Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 473-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__473_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

1798.

(1898, p. 241, résolue 1900, p. 377.)

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle a, b, c, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

NOTE

Par M. E.-N. BARISIEN.

La très élégante solution de M. Droz-Farny ne donne pas la position du point fixe de l'énoncé. Ce point est cependant facile à déterminer par l'intersection de deux positions particulières de la droite de Simson :

1° Lorsque le cercle est tangent en m à la conique, le point a se confond avec m, et la droite de Simson du triangle abc est alors la perpendiculaire abaissée de m sur bc ou la droite qui, passant par m, est symétrique de la normale en m par rapport aux axes de la conique. Soit δ cette droite.

2° Soient a', b' les symétriques de m par rapport aux axes de la conique, et c' le point diamétralement opposé à m. Les quatre points m, a', b', c' sont sur un cercle, et la droite de Simson de m. par rapport au triangle rectangle $a'c'b'$, est la droite $a'b'$. Soit δ' cette droite. Le point fixe est à l'intersection des droites δ et δ'.

Si la conique est une ellipse rapportée à ses axes de coordonnées, et si φ désigne l'angle d'anomalie excentrique en m, les équations des droites δ et δ' sont

$$(\delta)\qquad ax\sin\varphi + by\cos\varphi = (a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$(\delta')\qquad bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection k de ces deux droites sont donc

$$(1)\qquad x = a\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cos\varphi,\qquad y = -b\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\sin\varphi.$$

On voit que lorsque m se déplace sur l'ellipse donnée, le point (1) parcourt l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2.$$

Le point (1) est analogue au point de Frégier p dont les coordonnées sont

$$(2) \qquad x = a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos\varphi, \qquad y = -b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin\varphi.$$

Il en résulte que le centre O de l'ellipse et les points k et p sont en ligne droite, avec la relation

$$\overline{Om}^2 = \overline{Op} + \overline{Ok},$$

qui permet de construire le point k au moyen du point de Frégier p.

Si la conique donnée est une parabole et si m' est le symétrique de m par rapport à l'axe de la parabole, la parallèle à l'axe menée par m' rencontre la normale en m au point p de Frégier. Le point fixe k s'obtient en prenant le symétrique de p par rapport à m'. Lorsque le point m parcourt la parabole donnée, le point k décrit une parabole égale à la parabole donnée, tout comme le point p.

1803.

(1898, p. 340.)

Une conique est donnée. On prend les normales à cette courbe issues de l'un de ses points. Pour chaque normale, on mène de son pied la droite qui lui est symétrique par rapport aux axes de la conique. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues passent par un même point.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. DUPORCQ.

La propriété à démontrer est un cas particulier de la suivante :

Étant données quatre normales concourantes à une co-

nique, si, par leurs pieds, on mène les droites en direction symétriques de ces normales par rapport aux axes de la conique, on obtient quatre droites concourantes.

Soit, en effet, a le pied d'une des normales considérées : la droite à mener par ce point est, en direction, symétrique par rapport aux bissectrices des axes de la tangente en a; d'ailleurs, les quatre pieds a sont sur une même hyperbole d'Apollonius, passant par le centre de la conique donnée C, et par les points à l'infini de ses axes.

Ceci posé, transformons homographiquement la figure, de sorte que les points à l'infini des bissectrices des axes aient pour transformés les points cycliques : les transformés a' des points a se trouveront visiblement encore sur une même hyperbole d'Apollonius relative à la conique C', transformée de C, et les transformées des quatre droites envisagées seront les normales à C' aux points a'. De la concourance de ces normales résulte celle des droites considérées. On voit de plus que ces dernières se coupent sur l'hyperbole d'Apollonius qui passe par les quatre pieds a.

1808.

(1893, p. 18*.)

Soit M *un point quelconque de l'une des asymptotes d'une hyperbole donnée, de foyers* F *et* F'. *On considère la parabole tangente à* MF *en* F *et à* MF' *en* F'. *Montrer que le foyer de cette parabole est situé sur l'hyperbole et que le lieu du sommet de la parabole se compose de deux hyperboles.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. DUPORCQ.

Soient a, i et j trois points d'une droite et φ le point commun aux tangentes menées par i et j à un cercle quelconque (p) tangent en a à la droite ij; selon que a est extérieur ou intérieur au segment ij, on voit aisément que les longueurs φi et φj, d'une part, ai et aj, d'autre part, ont même somme ou même différence; quand le rayon du cercle (p) varie, le lieu du point φ est donc la conique de foyers i et j et de sommet a.

Soit maintenant b un point quelconque de la droite ij, le lieu des points de contact, s, des tangentes menées de ce point aux cercles (p) est évidemment le cercle de centre b, qui passe par a; si a et b divisent harmoniquement le segment ij, on voit que ce cercle (s) est le cercle osculateur en a à la conique (φ).

Transformons homographiquement ces résultats, de sorte que i et j aient pour transformés les points cycliques, et soient F et F′ les points qui correspondent dans la nouvelle figure aux points cycliques de la première; aux cercles (p) correspondent les paraboles (P), qui passent par F et F′, et touchent la droite de l'infini au même point A; le pôle M de la droite FF′ par rapport à ces paraboles décrit évidemment la droite qui joint le point A au milieu O de FF′. Quant au point φ, il a pour transformé le foyer Φ de (P); on voit donc ainsi que le lieu de ce point est la conique de foyers F et F′ qui admet OA pour asymptote.

Au conjugué harmonique, b, de a, par rapport au segment ij, correspond le point à l'infini de la direction perpendiculaire à celle de OA, c'est-à-dire à celle de l'axe de (P); le point s a donc pour transformé le sommet S de (P). On voit ainsi que le lieu de ce sommet est la conique qui passe par les foyers F et F′, et qui a un contact du second ordre avec la conique (Φ) au point à l'infini de la direction OA.

Autres solutions de MM. Audibert, Lez et L. Ripert.

1812.

(1898, p. 100.)

Les plans osculateurs à une cubique gauche en trois de ses points a, b et c, coupent le plan abc suivant des droites concourantes. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par un abonné.

Le théorème est bien connu sous la forme suivante : *Si l'on considère trois points d'une cubique gauche et les plans osculateurs en ces points, le point commun aux trois plans est dans le plan commun aux trois plans.* On en trouve une démonstration dans le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon; en considérant quatre points de la cubique et les plans osculateurs en ces points, on a deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre. L'énoncé donné par M. Duporcq résulte du théorème suivant, également connu : *Les tangentes à une cubique gauche font partie d'un complexe linéaire,* et de ce fait général : *Si les tangentes à une courbe gauche font partie d'un complexe linéaire, le plan qui contient les droites du complexe issues d'un point de la courbe est le plan osculateur en ce point,* ou encore : *les droites menées par un point de la courbe dans le plan osculateur en ce point font partie du complexe linéaire.* En regardant la cubique comme l'osculée du plan

$$\lambda^3 x - 3\lambda^2 y + 3\lambda z - w = 0,$$

de sorte que le point d'osculation a pour coordonnées 1, λ, λ^2, λ^3, on obtient d'ailleurs directement l'équation du complexe des droites menées par les points d'une cubique gauche dans les plans osculateurs en ces mêmes points; car, si (x', y', z', w') est un point du plan osculateur au point $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$, les coordonnées p et s de la droite qui joint ces deux points sont $p = \lambda z' - \lambda^2 y'$, $s = w' - \lambda^3 x'$, et la condition

$$\lambda^3 x' - 3\lambda^2 y' + 3\lambda z' - w' = 0$$

(qui exprime que le point est dans le plan osculateur) donne $3p - s = 0$, équation d'un complexe linéaire (cf. *Nouvelles Annales,* p. 115; 1892).

Autre réponse de M. V. Retali, qui s'exprime ainsi :

« Le théorème énoncé appartient à Chasles (*Aperçu hist.,* Note XXXIII, p. 403) : c'est la propriété fondamentale des cubiques gauches, et on la trouve démontrée, dans les livres qui traitent de ces courbes, soit par la Géométrie pure, soit par l'Analyse. »

Diverses autres réponses dans le même sens de MM. Retali, Lery, Droz-Farny, Anonyme.

1818.

(1899, p. 148.)

Le lieu des barycentres des triangles qui sont formés par une tangente mobile à une ellipse avec les axes de cette courbe est une kreuzcurve. (Cardoso-Laynes.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Si A et B sont les points où la tangente à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

au point $(x'y')$ coupe les axes, nous avons évidemment

$$OA = \frac{a^2}{x'}, \qquad OB = \frac{b^2}{y'};$$

les coordonnées du barycentre G du triangle OAB sont donc

$$\xi = \frac{a^2}{3x'}, \qquad \eta = \frac{b^2}{3y'}$$

et l'équation du lieu cherché est

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = 9.$$

Autrement : Le lieu du point M d'intersection des parallèles menées aux axes par les points A et B est, par définition, la *kreuzcurve* correspondante à l'ellipse donnée; mais $3.GO = OM$; donc le lieu de G est la *kreuzcurve* relative à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 9.$$

Si, au lieu d'une ellipse, on considère une hyperbole, le lieu de G est une *kohlenspitzencurve.*

Autres solutions de MM. H. Brocard, A. Droz-Farny, G. Fontené, Lez, etc.

1819.

(1899, p. 195)

Soient S *et* S' *deux coniques se coupant en quatre points* A, B, C, D :

1° *Démontrer que le lieu des points* M *tels que le faisceau* M(ABCD) *soit harmonique, se compose de trois coniques passant par* A, B, C, D. *Former l'équation de l'ensemble de ces trois coniques;*

2° *Quelle relation doit exister entre les invariants* S *et* S' *pour que, parmi les trois coniques trouvées se trouve la conique* S; *quelles sont, de même, les relations nécessaires pour que* S *et* S' *soient deux des trois coniques; quelle est alors l'équation de la troisième?* (H. VOGT.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Si b', c', d' sont les rayons respectivement conjugués harmoniques de $|AB|$ par rapport à $|AC|$ et $|AD|$, de $|AC|$ par rapport à $|AD|$ et $|AB|$, de $|AD|$ par rapport à $|AB|$ et $|AC|$, le lieu des points M est formé évidemment par les trois coniques du faisceau qui touchent au point A respectivement les droites b', c', d' (théorème connu; *voir*, par exemple, STEINER-SCHRÖTER, *Vorlesungen*, p. 124). Le faisceau $A(b'c'd')$ est le covariant cubique du faisceau A(BCD) : lorsqu'une des coniques S, S' se trouve parmi les trois coniques harmoniques, sa tangente au point A doit être un des trois rayons b', c', d'; si S et S' sont harmoniques et touchent au point A respectivement les droites b' et c', la troisième conique du groupe est tangente en A au rayon conjugué harmonique de $|AD|$ par rapport à b' et c'.

Désignons par U le discriminant du faisceau $s+\lambda s'$; par H le covariant hessien de U; par Q le jacobien du système U, H; par Δ_1 et Δ_2 les discriminants respectifs de S et S'; par Θ_1 et Θ_2 les deux invariants simultanés du système S, S' et posons pour abréger

$$\begin{aligned}
27\Delta_1\Delta_2^2 - 9\Delta_2\Theta_1\Theta_2 + 2\Theta_2^3 &= L,\\
9\Delta_1\Delta_2\Theta_2 - 6\Delta_2\Theta_1^2 + \Theta_1\Theta_2^2 &= M,\\
9\Delta_1\Delta_2\Theta_1 - 6\Delta_1\Theta_2^2 + \Theta_1^2\Theta_2 &= N,\\
27\Delta_1^2\Delta_2 - 9\Delta_1\Theta_1\Theta_2 + 2\Theta_1^3 &= P,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
U &= 3\Delta_1 + 3\Theta_1\lambda + 3\Theta_2\lambda^2 + 3\Delta_2\lambda^3,\\
H &= 2(3\Delta_1\Theta_2 - \Theta_1^2) + 2(9\Delta_1\Delta_2 - \Theta_1\Theta_2)\lambda + 2(3\Delta_2\Theta_1 - \Theta_2^2)\lambda^2,\\
Q &= -L\lambda^3 - 3M\lambda^2 + 3N\lambda + P
\end{aligned}$$

et les racines λ_1, λ_2, λ_3 de l'équation $Q = 0$ donnent les trois coniques harmoniques du faisceau : l'équation de l'ensemble de ces trois coniques est donc

$$(S+\lambda_1 S')(S+\lambda_2 S')(S+\lambda_3 S') = 0.$$

qui, ayant égard aux relations entre les racines et les coefficients de $Q = 0$, devient

$$L.S^3 + 3M.S^2S' - 3N.S.S'^2 + P.S'^3 = 0.$$

Si parmi les trois coniques harmoniques se trouve S, l'équation $Q = 0$ doit avoir une racine nulle, donc $P = 0$; lorsque aussi S' est harmonique, $Q = 0$ doit avoir une racine infinie, donc $L = 0$; si ces deux conditions sont vérifiées ensemble nous avons donc

$$2\Delta_2\Theta_1^3 = 2\Delta_1\Theta_2^3 = 9\Theta_1\Theta_2 - 27\Delta_1\Delta_2$$

et l'équation de la troisième conique est

$$M.S - NS' = 0.$$

1830.

(1899, p. 532.)

Soient A *un point d'une conique dont l'un des foyers est le point* F, T *le point de rencontre de la tangente au point* A *avec l'axe focal; au point* A *sur* AF *et au point* T *sur* AT, *on élève des perpendiculaires qui se coupent au point* S. *La droite* FS *rencontre la normale en* A, *au centre de courbure de la conique en ce point.*

(C. SERVAIS.)

SOLUTION

Par M. MANNHEIM.

Du point N, où la normale à la conique en A rencontre l'axe focal, élevons à cette normale la perpendiculaire NP. Cette droite coupe au point P le rayon vecteur AF; la perpendiculaire à cette droite, élevée du point P, rencontre la normale en A, au centre de courbure α de la conique [1]. Le point F est le centre de similitude des quadrilatères semblables FTSA, $FN\alpha P$; la droite FS passe alors par le centre de courbure α, donc, etc.

---

[1] Voir *Principes et développements de Géometrie cinématique*, p. 48.