Nouvelles annales de mathématiques

Maurice d'Ocagne

Construction des centres de courbure des courbes de Lamé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 465-467

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__465_1>

[$M^1 8e$]

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES COURBES DE LAMÉ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Rappelons que le lieu des points de rencontre des rayons vecteurs d'une courbe C issus de O et des parallèles aux normales correspondantes issues d'un second pôle fixe P est dite l'*adjointe des directions normales de la courbe* C (1). Nous avons fait voir que si la normale au point M de la courbe C coupe au point N la droite OP, *la perpendiculaire élevée en* N *à* MN *et la parallèle menée à la tangente correspondante de l'adjointe par le centre de courbure* μ *répondant au point* M *se coupent sur le rayon vecteur* OM (2).

(1) Sur la notion générale d'adjointe infinitésimale, *voir* la Note que nous avons récemment publiée dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. XIX, p. 219; 1900).

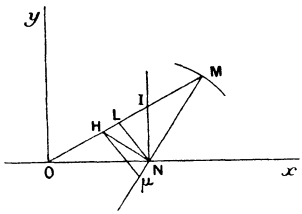
(2) Ce théorème, démontré dans un Mémoire de l'*American Journal of Mathematics* (t. XI, p. 57; 1889), est reproduit dans notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*, p. 285.

Si donc, faisant coïncider le pôle P avec le point N, on peut obtenir facilement la direction de la tangente en M à l'adjointe, on en déduit immédiatement la construction du centre de courbure μ de la courbe C. Voici, comme application de cette remarque, une détermination bien simple des centres de courbure d'une courbe de Lamé, dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$Ax^m + By^m = 1, \tag{1}$$

A et B ayant des signes quelconques et m étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire.

Si l'on prend comme second pôle le pied N de la nor-



male, on voit immédiatement, en posant $ON = \alpha$, que l'équation de l'adjointe est

$$\frac{y}{x-\alpha} = \frac{By^{m-1}}{Ax^{m-1}}$$

ou

$$Ax^{m-1} - By^{m-2}(x-\alpha) = 0. \tag{2}$$

Le coefficient angulaire t de la tangente en M à cette courbe est donné par

$$t = \frac{(m-1)Ax^{m-2} - By^{m-2}}{(m-2)By^{m-3}(x-\alpha)}$$

ou, en tenant compte de (2),

$$t = \frac{y}{x}\,\frac{(m-2)(x-\alpha)-\alpha}{(m-2)(x-\alpha)}.$$

Si donc nous appelons c le coefficient angulaire de OM et si nous portons l'origine en N de façon à prendre pour nouvel axe des y la perpendiculaire NI à ON, nous avons

$$t = c\,\frac{(2-m)x' + \alpha}{(2-m)x'},$$

et il est bien facile de voir que cette égalité exprime que, si la parallèle à la tangente à l'adjointe menée par N coupe OM en L, on a

$$(3) \qquad \text{IL} = (2-m)\,\text{IM}.$$

Ayant donc marqué sur OM le point L défini par cette égalité (3), *on a le centre de courbure* μ *en élevant à* MN *la perpendiculaire* NH *et menant par* H *la parallèle* Hμ *à* LN.

Si $m = 1$, auquel cas on a une droite, le point L venant coïncider avec M, le point μ est bien rejeté à l'infini, ce qui est une vérification.

Si $m = 2$, auquel cas on a une conique à centre, le point L se confond avec le point I et la droite Hμ est perpendiculaire à Ox, ce qui redonne la construction bien connue due à M. Mannheim.