Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 467-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__467_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Mathématiques supérieures à l'usage des Physiciens, Chimistes et Ingénieurs et des Élèves des Facultés des Sciences; par M. *Vogt*, professeur à l'Université de Nancy. (Nony et C^{ie}, Paris, 1901.) Prix : 10^{fr}.

Ce Livre s'adresse principalement aux étudiants qui désirent se mettre le plus rapidement possible en état de suivre les cours d'enseignement supérieur théorique ou appliqué, aux maîtres répétiteurs obligés de commencer, loin d'une Université, leur préparation à la licence, aux personnes qui se destinent à l'Industrie ou aux Travaux publics. On connaît bien l'enseignement précis, substantiel et condensé que M. Vogt donne à l'Université de Nancy aux étudiants qui désirent apprendre les Mathématiques et à ceux qui se destinent aux sciences appliquées ; j'ai donc seulement à donner une idée des matières réunies dans son Livre et, autant que je l'aurai aperçu, de l'esprit dans lequel elles ont été traitées.

Première Partie : *Compléments d'Algèbre.* — Les premiers Chapitres contiennent les règles de calcul qui ne sont pas enseignées ordinairement dans les cours élémentaires : Résolution des équations du premier degré et, à cette occasion, introduction des déterminants, formule du binome, calcul des radicaux, définition et calcul des puissances à exposants fractionnaires ou négatifs.

L'étude des séries est précédée de généralités sur les limites et en particulier du principe relatif à des nombres qui vont en croissant et restent inférieurs à un nombre fixe. Ce principe permet d'établir simplement les règles usuelles de convergence des séries ; le calcul approché de la somme d'une série est expliqué avec détails.

Puis vient l'étude de la fonction exponentielle et de son inverse, la fonction logarithmique : il y a lieu de s'arrêter sur la méthode suivie pour introduire ces fonctions. Dans les questions d'Analyse où l'exponentielle et le logarithme jouent le rôle d'auxiliaires permettant de ramener l'étude des produits à celle des sommes, ce qui importe, en définitive, c'est qu'on ait pu définir une fonction continue $\varphi(x)$ jouissant de la propriété

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Or on obtient une fonction ayant ces propriétés si l'on pose

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

la série du second membre est une série entière, convergente pour toute valeur de x : elle met en évidence la propriété

$$\varphi'(x) = \varphi(x).$$

et elle permet encore de montrer aisément que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ se ramènent à la fonction $\varphi(x)$. D'ailleurs, cette définition de la fonction $\varphi(x)$ par une série entière se raccorde, à l'aide d'un raisonnement dû à Cauchy, avec la définition de l'exponentielle à laquelle on était parvenu par des généralisations successives de la notion d'exposants : on montre, en effet, que l'on a, pour toute valeur de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

en posant

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Il y a de grands avantages, on le voit déjà par les remarques précédentes, à rattacher, comme le fait M. Vogt, les propriétés de l'exponentielle et du logarithme à la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Deuxième Partie : *Principes de Géométrie analytique.* — Cette Partie débute par des notions générales relatives à la mesure des grandeurs, à l'homogénéité des formules établies en laissant les unités arbitraires, avec des exemples empruntés à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique. La théorie aujourd'hui classique des segments et des projections est exposée dans un Chapitre séparé, puis viennent la définition des coordonnées et une première idée de la représentation des lignes et des surfaces par des équations, donnée en prenant pour exemples les lignes et les surfaces du second ordre.

Troisième Partie : *Dérivées et différentielles.* — Après la recherche des dérivées des fonctions usuelles d'une variable, la formule des accroissements finis permet d'aborder l'étude de la variation d'une fonction, puis la démonstration des formules de Taylor et de Mac-Laurin.

Un Chapitre est réservé aux fonctions définies par des séries entières et aux développements en série des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$; un autre Chapitre aux méthodes d'interpolation.

Tout ce qui précède suppose seulement la connaissance des dérivées. On introduit maintenant la notion de différentielle avec son interprétation géométrique, et celle des différentielles d'ordre supérieur.

Au début de l'étude des fonctions de plusieurs variables, on définit la différentielle totale comme la partie principale de l'accroissement d'une fonction z des variables indépendantes x et y, quand les accroissements donnés à ces variables sont, tous deux, des infiniment petits du premier ordre. La considération de la différentielle totale permet souvent de calculer à la fois toutes les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables. Cette méthode est employée plusieurs fois; le lecteur peut d'ailleurs, et c'est un bon exercice pour les commençants, retrouver successivement l'expression de chacune des dérivées.

La théorie du changement de variables, la formule de Taylor étendue au cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes, et la détermination des maxima et des minima de ces fonctions terminent cette troisième Partie.

Quatrième Partie : *Théorie des équations.* — L'introduction des quantités complexes et la démonstration de la formule de Moivre permettent d'obtenir $\cos mx$ et $\sin mx$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$, la résolution de l'équation binome, les formules d'Euler qui ramènent à la seule exponentielle les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, et comme application le calcul de $\cos mx$ et de $\sin mx$ en fonction des sinus et des cosinus des multiples de x.

Puis viennent les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique, les racines multiples, l'élimination. Un Chapitre est consacré à la résolution de l'équation du troisième degré: un autre, qui doit être signalé particulièrement, se rapporte à la résolution des équations numériques. On pourra voir, en lisant, page 270, l'exemple emprunté à la Théorie de la chaînette, avec quel soin les calculs numériques sont expliqués.

Cinquième Partie : *Applications géométriques.* — Construction des courbes planes en coordonnées rectilignes et en coordonnées polaires; lieux géométriques, enveloppes dans le plan et dans l'espace, centre de courbure des courbes planes défini comme le point où la normale touche son enveloppe. Pour les courbes gauches, plan osculateur, centre de courbure défini de suite comme le point où le plan osculateur est rencontré par la droite suivant laquelle le plan normal touche son enveloppe.

Sixième Partie : *Calcul intégral.* — Après avoir démontré le théorème relatif à la substitution des infiniment petits dans la recherche de la limite d'une somme, M. Vogt considère la somme

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$
$$(x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i),$$

et en montrant que cette somme a une limite, dans des conditions qui sont précisées, il établit analytiquement l'existence de l'intégrale définie par une méthode qui s'étendra d'elle-même aux intégrales doubles et aux intégrales triples. Il donne une représentation géométrique de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ et il montre comment on peut obtenir sa valeur dès que l'on connaît une fonction $F(x)$ admettant $f(x)$ comme dérivée.

Dans les Chapitres suivants : Procédés d'intégration, calcul des coefficients de la série trigonométrique qui doit représenter une fonction donnée; calcul approché d'une intégrale définie, détermination des aires, arcs de courbe, volumes, moments d'inertie à l'aide d'intégrales simples ou multiples.

Les intégrales curvilignes sont ensuite définies avec le plus grand soin, ainsi que la condition pour qu'une intégrale curviligne ne dépende que des limites du chemin d'intégration.

Je dois encore signaler le Chapitre consacré aux intégrales de surface et à leur transformation en intégrales de volume ou en intégrales curvilignes. La formule d'Ostrogradsky, ramenant une intégrale de surface à une intégrale de volume, montre sous quelle condition une intégrale de surface relative à une calotte limitée par un contour (C) demeure constante quand la calotte se déforme, le contour (C) restant fixe; la formule de Stokes donne, dans ce cas, une évaluation de l'intégrale de surface considérée au moyen d'une intégrale curviligne relative au contour (C). M. Vogt démontre la formule de Stokes en généralisant le procédé classique qui sert à établir la formule analogue de Géométrie plane

$$\int_{(C)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Il indique aussi une autre conséquence de la formule d'Ostrogradsky, la formule de Green, fondamentale dans l'étude des fonctions de trois variables qui satisfont à la condition

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Septième Partie : *Équations différentielles.* — Généralités sur les équations différentielles. Intégration dans les cas les plus simples.

Étude particulière des équations linéaires avec une indication sur la méthode de la variation des constantes.

Équations différentielles simultanées. Équations aux dérivées partielles. Intégration de l'équation linéaire du premier ordre, indication relative à l'équation des cordes vibrantes.

Notes d'Algèbre. — Complément sur l'étude des séries. Séries absolument, uniformément convergentes.

Élimination. Théorème de Bezout sur le nombre des points communs à deux courbes algébriques.

Notes de Géométrie analytique. — Étude plus détaillée des coniques. Dans l'espace, transformation des coordonnées et, comme application, formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

Étude des surfaces du second ordre sur les équations réduites.

Axes d'une surface du second ordre.

Courbure sur une surface. Théorème de Meusnier.

Indicatrice de Dupin. Lignes de courbure.

Exercices sur les sept Parties du Volume et sur les Notes de Géométrie analytique.

On voit par cet exposé rapide et où, pour abréger, j'ai dû passer plus d'un paragraphe, tout ce que M. Vogt a pu réunir en un seul Volume. Ce Livre sera pour les étudiants un guide sûr, expérimenté, les conduisant par les voies les plus directes à des règles précises et bien préparées pour les applications. Ceux qui en auront le temps pourront revenir aux régions traversées si utilement, et achever d'y prendre l'habitude et le goût des études mathématiques.

E. Lacour,

Professeur à l'Université de Nancy.