Oy$; la rencontre avec cet axe a lieu à angle droit, et comme le produit des normales reste constant sur toute la courbe, on reconnaît que le rayon de courbure au point $n$ est égal à $\frac{a^2}{On}$, pour que le produit soit en ce point égal à $a^2$.

L'autre branche $mn'$ est celle pour laquelle $p$ va en croissant, de la valeur $p = 1$ au point $m$, à une valeur infinie au point où la courbe coupe l'axe $Ox$. La rencontre se fait encore à angle droit, et le rayon de courbure au point $n'$ est égal à $\frac{a^2}{On'}$. On peut ajouter que la courbe $mn'$ coupe la circonférence AB à angle droit.

Le tracé $nmn'$ de la courbe cherchée dans l'angle droit $yOx$ doit se répéter dans les trois autres angles symétriquement par rapport aux axes, et l'on obtient une courbe continue, qui coupe à angle droit les axes et la circonférence OA, et qui a quatre points de rebroussement sur l'hyperbole HH' et sur l'hyperbole symétrique.

La courbe qui passe au point F part de ce point tangentiellement à FO; une branche $Ff$ vient tomber à angle droit sur l'axe $Oy$; l'autre, symétrique par rapport à la droite FO, tombe à angle droit en $f'$ sur l'axe O$x$.

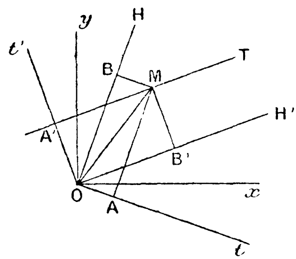
Cherchons sous quel angle la courbe passant en un point M coupe l'hyperbole $xy = k^2$, passant par le même point.

La tangente à l'hyperbole est définie au point $(x, y)$ par le rapport $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, et la tangente à la courbe l'est par la valeur de $p$. Soit $\varphi$ l'angle compris entre ces deux directions. Nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p + \frac{y}{x}}{1 - p\frac{y}{x}} = \frac{px + y}{x - py}.$$

Soit MT la direction de la tangente à la courbe, menée sous une inclinaison égale à $p$ (*fig.* 3). Soit O$t$

Fig. 3.




une droite menée par l'origine sous l'inclinaison $-p$. Nous appellerons cette droite l'*antiparallèle* à la tangente MT. L'équation de la droite O$t$ est

$$y + px = 0.$$

La droite dont l'équation est $x - py = 0$, ou $y - \frac{x}{p} = 0$, est la perpendiculaire OH élevée à l'origine sur l'antiparallèle $Ot$; les distances MA, MB du point M à ces deux droites sont respectivement

$$\mathrm{MA} = \frac{y + px}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \mathrm{MB} = \frac{x - py}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{OA}} = \operatorname{tang}\mathrm{MOA};$$

et l'angle $\varphi$ est donné sur la figure par l'angle MOA, compris entre le rayon vecteur OMA et l'antiparallèle à la tangente MT.

Si l'on change $p$ en $\frac{1}{p}$, on aura la tangente trigonométrique de l'angle $\varphi'$ que fait la seconde courbe avec l'hyperbole, par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\frac{1}{p} + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{px}} = \frac{x + py}{px - y}.$$

Menons par l'origine les droites rectangulaires

$$x + py = 0 \qquad \text{et} \qquad px - y = 0.$$

L'une est la droite $Ot'$, perpendiculaire à la tangente MT; elle est antiparallèle à la seconde tangente, dont le coefficient angulaire est $\frac{1}{p}$; l'autre est la droite OH', parallèle à la tangente MT et perpendiculaire à $Ot'$. Il vient encore, en abaissant MB' perpendiculaire sur OH',

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\mathrm{MA}'}{\mathrm{MB}'} = \frac{\mathrm{MA}'}{\mathrm{OA}'} = \operatorname{tang}\mathrm{MOA}',$$

de sorte que l'angle $\varphi'$ est l'angle MOA'.

Le long de l'hyperbole limite, $xy = \frac{a^2}{2}$, on a

$$p = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi' = \frac{x+y}{x-y}.$$

L'angle $\varphi$ est l'angle que fait le rayon vecteur OM avec les bissectrices de l'angle des axes.

Occupons-nous à présent de l'équation

$$xy\left(p+\frac{1}{p}\right)=-a^2,$$

qui se transformerait en celle-ci :

$$xy=-a^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

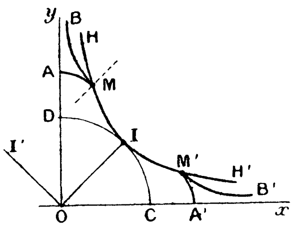
Le changement de $a^2$ en $-a^2$ revient au changement de $p$ en $-\frac{1}{p}$, et les nouvelles courbes représentées par cette équation différentielle sont les trajectoires orthogonales des premières. Les lignes qui assurent à la tangente à la courbe un parallélisme déterminé sont les mêmes hyperboles que nous avons définies tout à l'heure; les valeurs de $p$ sont égales à $-1$ tout le long de l'hyperbole limite $xy=\frac{1}{2}a^2$. Si donc on part d'un point M pris sur cette hyperbole limite au-dessus de la bissectrice, OI, de l'angle $yOx$, la courbe présentera en ce point un rebroussement tangentiel à la bissectrice,

$$y=-x,$$

de l'angle $yOx'$; de ce point partent deux branches de courbes divergentes MA, MB; pour l'une MA on aura des valeurs négatives de $p$, qui varieront de $-1$ à $0$ en diminuant graduellement en valeur absolue; la branche correspondante vient tomber à angle droit sur l'axe $Oy$. La seconde branche MB correspond aux valeurs négatives de $p$ qui commencent à $-1$, et croissent indéfiniment en valeur absolue. Elle prend donc des inclinaisons de plus en plus grandes par rapport à l'axe $Ox$, sans pouvoir rejoindre l'axe $Oy$, dont elle s'approche asymptotiquement, en restant toujours comprise entre l'hyperbole limite IH et l'axe $Oy$, asymptote commune aux deux courbes (*fig.* 4).

Les mêmes conclusions s'appliquent à la courbe par-

Fig. 4.




tant du point M′ dans l'angle I O $x$, et dessinant les deux branches M′A′, normale à l'axe O$x$, et M′B′, asymptote au même axe.

Si l'on rapproche graduellement les points M et M′ du point I sur la bissectrice les deux branches M′A′, MA convergent vers une limite commune, c'est-à-dire vers la circonférence CID, $x^2+y^2=a^2$, qui, comme nous l'avons vu, satisfait à l'équation proposée. Les deux autres branches MB, M′B′ se fondent en une seule ligne, qui passe au point I tangentiellement à la circonférence et à l'hyperbole limite, et qui va toucher à l'infini les deux axes coordonnés.

Nous compléterons ces aperçus, qui constituent l'*analyse qualitative*, et non quantitative, du problème, par la recherche des rayons de courbure des courbes obtenues, et par l'indication de solutions approximatives, applicables à des portions de ces mêmes courbes.

*Rayons de courbure.* — Nous commencerons par chercher la seconde dérivée $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$. De l'équation (1), mise sous la forme

$$xy(1+p^2)-a^2p=0,$$

nous tirons en différentiant, et en regardant $x$ comme la variable indépendante,

$$y(1+p^2)+px(1+p^2)+2pxyq-a^2q=0,$$

d'où l'on déduit, en résolvant l'équation par rapport à $q$ et en substituant au produit $xy$ sa valeur $\frac{pa^2}{1+p^2}$,

$$q=\frac{(y+px)(1+p^2)^2}{a^2(1-p^2)}.$$

Le rayon de courbure $\rho$ au point $(x, y)$ est donné par la formule générale

$$\rho=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ce qui donne ici

$$(2)\qquad \rho=\frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)\sqrt{1+p^2}}.$$

On peut vérifier que tout le long de l'hyperbole limite, $p$ étant égal à l'unité, $\rho$ est nul, ce qui correspond aux points de rebroussement des courbes. Le long des axes coordonnés on retrouve les valeurs du rayon de courbure déjà obtenues, savoir le long de l'axe $Oy$, pour $x=0$ et $p=0$,

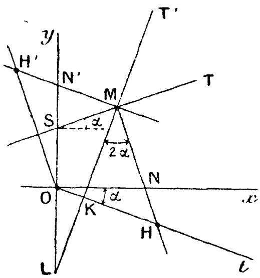
$$\rho=\frac{a^2}{y},$$

et le long de l'axe $Ox$, pour $y=0$ et $p$ infini,

$$\rho=-\frac{a^2}{x}.$$

L'équation (2) se prête à une construction géométrique. Soit M le point pour lequel on demande de construire le rayon de courbure $\rho$ (*fig.* 5), et soient MT la

Fig. 5.




tangente à la courbe en ce point, MN la normale, $\alpha$ l'angle de la tangente avec l'axe O$x$. L'équation

$$y + px = 0$$

définit la droite O$t$, qui passe par l'origine et qui fait avec l'axe O$x$ l'angle $\alpha$ dans le sens négatif. La distance MK du point M à la droite O$t$ est égale à

$$\text{MK} = \frac{y + px}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$x$ et $y$ étant les coordonnées du point M.

Donc

$$(y + px)\sqrt{1 + p^2} = \text{MK} \times (1 + p^2),$$

et l'équation (2) prend la forme

$$\rho = \frac{a^2}{\text{MK}} \frac{1 - p^2}{1 + p^2}.$$

Mais $p = \tan\alpha$; le rapport

$$\frac{1 - p^2}{1 + p^2} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{a^2}{\mathrm{MK}} \times \cos 2\alpha.$$

Or l'angle KMN que fait la droite MK avec la normale MN est égal à l'angle des deux droites ST et O$t$, qui leur sont respectivement perpendiculaires, et par suite égal à $2\alpha$, et l'on a

$$\mathrm{MH} = \frac{\mathrm{MK}}{\cos 2\alpha},$$

en appelant MH le segment intercepté par la droite O$t$ sur la normale MN. Donc enfin

$$\rho = \frac{a^2}{\mathrm{MH}}.$$

Nous avons appelé la droite O$t$ l'*antiparallèle* à la tangente ST, menée par le point O. On a donc ce théorème :

*Le rayon de courbure au point* M *est inversement proportionnel au segment* MH *déterminé, sur la normale* MN, *par le point* M *et le point de rencontre* H *de* MN *avec l'antiparallèle à la tangente,* O$t$, *menée par l'origine.*

Par le point M passent deux courbes, qui ont en général deux tangentes distinctes, et deux normales correspondantes; soient MT′, MN′ la tangente et la normale à la seconde courbe passant au point M. Il est facile de reconnaître que MT′ coïncide avec la perpendiculaire MK abaissée de M sur l'antiparallèle à MT; car $-p$ étant le coefficient angulaire de cette antiparallèle, $-\frac{1}{-p} = +\frac{1}{p}$ est le coefficient angulaire de la perpendiculaire MK; or c'est aussi le coefficient angulaire de la tangente à la seconde courbe passant en M.

Il en résulte que la seconde normale MN′ est parallèle à O$t$, antiparallèle à la première tangente. Pour la même raison la perpendiculaire OK′, abaissée de l'origine sur la première tangente MT, est l'antiparallèle à la seconde tangente, et est parallèle à la première normale. Le rayon de courbure $\rho'$ de la seconde courbe sera donc donné par la formule

$$\rho' = \frac{a^2}{\mathrm{MH}'},$$

et comme la figure OHMH′ est un parallélogramme, on peut remplacer MH par OH′, et MH′ par OH, ce qui revient à poser

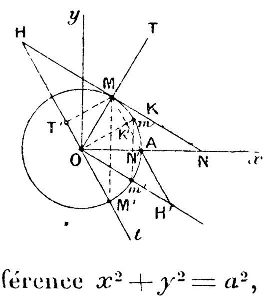
$$\rho = \frac{a^2}{\mathrm{OH}'}, \qquad \rho' = \frac{a^2}{\mathrm{OH}},$$

et à formuler la règle suivante :

*Le rayon de courbure d'une des courbes au point* M *est égal à* $a^2$ *divisé par le segment compris, sur une parallèle à la normale menée par l'origine, entre le point* O *et la normale à l'autre courbe.*

Appliquons cette construction à la recherche du rayon de courbure de la courbe au point M (*fig.* 6) où elle

Fig. 6.




coupe la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$, tangentiellement au rayon.

La tangente au point M étant le rayon MO, l'antiparallèle à cette tangente menée par l'origine est le rayon OM', symétrique de OM par rapport à l'axe OX. Ce rayon prolongé coupe au point H la normale MH à la courbe, tangente à la circonférence; et l'on a

$$\rho = \frac{a^2}{\mathrm{MH}} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\mathrm{MH}} = \mathrm{MK},$$

en déterminant le point K sur la tangente au cercle, par l'intersection de la droite OK perpendiculaire à OH.

On peut observer que l'angle MOK est égal à l'angle MOM' diminué de l'angle droit KOM'; il est donc égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$. L'angle MOA étant égal à $\alpha$, l'angle KOA est la différence $\alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Donc la droite OK est parallèle à la tangente à la seconde courbe qui passe au point M. On aura la tangente à cette seconde courbe en menant par M une perpendiculaire MT' à OM', et la normale, en menant par M une parallèle MN' à cette même droite. L'antiparallèle à la tangente MT' menée par le point O est la droite $\mathrm{O}m'$, symétrique du rayon OK; elle coupe en H' la normale MN', et par conséquent le rayon de courbure de la seconde courbe est donné par l'équation

$$\rho' = \frac{a^2}{\mathrm{MH}'} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\mathrm{MH}'}.$$

Or OH' est perpendiculaire à OM, puisque l'angle $\mathrm{H'O}x$ est égal à l'angle $m\mathrm{O}x$, égal lui-même au complément $\mathrm{MO}y$ de l'angle $\mathrm{MO}x$. Donc enfin

$$\rho' = \mathrm{MK}',$$

K' étant le pied de la perpendiculaire OK, abaissée sur la direction de MH'.

Les rayons de courbure des courbes au point où elles coupent la circonférence sont, en résumé, les segments MK, MK′; avec leurs signes, l'un est égal à $+a\cos 2\alpha$, et l'autre à $-a\cos 2\alpha$. La formule confirme ces résultats.

Il est aisé de trouver la relation entre les rayons de courbure $\rho$ et $\rho'$ des deux courbes qui passent en un même point $(x, y)$; soit $p$ le coefficient d'inclinaison de la tangente à l'une de ces courbes, celle qui a le rayon de courbure $\rho$. On aura

$$\rho = \frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)\sqrt{1+p^2}}.$$

Pour avoir le rayon de courbure $\rho'$ de l'autre courbe, nous changerons $p$ en $\frac{1}{p}$, ce qui donne

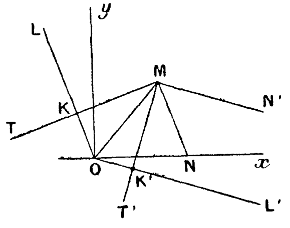
$$\rho' = \frac{a^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\left(y+\frac{x}{p}\right)\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = -\frac{a^2(1-p^2)}{(py+x)\sqrt{1+p^2}}.$$

Le rapport des valeurs absolues de $\rho$ et de $\rho'$ sera donc égal à

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{py+x}{y+px}.$$

Soient M le point considéré (*fig.* 7), MT et MT′ les

Fig. 7.




tangentes aux deux courbes qui y passent. Menons par l'origine les deux droites

$$py+x=0, \qquad y+px=0.$$

La première, OL, est la droite abaissée du point O perpendiculairement à la tangente MT, dont le coefficient angulaire est $p$. La seconde, OL′, est la perpendiculaire abaissée sur l'autre tangente MT′. Les distances MK, MK′ du point M à ces deux droites sont respectivement égales aux quantités

$$\mathrm{MK} = \frac{py + x}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad \mathrm{MK}' = \frac{y + px}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et l'on a, par conséquent,

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MK}'}.$$

Le rapport des rayons de courbure, pris en valeur absolue, est égal au rapport des distances du point M aux deux droites OL, OL′, menées par l'origine antiparallèlement aux tangentes MT′, MT, ou, ce qui revient au même, parallèlement aux normales MN, MN′.

Le coefficient $p$ étant le même tout le long de l'hyperbole $xy = k^2$ qui passe par le point M, les droites OL et OL′ restent fixes pour tous les points pris sur cette hyperbole, et les rayons de courbure correspondants sont entre eux, en valeur absolue, comme les distances de chaque point à ces deux droites.

On trouverait facilement d'autres relations entre les rayons de courbure $\rho$ et $\rho'$. Si l'on multiplie les deux rayons, par exemple, il vient

$$\begin{aligned}\rho\rho' &= -\frac{a^4(1 - p^2)^2}{(1 + p^2)[p(x^2 + y^2) + (1 + p^2)xy]} \\ &= -\frac{a^4(1 + p^2)^2}{p(1 + p^2)(x^2 - y^2 + a^2)},\end{aligned}$$

en remplaçant $xy(1 + p^2)$ par sa valeur $a^2p$, en vertu de l'équation différentielle de la courbe. Si l'on remplace $p$ par $\tang\alpha$, il vient

$$\rho\rho' = -\frac{a^4 \cos 2\alpha}{2(x^2+y^2+a^2)\tang 2\alpha}$$

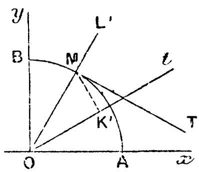
On obtiendrait aussi la relation

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{a^2(1+p)}(y-x) = \frac{2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)}\,\frac{y-x}{a^2}.$$

Les formules que nous avons obtenues se rapportent aux courbes, pour lesquelles $a^2$ est pris positivement dans l'équation donnée. Si l'on change le signe de $a^2$, on aura les résultats afférents à leurs trajectoires orthogonales.

Comme vérification, nous devons trouver le rayon de courbure du cercle $x^2+y^2=a^2$, lorsqu'on prend le point M sur sa circonférence AB (*fig.* 8). On aura alors

Fig. 8.




$$\rho = -\frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)(\sqrt{1+p^2})};$$

MT est la tangente à la circonférence au point M.

On a au point M

$$p = -\frac{x}{y};$$

donc

$$1-p^2 = \frac{y^2-x^2}{y}, \qquad y+px = y-\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2-x^2}{y},$$

$$\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{a}{y},$$

et, par conséquent,

$$\rho = -\frac{a^2(y^2-x^2)}{(y^2-x^2)\times a} = -a.$$

Le rayon OM est ici la normale à l'une des courbes qui passent au point M; c'est en même temps l'antiparallèle à la tangente à l'autre courbe. La droite $Ot$, qui fait avec $Ox$ l'angle $tOx = MOy$, est l'antiparallèle à la tangente MT à la première.

Les droites OL et OL′ de la *fig.* 7 ont donc ici les positions $Ot$, OM; et les distances MK, MK′ du point M à ces deux droites sont égales respectivement à 0 et à MK′.

Le second rayon de courbure $\rho'$ sera donc donné par l'équation

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{\text{MK}}{\text{MK}'} = \frac{0}{\text{MK}'};$$

ce qui montre que $\rho'$ est infini : résultat que la formule générale fait voir directement, lorsqu'on y fait

$$p = -\frac{y}{x}.$$

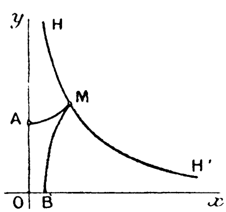
*Formules approximatives, applicables à certaines portions des courbes.* — L'équation

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2$$

se simplifie approximativement quand $p$ est très grand, et quand $p$ est très petit.

Or il en est ainsi pour les courbes MA, MB (*fig.* 9),

Fig. 9.




dans les régions qui se rapprochent des axes coordonnés.

La dérivée $p$ est égale à l'unité au point M, sur l'hyperbole limite HH'; et si l'on suit la courbe MA, $p$ diminue jusqu'à zéro à mesure qu'on se rapproche du point A; alors $\frac{1}{p}$ est beaucoup plus grand que $p$, et dans la région voisine de l'axe O$y$, on peut réduire l'équation à la forme

$$\frac{xy}{p} = xy\frac{dx}{dy} = a^2,$$

ce qui donne, en séparant les variables et en intégrant,

$$\frac{x^2}{2} - a^2 l\frac{y}{a} = \text{const.}$$

Il en est de même pour la courbe MB, dans le voisinage de l'arc O$x$; c'est alors $p$ qui augmente indéfiniment, et $\frac{1}{p}$ qui est négligeable. L'équation se réduit à la forme

$$xyp = xy\frac{dy}{dx} = a^2,$$

ce qui conduit à l'équation primitive

$$\frac{y^2}{2} - a^2 l\frac{x}{a} = \text{const.}$$

Ces formules sont en défaut pour la partie voisine des points de rebroussement M, mais elles s'appliquent aux arcs voisins des points A et B. Si l'on détermine les rayons de courbure des courbes approximatives aux points A et B où elles coupent les axes, on trouvera pour les sous-normales

$$\frac{x\,dx}{dy} = \frac{a^2}{y},$$

d'où l'on tire

$$\rho_A = \frac{a^2}{OA},$$

au point A ; et pour le point B

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{a^2}{x}, \qquad \text{par suite} \qquad \rho_B = \frac{a^2}{OB};$$

ce sont les valeurs exactes des rayons de courbure aux points A et B.

Pour voir l'étendue à laquelle les équations approximatives s'appliquent, cherchons à vérifier pour elles l'équation différentielle proposée. On aura

$$p = \frac{xy}{a^2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{a^2}{xy},$$

et

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = xy\left(\frac{xy}{a^2} + \frac{a^2}{xy}\right) = \frac{x^2y^2}{a^2} + a^2.$$

Cette quantité n'est pas constante, mais elle approche de la valeur $a^2$, pourvu que $\frac{x^2y^2}{a^2}$ soit suffisamment petit, ou que l'arc considéré de courbe soit renfermé entre les axes et une hyperbole $xy = ka^2$, $k$ étant suffisamment petit. Le produit $xy\left(p + \frac{1}{p}\right)$ sera compris entre $a^2$ et $a^2(1 + k^2)$, au lieu d'être rigoureusement constant.

### Courbes dans lesquelles le rapport $\frac{N}{N'}$ est constant.

Soit $k$ la valeur constante du rapport. On aura

$$y\sqrt{1+p^2} = k\frac{x\sqrt{1-p^2}}{p}.$$

On satisfait à cette équation en posant $p^2 = -1$, ce qui correspond aux droites imaginaires parallèles aux droites $y = \pm xi$. Nous pouvons écarter cette solution.

Il vient alors pour l'équation différentielle de la courbe

$$kx = py = y\frac{dy}{dx},$$

ou bien

$$y\,dy - kx\,dx = 0;$$

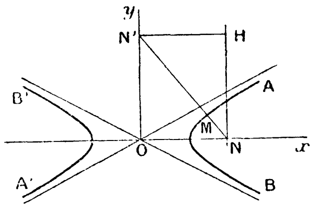
l'équation intégrale est

$$y^2 - kx^2 = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

On obtient donc une courbe du second ordre rapportée à son centre et à ses axes (*fig.* 10).

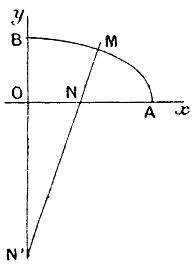
Fig. 10.




Si $k$ est positif, la courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les deux droites $y = \pm x\sqrt{k}$; suivant le signe de C, la courbe est dans l'un ou l'autre des deux angles formés par ces droites.

Lorsque l'on fait $C = 0$, $k$ étant toujours positif, la courbe se réduit aux deux droites $y = \pm x\sqrt{k}$ (*fig.* 11).

Fig. 11.




Si $k$ est négatif et égal à $-k'$, la courbe devient une ellipse dont les demi-axes sont $a = \sqrt{\frac{C}{k'}}$, et $b = \sqrt{C}$;

elle est réelle si C est positif. Pour $k' = 1$ l'ellipse se réduit à un cercle.

Pour $k' = 1$, et $C' = 0$, on retrouve les deux droites imaginaires $y = \pm xi$, déjà obtenues en posant $p^2 = -1$.

Pour $k = 0$, ou $k$ infini, la courbe se réduit à deux droites parallèles aux axes coordonnés.

De cette analyse résultent plusieurs conséquences qui ont un certain intérêt :

1° Pour mener une normale en un point pris sur une courbe du second ordre à centre, dont on connaît les axes, il suffit de faire passer par ce point une droite telle, que les deux segments déterminés par le point et par la rencontre de la droite avec les axes soient dans le rapport $k$ égal au rapport $\frac{a^2}{b^2}$ des carrés des demi-axes, pris en valeur absolue, de sorte qu'on ait

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{b^2}{a^2};$$

2° Pour l'hyperbole le rapport $k$ est le même pour les normales à la courbe et pour les normales aux asymptotes, ainsi que pour la courbe conjuguée,

$$y^2 - kx^2 = C;$$

3° Les rayons de courbure des courbes aux sommets sont donnés par la valeur prise en ces points par la sous-normale, laquelle est représentée en un point quelconque par $\frac{y\,dy}{dx} = kx$, sur l'axe $Ox$, et par $\frac{x\,dx}{dy} = \frac{y}{k}$ sur l'axe $Oy$.

On retrouve pour l'ellipse, en prenant $k$ en valeur absolue,

$$\rho = ka = k\sqrt{\frac{C}{k}} = \frac{b^2}{a}$$

au sommet du demi-axe $a$,

$$\rho = \frac{b}{k} = \frac{a^2}{b}$$

au sommet du demi-axe $b$.

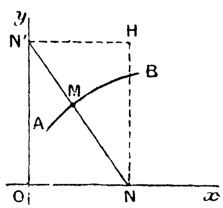
Pour l'hyperbole, avec $k$ positif et C négatif, on trouve

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

en prenant positivement le carré $b^2$ du demi-axe imaginaire ;

4° Si par les pieds N, N′ des deux normales on élève des perpendiculaires aux axes, on obtient un point H (*fig.* 12), qu'on peut regarder comme corres-

Fig. 12.




pondant au point M de la courbe AB obtenue précédemment. Si l'on désigne par $x'$ et $y'$ les coordonnées du point H, on aura

$$x' = x + \frac{y\,dy}{dx}, \qquad y' = y + \frac{x\,dx}{dy}.$$

Appliquons la transformation à la courbe

$$y^2 - kx^2 = C.$$

On en déduit d'abord

$$\frac{y\,dy}{du} = kx, \qquad \frac{x\,dx}{dy} = \frac{1}{k}y,$$

et par suite

$$x' = x(k+1), \qquad y' = y\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

La courbe lieu du point H est donc de même espèce que la courbe lieu du point M : à l'ellipse correspond une ellipse, à l'hyperbole une hyperbole, à une droite passant par le point O correspondrait une autre droite antiparallèle à la droite donnée : $y = kx$, $y' = \frac{x'}{k}$.

On a de plus, en regardant $x$, $y$, $x'$, $y'$ comme fonctions du temps $t$,

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(k+1), \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

de sorte que les accélérations sont proportionnelles, avec des coefficients différents suivant l'axe sur lequel on projette l'accélération totale.

Supposons, par exemple, que le mouvement du point M soit celui d'un point attiré vers le point O, ou repoussé par ce point proportionnellement à la distance OM. On aura pour les équations de son mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm\,\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \pm\,\omega^2 y.$$

Multipliant la première par $k+1$, la seconde par $1 + \frac{1}{k}$, il vient

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \pm\,\omega^2 x', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \pm\,\omega^2 y',$$

et le mouvement du point H obéit à la même loi que celui du point M, avec le même moyen mouvement.